1. Para cada una de las sucesiones siguientes, contesta a las siguientes cuestiones: (i) ¿Cuál es el valor de x_2?; (ii) ¿Cómo se expresa el término general x_k en función de x_0?; (iii) ¿Qué le ocurre al valor x_k cuando k toma valores muy grandes?

   (a) $x_0 = 6; \quad x_{k+1} = 3\,x_k, \quad k = 0, 1, 2\ldots$

   (b) $x_0 = 0.1; \quad x_{k+1} = 0.1\,x_k, \quad k = 0, 1, 2\ldots$

   (c) $x_0 = 256; \quad x_{k+1} = \dfrac{x_k}{4}, \quad k = 0, 1, 2\ldots$

   (d) $x_0 = 3; \quad x_{k+1} = 2\,x_k + 1, \quad k = 0, 1, 2\ldots$

   (e) $x_0 = 1; \quad x_{k+1} = 0.1\,x_k + 40, \quad k = 0, 1, 2\ldots$

   (f) $x_0 = 32; \quad x_{k+1} = \dfrac{x_k}{5} + 100, \quad k = 0, 1, 2\ldots$

2. Una cepa de bacterias se reproduce asexualmente cada 30 minutos, es decir, cada 30 minutos la célula que forma la bacteria se divide en dos células. Sabemos que inicialmente hay 5 bacterias.

   (a) Escribe un modelo como sucesión recurrente que describa el proceso anterior. Expresa el término general de la sucesión anterior en función del tamaño inicial de la población.

   (b) ¿Cuántas bacterias hay pasadas tres horas? ¿Y cuándo han pasado tres horas y cuarto?

   (c) ¿En qué momento el tamaño de la población supera las 100 bacterias?

   (d) ¿Qué le ocurre al tamaño de la población en el futuro?

3. Estamos estudiando una población de bacterias que se dividen cada 12 minutos y que, al inicio del experimento, se reduce a cuatro bacterias.

   (a) Escribe un modelo como sucesión recurrente que describa el proceso anterior. Expresa el término general de la sucesión anterior en función del tamaño inicial de la población.

   (b) ¿Cuántas bacterias hay pasada 1 hora? ¿Y pasada 1 hora y 15 minutos?

   (c) ¿En qué momento el tamaño de la población supera las 500 bacterias?

   (d) ¿Qué le ocurre al tamaño de la población en el futuro?

4. Una determinada población triplica su tamaño cada cinco meses y está inicialmente compuesta por 72 individuos.

   (a) Escribe un modelo como sucesión recurrente que describa el proceso anterior. Expresa el término general de la sucesión anterior en función del tamaño inicial de la población.

   (b) ¿Cuántos individuos hay pasado 2 años y medio? ¿Y pasados 3 años?

   (c) ¿En qué momento el tamaño de la población supera los 100000 individuos?

   (d) ¿Qué le ocurre al tamaño de la población en el futuro?

5. Se ha observado que el número de ejemplares de una población de aves esta disminuyendo anualmente en un 8 %. Se estima que en el momento inicial el número de ejemplares rondaba los 350.

   (a) Escribe un modelo como sucesión recurrente que describa el proceso anterior. Expresa el término general de la sucesión anterior en función del tamaño inicial de la población.

   (b) ¿Cuántos ejemplares hay pasados cinco años?

   (c) ¿En qué momento el tamaño de la población es inferior a 20 ejemplares?

   (d) ¿Qué le ocurre al tamaño de la población en el futuro?

6. La alteración sustancial del ecosistema de las nutrias ha hecho que cada año la población disminuya un 10 %. Tras un recuento en 2013 se obtuvo que la población de nutrias en ese entorno era de 345.

   (a) Escribe un modelo como sucesión recurrente que describa el proceso anterior. Expresa el término general de la sucesión anterior en función del tamaño inicial de la población.

   (b) ¿Cuántos ejemplares hay pasados cinco años?

   (c) ¿En qué momento el tamaño de la población es inferior a 30 nutrias?

   (d) ¿Qué le ocurre al tamaño de la población en el futuro?

7. El número de ejemplares de una población de peces está disminuyendo un 15 % cada año. Inicialmente el número de ejemplares es aproximadamente 450.

    (a) Escribe un modelo como sucesión recurrente que describa el proceso anterior. Expresa el término general de la sucesión anterior en función del tamaño inicial de la población.

    (b) ¿Cuántos ejemplares hay pasados seis años?

