

Técnicas Matemáticas de Resolución de Problemas

Curso 2005/2006

Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola
Departamento de Matemática Aplicada I

Conceptos Básicos

1 Trigonometría

Ejercicio 1.1 Calcula las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

1. $\cos \alpha = 4/5$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$
2. $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$
3. $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$ y $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$
4. $\operatorname{cotg} \alpha = -2$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$
5. $\operatorname{sec} \alpha = 1$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

Ejercicio 1.2 Expresa $\cos(30^\circ + x)$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Ejercicio 1.3 Expresa $\operatorname{tg}(45^\circ + x)$ en términos de $\operatorname{tg}(x)$.

Ejercicio 1.4 Utiliza la fórmula $\cos(x + y)$ para hallar el valor exacto de 105° .

Ejercicio 1.5 Expresar $\cos 3a$ en función de $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$.

Ejercicio 1.6 Obtener una fórmula para $\cos 4a$ en términos de $\cos a$.

Ejercicio 1.7 Demuestra que en un triángulo cualquiera

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B + C)$$

siendo A , B y C los ángulos del triángulo.

Ejercicio 1.8 Demuestra que en un triángulo rectángulo se verifica

$$\frac{\operatorname{sen} B + \cos C}{\operatorname{sen} C + \cos B} = \operatorname{tg} B$$

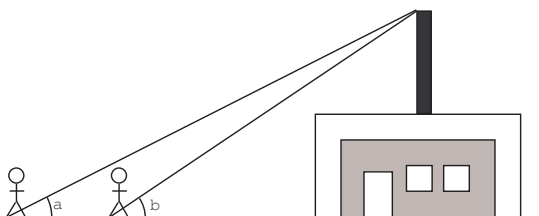
siendo B y C los ángulos no rectos del triángulo.

Ejercicio 1.9 Demuestra las siguientes identidades:

1. $\operatorname{sen}(a + b)\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$.

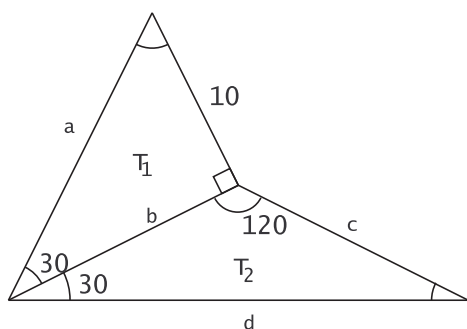
$$2. \sin(a + b)\sin(a - b) = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

Ejercicio 1.10 Quiero medir la altura de la chimenea de una fábrica. Como no me puedo acercar al pie de la chimenea, pues está en el interior de una nave, he tomado, desde dos puntos, los ángulos bajo los cuales veo el extremo de la chimenea, y he medido la distancia de separación de los dos puntos (15m). Expresar la altura de la chimenea (h) en función de los



datos aportados ($a = 45, b = 60$).

Ejercicio 1.11 Sabiendo que el triángulo T1 de la Figura es rectángulo, calcular a, b, c, d y el área de T1 y T2.



Ejercicio 1.12 Se desea calcular la altura de una torre de lanzamiento de cohetes; para ello se hacen dos observaciones desde los puntos A y B , obteniendo como ángulos de elevación 30° y 45° , respectivamente. La distancia entre A y B es de 30 m. Halla la altura de la torre.

Ejercicio 1.13 Pedro y Ana ven desde las puertas de sus casa una torre de televisión bajo ángulos 45° y 60° . La distancia entre sus casas es de 126 m, y la antena está situada entre ambas. Halla la altura de la torre.

Ejercicio 1.14 Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30° . Halla la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas?

