1) Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, calcula:

a) $z_1 - z_2$
b) $z_1 \cdot z_2$
c) z_1/z_2

2) Calcula:

a) $(1 + i) \cdot (3 - 2i)$
b) $(\sqrt{14} + \sqrt{10}i) \cdot (\sqrt{14} - \sqrt{10}i)$
c) $(4 + 5i)^2$

3) Calcula:

a) $\dfrac{2+i}{2-i}$
b) $\dfrac{6-7i}{i}$
c) $\dfrac{i}{3-2i} + \dfrac{2i}{3+8i}$

4) Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$
b) $x^2 + 4x + 5 = 0$

5) Representa los siguientes números complejos en el plano y exprésalos en forma polar o binómica, según el caso:

a) $3 - 3i$
b) $6i$
c) $3.5_{\frac{\pi}{2}}$
d) $2_{\frac{\pi}{4}}$

6) Dados $z_1 = 2_{\frac{\pi}{3}}$ y $z_2 = 1_{\frac{\pi}{6}}$, obtener:

a) $z_1 \cdot z_2$
b) z_1/z_2
c) z_1^3
d) $\sqrt{z_2}$

7) Se supone que el número de semillas que produce una determinada planta depende linealmente de la temperatura media durante el mes de marzo. Se ha observado que cuando la temperatura media es $T = 15.3°\text{C}$ la planta produce unas 215 semillas, y que cuando aquélla es $T = 17.1°\text{C}$ produce unas 278 semillas. Determina la función que proporciona el número de semillas en función de la temperatura media. ¿Qué número de semillas cabe esperar que produzca la planta un año en que la temperatura media sea de $T = 16.6°\text{C}$?

8) Se sabe que para un gas a presión constante, la relación entre su volumen V (en cm^3) y su temperatura T (en °C) está dada por $V = \alpha + \beta T$ para ciertas constantes α y β positivas. Determina los valores de α y β sabiendo que a 30°C el volumen es de 111 cm^3 y que a 90°C es de 133 cm^3.

9) Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y para niños. Para un determinado medicamento la dosis de adulto recomendada es de 100 mg. Determina (suponiendo que es lineal) una función que proporcione la dosis adecuada para un niño de edad t (en años), sabiendo que la dosis para un recién nacido es de 20 mg y que para un niño de 16 años coincide con la de un adulto.

10) Según la *ley de Monod*, la velocidad de crecimiento R de un organismo depende de la concentración x de determinado nutriente, según la relación

$$R(x) = \frac{ax}{k+x}$$

donde a y k son dos constantes positivas. Determina los valores de a y k sabiendo que la velocidad de crecimiento límite del organismo es $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 3.5$ y que, cuando la concentración del nutriente es $x = 10$, la velocidad de crecimiento es 2.

11) El crecimiento de los peces se puede modelar mediante la función $L(x) = \lambda(1 - e^{-px}),\ x \geq 0$ donde $L(x)$ es la longitud a la edad x y λ y p son dos constantes positivas características de cada especie. Determina los valores de λ y p de una determinada especie sabiendo que la longitud límite es $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 18$ y que a la edad $x = 1$ la longitud de un pez de esa especie es $L = 6$.

12) Se sabe que el número de bacterias en una placa de Petri viene dada por $B(t) = B_0 e^{\lambda t}$ donde t mide el número de horas y B_0 y λ son dos constantes positivas. Si se estima que el número inicial de bacterias es 100 y que transcurridas 24 horas el número es 10000, determina los valores de B_0 y λ.

13) Estudia los intervalos de crecimiento / decrecimiento y de concavidad / convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+1}$

b) $f(x) = x^2 e^x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

d) $f(x) = \ln(x^2-4)$

e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

14) Estudia los máximos y mínimos de las siguientes funciones en sus dominios de definición:

a) $f(x) = x^3\, e^x$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$

c) $f(x) = x^2\, e^{-x}$

15) Estudia los máximos y mínimos de las siguientes funciones en el intervalo que se indica en cada caso:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$ en $[-5, 0]$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$ en $[1/2, 3]$

16) Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando previamente su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento/decrecimiento y de convexidad/concavidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión:

a) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

b) $y = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

c) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

d) $y = \dfrac{x^2-2x-8}{x}$

e) $y = x^2 e^x$

f) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

17) Se supone que una determinada población de peces sigue la siguiente ley:

$$N(t) = \frac{e^{t/a}}{t+1}, \quad t \geq 0,$$

donde $N(t)$ es el número de peces en el instante t (en meses) y a es una constante positiva. Calcula el valor de a sabiendo que pasados 2 meses dicha población es mínima.

18) La población de una determinada especie sigue la siguiente ley:

$$N(t) = \frac{t+8}{t^2+b},$$

donde t se mide en años y b es una constante positiva. Calcula el valor de b sabiendo que el número de individuos de dicha especie es máximo transcurridos 2 años.

19) El número de individuos de una determinada población viene dado por

$$N(t) = \frac{t}{t^2+a},$$

donde t se mide en años, $N(t)$ se mide en millones y a es una constante positiva. Determina el valor de a si el número máximo de individuos es 5 millones.