    (c) ¿En qué momento el tamaño de la población es inferior a 100 ejemplares?

    (d) ¿Qué le ocurre al tamaño de la población en el futuro?

8. Una especie de pájaros anida en una isla de hábitat muy desfavorable, ya que la población disminuye un 20 % cada año.

    (a) Escribe un modelo que describa la dinámica de la población anterior. ¿Qué le ocurre al tamaño de la población de pájaros en el futuro?

    (b) Supongamos ahora que hay una colonia de pájaros de la misma especie en el continente y cada año emigran 100 pájaros a nuestra isla. Escribe el nuevo modelo y estudia el comportamiento de la población en el futuro.

9. El uso de un insecticida en una zona de cultivo ha reducido anualmente el tamaño de la población de una determinada especie de abejas en un 14 %.

    (a) Escribe un modelo que describa la dinámica de la población anterior. ¿Qué le ocurre al tamaño de la población de abejas en el futuro?

    (b) Supongamos ahora que se inicia una campaña para evitar la desaparición de las abejas consistente en introducir anualmente unas 10000 abejas en la zona. Escribe la nueva ecuación que modela el tamaño de la población y estudia sus puntos de equilibrio y su estabilidad.

10. La dinámica de una población de insectos (medida en millones) viene dada por el *modelo de Ricker*,

$$x_k = x_{k-1}\, e^{r\left(1-\frac{x_{k-1}}{K}\right)},$$

con parámetro de crecimiento $r = 1.5$ y capacidad de alojamiento $K = 50$ (millones).

    (a) Si $x_0 = 14$, ¿cuál es el valor de x_2?

    (b) Calcula sus puntos de equilibrio y estudia su estabilidad.

    (c) Interpreta biológicamente los resultados.

11. Los Alligator son una especie de cocodrilos que viven en las aguas pantanosas de Florida. Un modelo apropiado para estudiar su dinámica es el *modelo de Ricker*,

$$x_k = x_{k-1}\, e^{r\left(1-\frac{x_{k-1}}{K}\right)},$$

con parámetro de crecimiento $r = 1.1$ y capacidad de alojamiento $K = 230$.

    (a) Si $x_0 = 340$, ¿cuál es el valor de x_3?

    (b) Calcula sus puntos de equilibrio y estudia su estabilidad.

    (c) Interpreta biológicamente los resultados.

12. La dinámica de una población de insectos (medida en miles) viene dada por el *modelo de Ricker*,

$$x_k = x_{k-1}\, e^{r\left(1-\frac{x_{k-1}}{K}\right)},$$

con parámetro de crecimiento $r = 1.6$ y capacidad de alojamiento $K = 30$ (millones).

    (a) Si $x_0 = 21$, ¿cuál es el valor de x_2?

    (b) Calcula sus puntos de equilibrio y estudia su estabilidad.

    (c) Interpreta biológicamente los resultados.

13. La dinámica de una determinada población de aves se modela por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt

$$N_k = \frac{R\, N_{k-1}}{1 + \frac{R-1}{K} N_{k-1}},$$

con constante de crecimiento $R = 1.5$ y capacidad de alojamiento $K = 1500$.

    (a) Si $N_3 = 900$, ¿cuál es el valor de N_5?

    (b) Calcula los puntos de equilibrio del sistema y estudia su estabilidad.

    (c) Interpreta biológicamente los resultados.

14. El tamaño de una población de insectos (medida en millones) se modela por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt

$$N_k = \frac{R\,N_{k-1}}{1 + \dfrac{R-1}{K} N_{k-1}},$$

con constante de crecimiento $R = 3$ y capacidad de alojamiento $K = 120$ (millones).

 (*a*) Si $N_3 = 63$, ¿cuál es el valor de N_5?

 (*b*) Calcula los puntos de equilibrio del sistema y estudia su estabilidad.

 (*c*) Interpreta biológicamente los resultados.

15. El tamaño de una población de mamíferos se modela por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt

$$N_k = \frac{R\,N_{k-1}}{1 + \dfrac{R-1}{K} N_{k-1}},$$

con constante de crecimiento $R = 1.7$ y capacidad de alojamiento $K = 2800$.

 (*a*) Si $N_5 = 2200$, ¿cuál es el valor de N_7?

 (*b*) Calcula los puntos de equilibrio del sistema y estudia su estabilidad.

 (*c*) Interpreta biológicamente los resultados.