Solución 1.1

1. $\operatorname{sen}\alpha = -3/5$, $\operatorname{tg}\alpha = -3/4$, $\operatorname{cotg}\alpha = -4/3$, $\operatorname{seca}\alpha = 5/4$ y $\operatorname{coseca}\alpha = -5/3$.
2. $\cos\alpha = -4/5$, $\operatorname{tg}\alpha = -3/4$, $\operatorname{cotg}\alpha = -4/3$, $\operatorname{seca}\alpha = -5/4$ y $\operatorname{coseca}\alpha = 5/3$
3. $\operatorname{sen}\alpha = -3/5$, $\cos\alpha = -4/5$, $\operatorname{cotg}\alpha = 4/3$, $\operatorname{seca}\alpha = -5/4$ y $\operatorname{coseca}\alpha = -5/3$
4. $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{5}/5$, $\cos\alpha = -2\sqrt{5}/5$, $\operatorname{tg}\alpha = -1/2$, $\operatorname{seca}\alpha = -\sqrt{5}/2$ y $\operatorname{coseca}\alpha = \sqrt{5}$
5. $\operatorname{sen}\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\operatorname{cotg}\alpha$ y $\operatorname{coseca}\alpha$ no están definidos.

Solución 1.2 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}x$.

Solución 1.3 $\frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x}$.

Solución 1.4 $(1 - \sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Solución 1.5 $\cos^3 a - 3\operatorname{sen}^2 a \cos a$.

Solución 1.6 $1 - 8\cos^2 a + 8\cos^4 a$.

Solución 1.10 $h = \frac{15}{2}(3 + \sqrt{3}) \simeq 35,5m$.

Solución 1.11 $a = 20$, $b = 10\sqrt{3}$, $c = 10\sqrt{3}$, $d = 30$. Área de $T_1 = 50\sqrt{3}$, área $T_2 = 75\sqrt{3}$.

Solución 1.12 $h = 15(\sqrt{3} + 1) \simeq 40,98m$.

Solución 1.13 $h = 183 - 61\sqrt{3} \simeq 79,88m$.

Solución 1.14 Anchura $5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \simeq 15,73m$. Altura sobre la primera pared $7,07m$, altura sobre la segunda pared $5m$.

2 Geometría Plana

Ejercicio 2.1 Se llama *mediatriz* del segmento de extremos A y B al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y B . Hallar las mediatrices de los segmentos de extremos:

1. $A(-3, 1)$ y $B(2, -3)$.
2. $A(4, -7)$ y $B(0, 5)$.

Ejercicio 2.2 Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas:

1. Que pasa por $A(-3, 7)$ y tiene dirección paralela al vector $\vec{d}(4, -7)$.
2. Que pasa por $M(5, 2)$ y es paralela a $\vec{d} = 2, 2$.
3. Que pasa por $P(5, -2)$, $Q(0, 4)$.
4. Que pasa por $R(1, 1)$, $S(3, 3)$.

Ejercicio 2.3 Obtener los distintos tipos de ecuaciones de la recta determinada por:

1. el punto $P(2, 3)$ y el vector $\vec{v}(5, -4)$,
2. los puntos $P(\frac{5}{2}, -2)$ y $Q(2, \frac{2}{3})$,
3. el punto $P(\frac{5}{2}, -2)$ y la pendiente $m = \sqrt{3}$. ¿Qué ángulo forma la recta con la horizontal?

Representar en el plano dichas rectas.

Ejercicio 2.4 Dadas las siguientes rectas, obtener de cada una de ellas: dos puntos, vector director y pendiente.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \frac{4}{5}\lambda \end{cases} & \text{(b)} 3x - 2y + 5 = 0 \\ \text{c)} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{5} & \text{(d)} \frac{x-3}{2} = \frac{y+8}{7} \end{array}$$

Ejercicio 2.5 Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 0)$ y es

1. perpendicular a la recta $x - 2y + 1 = 3$
2. paralela a la recta $x - 2y + 1 = 3$

Ejercicio 2.6 El punto medio de un segmento es $(-1, 4)$. Si un extremo es el punto $(2, 3)$, hallar el otro.

Ejercicio 2.7 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-2, 1/3)$ y tiene igual pendiente que la recta que pasa por los puntos $P = (2, 1)$ y $Q = (3, 4)$.