20) La desintegración del carbono 14, C^{14}, sigue la ley

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t},\ t \geq 0,$$

siendo $W(t)$ la cantidad de C^{14} en el instante t, W_0 la cantidad inicial y $\lambda > 0$ la velocidad de desintegración. Supongamos que $W_0 = 2$ y $\lambda = 0.000121$.

a) Comprueba que W es una función decreciente.

b) ¿Qué le ocurre a la cantidad de C^{14} cuando pasa mucho tiempo?

c) ¿En qué momento, $\hat{t}$, es $W(\hat{t}) = 1$?

21) La velocidad de crecimiento de un cierto organismo depende de la concentración x de un nutriente según la función

$$R(x) = \frac{5x}{1+x}.$$

a) ¿Para qué concentración x la velocidad de crecimiento vale 4?

b) ¿Para qué valores de x la velocidad de crecimiento es creciente? ¿y decreciente?

c) Según esta ley, ¿qué le ocurre a la velocidad de crecimiento cuando hay abundancia de nutrientes?

22) La velocidad de crecimiento de una población se puede expresar como

$$f(N) = N\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^2\right)$$

donde N es el tamaño de la población, K es una constante positiva que indica la capacidad de alojamiento del ecosistema. Calcular para qué tamaño de la población es máxima la velocidad de crecimiento.

23) Los gusanos de yema de abeto son una plaga importante que desfolia los pinos de Canadá. Sus depredadores son los pájaros. Un modelo que da la velocidad de depredación es

$$f(x) = \frac{ax}{k + x^2}$$

siendo x la densidad de gusanos, y a y k dos constantes positivas que dependen de las circunstancias de cada caso. ¿Para qué cantidad de gusanos es máxima la velocidad de depredación?

24) Sea $f(N)$ la cosecha de una explotación agrícola de maíz en función del nivel de nitrógeno en el suelo, N. Una posibilidad viene dada por

$$f(N) = \frac{N}{1 + N^2}.$$

Calcula el nivel de nitrógeno que maximiza la cosecha.

25) Un biólogo de campo desea cercar un campo de estudio rectangular, limitado en uno de sus lados por un río. Dispone para ello de 500 metros de cerca. ¿Qué dimensiones tendrá el campo de estudio de área máxima que puede vallar? (No es necesario cercar el lado que forma la orilla del río).

26) Si el mismo biólogo del ejercicio anterior quisiera cercar una superficie de $8000\,\mathrm{m}^2$, ¿qué dimensiones debería tener el campo para utilizar la mínima cantidad posible de cerca?

27) Calcular la longitud que deben tener los lados de un triángulo isósceles de $24\,\mathrm{cm}$ de perímetro para que el área de dicho triángulo sea máxima.

28) Se ha estudiado que ciertos animales efectúan sus desplazamientos tratando de minimizar su gasto de energía. Para un cierto tipo de peces migratorios que nadan a contracorriente, se tiene la siguiente expresión para la energía necesaria para recorrer una distancia d en función de su velocidad de desplazamiento:

$$E(v) = \frac{dv^3}{v - u}$$

donde u es la velocidad de la corriente y se considera constante. Encontrar el valor de v que hace mínima la energía consumida en el desplazamiento. Esbozar la gráfica de $E(v)$ para $v > u$.

29) La población de cierta especie sigue la siguiente función

$$P(t) = a + \frac{t+1}{e^{t/3}}, \quad t \geq 0$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medida en miles) y t el tiempo (medido en meses).

a) Calcular a sabiendo que inicialmente había 3000 individuos.

b) ¿En qué momento alcanza la población un máximo? ¿Cuánto es el valor de dicho máximo?

c) ¿A qué tiende la población en el futuro?

d) Esbozar la gráfica de la función.

30) Un lago es repoblado con 100000 alevines de cierta especie de peces, con el objeto de restaurar la fauna autóctona. Es conocido que la evolución de una población de dicha especie en tal hábitat viene dada por una función de la forma

$$P(t) = A + (t - 10)e^{-t/40}$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (en miles) en el instante t (medido en meses) y A es una constante.

a) Calcular razonadamente el valor que debe tener la constante A si antes de la repoblación la especie estaba extinguida en el lago.

b) Calcular razonadamente si la población alcanza un valor máximo y en caso positivo, en qué instante lo hace.

c) ¿En algún momento el número de individuos de la población desciende por debajo del número de individuos con que se repobló el lago? Razónese la respuesta.

d) Esbozar la gráfica de la función.

31) Es conocido que, durante una cierta epidemia, el número de personas (medido en miles) que contrajeron la enfermedad viene dado por

$$P(t) = \frac{2}{3e^{-0.8t} + 1}, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo (medido en semanas).

a) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad al principio?

b) ¿Cuántas personas habían contraído la enfermedad al final de la segunda semana?

c) ¿Crece o decrece el número de personas contagiadas?

d) Cuántas personas contraerán en el futuro la enfermedad?

e) Esbozar la gráfica de la función.

32) Determinar los polinomios de Taylor de grado n para las funciones siguientes en $x = 0$. Determinar también la expresión del error.

a) $\operatorname{sen} x$

b) $\cos x$

c) $\ln(1 - x)$

33) Aproximar las funciones siguientes mediante su polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 0$. Determinar la expresión del error.

a) $\operatorname{tg} x$

b) $\operatorname{arc\,tg} x$

34) Aproximar la función logarítmica mediante su polinomio de Taylor de grado 2 en $x = e$. Utilizar este polinomio para calcular de forma aproximada $\ln 4$. Estimar el error cometido.