16. Para cada una de las siguientes matrices, calcula sus autovalores y calcula un autovector asociado al mayor autovalor:

 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

 b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

 c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

17. Se considera una problación dividida en dos grupos de edad cuya matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix},$$

 (*a*) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz de Leslie.

 (*b*) Calcula el autovalor principal y un autovector asociado.

 (*c*) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula la distribución a largo plazo de las clases de edad.

18. Supongamos que

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad.

 (*a*) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz de Leslie.

 (*b*) Determina los dos autovalores e interpreta biológicamente el autovalor principal.

 (*c*) Calcula un autovector asociado al autovalor principal.

 (*d*) Calcula la distribución de edades estable.

19. Supongamos que

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de Leslie de una población con dos clases de edad.

 (*a*) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz de Leslie.

 (*b*) Determina los dos autovalores e interpreta biológicamente el autovalor principal.

 (*c*) Calcula un autovector asociado al autovalor principal.

 (*d*) Calcula la distribución de edades estable.

20. Se considera una población dividida en tres clases de edad, con periodos vitales de 1 año. Se sabe que, en promedio, cada año nacen 3 individuos por cada uno del 1er. grupo, 7 individuos por cada uno del 2o. grupo y 1.5 por cada uno del 3er. grupo.

 Además, se sabe que el 20 % de los individuos de edad 1 sobrevive hasta la edad 2 y el 40 % de los de edad 2 sobrevive hasta la edad 3.

 (*a*) Escribe la matriz de Leslie correspondiente.

 (*b*) Determina la evolución de esta población durante tres períodos vitales consecutivos, comenzando con sólo 1000 individuos de edad 1.

 (*c*) Si, en un período determinado, se observa que los grupos respectivos son de $(14300, 700, 200)$, ¿cuál sería la distribución por edades de la generación anterior?

(d) Sabiendo que el autovalor principal y un autovector principal de la matriz de Leslie son

$$\lambda_p = 3.4197, \qquad \overrightarrow{U_p} = \begin{pmatrix} 0.9983 \\ 0.0584 \\ 0.0068 \end{pmatrix},$$

calcula el comportamiento en el futuro de la población y la distribución estable de cada clase.

21. Se considera una población dividida en tres clases de edad, con periodos vitales de 1 año. Se sabe que el 20 % de los individuos de edad 1 y el 70 % de los de edad 2 sobreviven hasta el final del siguiente periodo vital. Además, por cada individuo de edad 2 nacen cada año, en promedio, 1.6 crías, mientras que por cada uno de edad 3 nacen 1.7 crías.

    (a) Escribe la matriz de Leslie correspondiente.

    (b) Determina la distribución por edades al cabo de 3 períodos vitales, sabiendo que se parte de una población inicial de 2000 individuos de edad 1, de 800 de edad 2 y de 200 de edad 3.

    (c) En un recuento concreto se observa que hay 1650 individuos de edad 1; 100 de edad 2 y 350 de edad 3. ¿Qué distribución por edades se puede suponer que había en el período anterior?

    (d) Sabiendo que el autovalor principal y un autovector principal de la matriz de Leslie son

$$\lambda_p = 0.7886, \qquad \overrightarrow{U_p} = \begin{pmatrix} 0.9470 \\ 0.2402 \\ 0.2132 \end{pmatrix},$$

    calcula el comportamiento en el futuro de la población y la distribución estable de cada clase edad.

22. Una cierta colonia de focas se ha clasificado en 3 grupos de edad: 1, 2 y 3. Se han observado las siguientes tasas de supervivencia: un 60 % de las focas de edad 1 sobrevive hasta la edad 2, mientras que un 85 % de estas últimas lo hace hasta la edad 3. Ninguna sobrevive más allá de la edad 3. Por otra parte, se ha estimado que las focas de edad 2 tienen una tasa de fecundidad del 80 % (es decir, tienen de media 80 cachorros por cada 100 hembras), mientras que las de edad 3 tienen una tasa del 50 %.

    (a) Escribe la matriz de Leslie asociada a estos datos.

    (b) Partiendo de una población inicial de 100 focas de edad 1, de 60 de edad 2 y de 50 de edad 3, calcula el número de focas de edad 3 que habrá tras 2 períodos de observación.

    (c) En una visita a la colonia se recuentan 110, 51 y 85 focas de edades respectivas 1, 2 y 3. ¿Qué distribución por edades se puede suponer que hubo en el período anterior?