Ejercicio 2.8 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (2, 1)$ y forma un ángulo de 120 grados con la parte positiva del eje X .

Ejercicio 2.9 Calcula la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y es:

1. paralela al eje X .
2. paralela al eje Y .
3. paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
4. paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.
5. Paralela a la recta $5x + 2y = 0$

Ejercicio 2.10 Comprueba si los puntos $(-2, 1)$, $(-1, 0)$ y $(2, -2)$ están alineados.

Ejercicio 2.11 Hallar en el eje de abscisas un punto P , cuya distancia al punto $Q = (3, -2)$ sea igual a 5.

Ejercicio 2.12 La recta $3x - by + 2 = 0$ es perpendicular al vector de coordenadas $(3, 4)$. Halla b .

Ejercicio 2.13 Calcula las coordenadas del simétrico de $P = (3, -2)$ con respecto al punto $M = (5, 3)$.

Ejercicio 2.14 Calcula la distancia entre la recta $y = 3x + 2$ y la recta $y = 3x$.

Ejercicio 2.15 Dos vértices opuestos de un paralelogramo son $A = (1, 3)$ y $C = (7, -1)$; otro vértice es $B = (4, 5)$. Hallar las coordenadas del vértice D , las longitudes de los lados y las ecuaciones de las diagonales.

Ejercicio 2.16 Estudiar la posición relativa de las tres rectas siguientes: $r : x + y = 1$; $s : 2x + 3y = 1$; $t : 3x + \alpha y = 2$ en función del parámetro α .

Ejercicio 2.17 Hallar la recta t que es paralela a r y pasa por la intersección de s_1 y s_2 , siendo

$$r : 3x + 2y + 5 = 0; \quad s_1 : x + 2y + 1 = 0; \quad s_2 : 2x + y = 7.$$

Ejercicio 2.18 Calcula las ecuaciones de las tres mediatrices del triángulo de vértices $A = (3, 1)$, $B = (7, 5)$ y $C = (5, -1)$.

Solución 2.1 1) $10x - 8y - 3 = 0$, 2) $x - 3y - 5 = 0$

Solución 2.2 1.

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 7t \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

Solución 2.3 1. $\{x = 2 + 5t; y = 3 - 4t\}$, $y = -4/5x + 23/5$.

2. $\{x = 3t; y = 5/3 + 16t\}$, $y = 16/3x + 5/3$.

3. $\{x = t; y = -2 - \frac{5\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}t\}$, $y = \sqrt{3}x - 2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$. El ángulo es de $\pi/3$.

Solución 2.4 a) $P = (2, -1)$, $Q = (17, 3)$, $\vec{v} = (15, 4)$, $m = 4/5$.

b) $P = (-1, 1)$, $Q = (-3, -2)$, $\vec{v} = (2, 3)$, $m = 3/2$.

c) $P = (0, 8/5)$, $Q = (3, 13/5)$, $\vec{v} = (3, 1)$, $m = 1/3$.

d) $P = (3, -8)$, $Q = (5, -1)$, $\vec{v} = (2, 7)$, $m = 7/2$.

Solución 2.5 1) $2x + y = 2$, 2) $x - 2y = 1$.

Solución 2.6 $(-4, 5)$.

Solución 2.7 $y = 3x + 19/3$.

Solución 2.8 $y = -\sqrt{3}x + 1 + 2\sqrt{3}$.

Solución 2.9 1.) $y = 3$. 2.) $x = 2$, 3.) $y = x + 1$, 4.) $y = -x + 5$, 5.) $5x + 2y = 16$.

Solución 2.10 No

Solución 2.11 $x = 3 \pm \sqrt{21}$.

Solución 2.12 $b = -4$.

Solución 2.13 $(7, 8)$

Solución 2.14 $\sqrt{10}/5$.

Solución 2.15 $D = (4, -3)$, lados $\sqrt{13}$ y $\sqrt{45}$, diagonales $x = 4$, $2x + 3y = 11$.