    (d) Sabiendo que el autovalor principal y un autovector principal de la matriz de Leslie son

$$\lambda_p = 0.8778, \qquad \overrightarrow{U_p} = \begin{pmatrix} 0.7245 \\ 0.4952 \\ 0.4795 \end{pmatrix},$$

    calcula el comportamiento en el futuro de la población y la distribución estable de cada clase edad.

23. Para cada una de las siguientes funciones, calcula sus derivadas parciales y evalúalas en el punto $(0,0)$:

    (a) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y+1}\right)$

    (b) $gf(x,y) = \dfrac{3e^{(1+y^2)}}{x-1}$

    (c) $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

    (d) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{-y}{x+1}\right) + x$

    (e) $f(x,y) = x + ye^{-x^2}$

    (f) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 2x + 1}$

24. Para cada uno de los siguientes pares de funciones, *(i)* calcula la matriz jacobiana asociada; *(ii)* calcula los autovalores de la matriz jacobiana en el punto $(0,0)$.

    (a) $\begin{cases} f(x,y) = x\,e^{-y} \\ g(x,y) = e^x + y \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} f(x,y) = e^{(x^2 y)} \\ g(x,y) = e^{(-x+y)} \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} f(x,y) = 2x\operatorname{sen}(y) \\ g(x,y) = -3x^2\,y^2 \end{cases}$

25. Calcula todos los puntos de equilibrio del modelo siguiente y estudia su estabilidad

$$\begin{cases} x_k = 2x_{k-1}(1 - x_{k-1}), \\ y_k = x_{k-1}(1 - y_{k-1}), \end{cases}$$

26. Comprueba que $(0,0)$ es un punto de equilibrio del modelo siguiente, y estudia su estabilidad.
$$\left\{\begin{array}{l} x_k = \dfrac{y_{k-1}}{4(1+x_{k-1}^2)}, \\ y_k = \dfrac{2x_{k-1}}{1+y_{k-1}^2}. \end{array}\right.$$

27. Comprueba que $(0,0)$ es un punto de equilibrio del modelo siguiente, y estudia su estabilidad.
$$\left\{\begin{array}{l} x_k = y_{k-1}, \\ y_k = \dfrac{2y_{k-1}-x_{k-1}}{2+x_{k-1}}. \end{array}\right.$$

28. Encuentra los valores del parámetro a para los cuales $(0,0)$ es un punto de equilibrio localmente estable del modelo
$$\left\{\begin{array}{l} x_k = \dfrac{ay_{k-1}}{1+x_{k-1}^2}, \\ y_k = \dfrac{x_{k-1}}{1+y_{k-1}^2}. \end{array}\right.$$

29. Calcula todos los puntos de equilibrio biológicamente relevantes del siguiente modelo de Nicholson-Bailey y analiza su estabilidad:
$$\left\{\begin{array}{l} x_k = 4x_{k-1}e^{-0.1y_{k-1}}, \\ y_k = x_{k-1}\left(1-e^{-0.1y_{k-1}}\right), \end{array}\right.$$

30. Calcula todos los puntos de equilibrio biológicamente relevantes del siguiente modelo de Nicholson-Bailey y analiza su estabilidad:
$$\left\{\begin{array}{l} x_k = 6x_{k-1}e^{-0.4y_{k-1}}, \\ y_k = 2x_{k-1}\left(1-e^{-0.4y_{k-1}}\right), \end{array}\right.$$

31. Calcula todos los puntos de equilibrio biológicamente relevantes del modelo binomial negativo y analiza su estabilidad:
$$\left\{\begin{array}{l} x_k = 4x_{k-1}\Big(1+\dfrac{0.01y_{k-1}}{2}\Big)^{-2}, \\ \\ y_k = x_{k-1}\left[1-\Big(1+\dfrac{0.01y_{k-1}}{2}\Big)^{-2}\right]. \end{array}\right.$$

32. Calcula todos los puntos de equilibrio biológicamente relevantes del modelo binomial negativo y analiza su estabilidad:
$$\left\{\begin{array}{l} x_k = 4x_{k-1}\Big(1+\dfrac{0.01y_{k-1}}{0.5}\Big)^{-0.5}, \\ \\ y_k = x_{k-1}\left[1-\Big(1+\dfrac{0.01y_{k-1}}{0.5}\Big)^{-0.5}\right], \end{array}\right.$$