Solución 2.16 Si $\alpha = 2$ se cortan en un punto, si $\alpha \neq 2$ se cortan dos a dos.

Solución 2.17 $3x + 2y - 11 = 0$.

Solución 2.18 $x - 3y = 0$, $5x - 3y + 20 = 0$ y $x = 5$.

3 Valores Absolutos, Ecuaciones e Inecuaciones

Ejercicio 3.1 Hallar los valores de x que verifican las siguientes ecuaciones/inecuaciones:

(a.) $3x - 1 \leq x + 5$	(b.) $\frac{x}{x^2 + 3} > \frac{2}{x^2 + 3}$	(c.) $\frac{x}{x - 1} \geq \frac{2}{x - 1}$
(d.) $\frac{x - 2}{x - 1} < \frac{x + 2}{x + 1}$	(e.) $ 3x + 1 \geq 2 x - 6 $	(f.) $2x - 4 < x - 8$
(g.) $3x^2 < 4x + 1$	(h.) $3x - 5 \geq 8x + 7$	(i.) $2x^2 > 9 - 6x$
(j.) $(x + 2)(x - 3) < 0$	(k.) $x^2 - x \leq 6$	(l.) $(3 - x)(2 + x) > 0$
(m.) $-7 \leq 1 - 2x \leq -1$	(n.) $-1 < 3x - 5 \leq 6$	
(o.) $(2x - 1)(x + 2) > x^2 + x - 6$	(p.) $\frac{x + 4}{-2} \leq \frac{3x - 8}{3}$	(q.) $x^4 - 16 > 0$
(r.) $\frac{(x - 5)^2}{x - 2} < 0$	(s.) $x < x^2 - 12 \leq 4x$	(t.) $\frac{(x - 1)(x + 4)}{2 - x} \leq 0$
(u.) $\frac{(5 - x)(x + 4)}{1 - x} \geq 0$	(v.) $\frac{x^2(x - 1)}{4 - x} < 0$	(w.) $\frac{x + 3}{x - 4} > 1$
(x.) $\frac{3}{2x - 2} \geq \frac{1}{2x + 1}$	(y.) $ x - 2 = 5$	(z.) $ x - 3 = 8$

Ejercicio 3.2 Hallar los valores de x que verifican las siguientes ecuaciones/inecuaciones:

(a.) $ x - 1 x + 2 = 3$	(b.) $\left \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right = x - \frac{1}{5}$	(c.) $ x - 1 x + 1 = 0$
(d.) $ x - 2 \leq \frac{1}{5}$	(e.) $ x - \frac{1}{3} \geq \frac{3}{2}$	(f.) $\left \frac{2x}{11} + \frac{3}{7}\right \leq x - 2$
(g.) $ 2x - 3 > 4$	(h.) $ x - 4 \leq 3$	(i.) $\left \frac{2x}{3} - 1\right < 2$
(j.) $ x - 3 \geq 6$	(k.) $\left \frac{x}{2}\right > 3$	(l.) $ x - 5 > x + 1 $
(m.) $ x - 4 \leq 2 - x$	(n.) $ x - 5 < 2 x $	(o.) $ x^2 - 2x \leq 1$
(p.) $ 3x - 1 < 2x + 5$	(q.) $3 < 2x - 3 < 5$	(r.) $0 < 2x - 1 < 4$
(s.) $ x^2 + 5x + 3 \leq 3$	(t.) $ x^2 + 5x + 3 > 3$	(u.) $\frac{3x - 2}{3} + \frac{x - 3}{2} = \frac{5}{6}$
(v.) $\frac{3}{8} + \frac{2}{2x} = \frac{2}{x_7}$	(w.) $\frac{5}{2x} - \frac{1}{x} = \frac{3}{4}$	(x.) $\frac{1}{4 - x} + \frac{3^2}{6 + x} = 0$
(y.) $\frac{3}{x^2 - 9} - \frac{4}{x - 3} = \frac{-4}{x + 3}$	(z.) $\frac{2}{x^2 + 6x - 7} = \frac{2}{x^2 - 1}$	

Ejercicio 3.3 Hallar el dominio de las siguientes funciones:

(a.) $f(x) = \sqrt{2x}$	(b.) $f(x) = \ln(2x + 1)$	(c.) $f(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 1)}$
(d.) $f(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$	(e.) $f(x) = x - 3 $	(f.) $f(x) = \frac{1 - x^2}{2x + 1}$
(g.) $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$	(h.) $f(x) = \frac{x + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x}$	(i.) $f(x) = \frac{1}{ x - x}$
(j.) $f(x) = x\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$	(k.) $f(x) = \sqrt{x(x^2 - 1)}$	(l.) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$
(m.) $f(x) = \ln\frac{x + 1}{x - 1}$	(n.) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{2^x(x^2 - 1)}$	(o.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$

Solución 3.1 (a.) $(-\infty, 3]$ (b.) $(2, +\infty)$ (c.) $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ (d.) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 (e.) $(-\infty, -13] \cup [2, +\infty)$ (f.) $(-\infty, -4)$ (g.) $(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{2 + \sqrt{7}}{3})$ (h.) $(-\infty, \frac{-12}{5}]$

- (i.) $(-\infty, \frac{-3-3\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}, +\infty)$ (j.) $(-2, 3)$ (k.) $[-2, 3]$ (l.) $(-2, 3)$ (m.) $[1, 4]$
 (n.) $(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}]$ (o.) \mathcal{R} (p.) $[\frac{4}{9}, +\infty)$ (q.) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (r.) $(-\infty, 2)$ (s.) $(4, 6]$
 (t.) $[-4, 1] \cup (2, +\infty)$ (u.) $[-4, 1] \cup [5, +\infty)$ (v.) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (4, +\infty)$ (w.) $(4, +\infty)$
 (x.) $[\frac{-5}{4}, \frac{-1}{2}) \cup (1, +\infty)$ (y.) $x = -3; x = 7$ (z.) $x = -5; x = 11$

- Solución 3.2** (a.) $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}; x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ (b.) $x = \frac{16}{15}$ (c.) $x = -1; x = 1$ (d.) $[\frac{9}{5}, \frac{11}{5}]$
 (e.) $(-\infty, \frac{-7}{6}] \cup [\frac{11}{6}, +\infty)$ (f.) $[\frac{187}{63}, +\infty)$ (g.) $(-\infty, \frac{-1}{2}) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$ (h.) $[1, 7]$ (i.) $(\frac{-3}{2}, \frac{9}{2})$
 (j.) $(-\infty, -3] \cup [9, +\infty)$ (k.) $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$ (l.) $(-\infty, -2)$
 (m.) No existe ningún número real (n.) $(-\infty, -5) \cup (\frac{3}{5}, +\infty)$ (o.) $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$
 (p.) $(\frac{-4}{5}, 6)$ (q.) $(-1, 0) \cup (3, 4)$ (r.) $(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (s.) $[-5, -3] \cup [-2, 0]$
 (t.) $(-\infty, -5) \cup (-3, -2) \cup (0, +\infty)$ (u.) $x = 2$ (v.) $x = \frac{8}{3}$ (w.) $x = 2$ (x.) $x = 9$
 (y.) $x = -10$ (z.) $x = 1; x = 3$

- Solución 3.3** (a.) $[0, +\infty)$ (b.) $(\frac{-1}{2}, +\infty)$ (c.) $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$
 (d.) $(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$ (e.) \mathcal{R} (f.) $\mathcal{R} - \{\frac{-1}{2}\}$ (g.) $(-2, 1) \cup (1, 2)$ (h.) $\mathcal{R} - \{0, 1\}$
 (i.) $(-\infty, 0)$ (j.) $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ (k.) $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ (l.) $[0, \pi]$
 (m.) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (n.) $(-1, +\infty)$ (o.) $(-\infty, 1)$