Para cada una de las siguientes funciones, comprueba que es solución de la ecuación diferencial que se indica en cada caso:

1) $y = \ln\Big(\dfrac{t^2}{2} + 3\Big); \quad y' = t\, e^{-y}$

2) $y = \dfrac{1}{3e^{-t^2} + 1}; \quad y' = 2ty(1-y)$

3) $y = \dfrac{1 + (t-1)e^t}{t}; \quad y' + \dfrac{1}{t} y = e^t$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

4) $y' = y^2$

5) $y'y = 3$

6) $y' = 2y(t+1)$

7) $yy' + (1+y^2)\,\mathrm{sen}\, t = 0$

8) $(t^2+1)y' + ty = 0$

9) $y' = t\, e^{-y}$

10) $y' = y^2 - y^2 t$

11) $y' = 4y - y^2$

12) $y' = t\ \mathrm{tg}\, y$

Resuelve los siguiente problemas de valores iniciales relativos a ecuaciones diferenciales de variables separables:

13) $ty' = y, \quad y(1) = 1$

14) $y' = -t^2 y^2, \quad y(1) = 3$

15) $yy' = t + 1, \quad y(0) = -1$

16) $y' = 2t(y - y^2), \quad y(0) = 2$

17) $(4 - t^2)y' + t^2 y = 0, \quad y(0) = 3$

18) $y' + t\, y^2 = t, \quad y(0) = 2$

19) $y' = 3y - y^2, \quad y(0) = 1$

20) $y' = y^2 - 3y + 2, \quad y(0) = 3$

21) $(t+1)^2 y' = -y^2, \quad y(0) = 1$

22) $(1-t)yy' = -t, \quad y(0) = 1$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

23) $(1+t^2)y' + 4ty = 1$

24) $y' = 1 + \dfrac{1}{t} y$

25) $y' = 2(t+1) - y$

26) $y' - \dfrac{2}{t} y = t$

27) $y' - 5y = -\dfrac{5}{2} t$

28) $y' + \dfrac{1}{t} y = t^3$

Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales relativos a ecuaciones diferenciales lineales:

29) $y' = 3t - y, \quad y(0) = 1$

30) $y' = t + 2y, \quad y(0) = \dfrac{3}{4}$

31) $y' + \dfrac{1}{t} y = e^t, \quad y(1) = 3$

32) $y' + \dfrac{1}{t(t+1)} y = t + 1, \quad y(2) = 0$

33) $t^2 y' + 2ty = 2t^3, \quad y(1) = 1$

34) $y' = y\, \cos t + \mathrm{sen}\, t\, \cos t, \quad y(\pi) = -1$

35) Una cierta población de bacterias tiene una tasa de crecimiento proporcional al número de individuos de la población. Se sabe que inicialmente había 100 bacterias y que, pasadas dos horas, había 250. Calcular el número de bacterias pasadas 4 horas.

36) En un determinado cultivo de bacterias en un recipiente se sabe que la tasa de crecimiento de la población es directamente proporcional al número de bacterias existentes, duplicándose la población cada 3 horas. Calcular el número de bacterias que habrá al cabo de 11 horas si inicialmente se introducen 2.5 millones de ellas.

37) El Carbono-14 (C_{14}), sustancia radioactiva presente en los restos fósiles, se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente en cada instante. La *vida media* (tiempo que tarda en desintegrarse a la mitad cualquier cantidad inicial) del C_{14} es de 5750 años.

Averiguar la edad de un cierto fósil sabiendo que contiene el 77.7 % de su C_{14} inicial.

38) Un acuario contiene inicialmente 60 ℓ de agua pura. Entra al acuario, a razón de 2 ℓ por minuto, salmuera que contiene 20 g de sal por litro y la solución, perfectamente mezclada, sale a la misma velocidad. Se pide:

a) Encontrar la cantidad de sal que hay en el acuario en cada instante.

b) En este acuario se van a soltar peces que necesitan vivir a una concentración de sal de 15 g por litro. ¿En qué momento se alcanza dicha concentración?

39) Junto a una mina, se encuentra una balsa con un volumen de 8 hm^3 y con 0.8 kg de un líquido contaminante. En la balsa entra una disolución de metales pesados con una concentración de 7 kg/hm^3 y a razón de 2 hm^3 por hora. Suponiendo que la mezcla se hace uniformemente de manera instantánea y sale de la balsa a la misma velocidad, se pide:

a) Deducir razonadamente que la función $y(t)$ que representa la cantidad de metales pesados en el instante t, verifica la siguiente ecuación diferencial

$$y'(t) = \frac{1}{4}(56 - y(t)).$$

b) Hallar la solución general de la e.d.o. anterior.

c) Obtener la cantidad de metales pesados en la balsa en cada instante $t > 0$.

40) En una sala de 16 m^3 de volumen, limpia inicialmente de cualquier contaminante, se enciende un generador eléctrico de gasolina, que produce gases a razón de 4 m^3/h y con una concentración de CO_2 de 14 g/m^3. Suponiendo que la mezcla se hace uniforme instantáneamente y que el aire mezclado sale de la sala a una velocidad de 4 m^3/h, se pide:

a) Deducir razonadamente que la función $y(t)$ que representa la cantidad de CO_2 en la sala en el instante t verifica la siguiente ecuación diferencial

$$y'(t) = \frac{1}{4}(224 - y(t)).$$

b) Obtener la cantidad de CO_2 en la sala en cada instante $t > 0$.

c) ¿Cuándo la concentración será de 10 g/m^3?

41) La dinámica de una determinada población viene descrita por la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y(1 - y)(y - 3),$$

donde $y(t)$ denota el número de individuos (en miles) que hay en el hábitat en el instante t.

a) Determina los puntos de equilibrio de la ecuación anterior y su estabilidad.

b) Interpreta los resultados obtenidos en el apartado anterior en términos de la dinámica de la población.

42) La dinámica de una determinada población viene descrita por la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y\left(2 - \frac{3}{1+y}\right),$$

donde $y(t)$ denota el número de individuos (en miles) que hay en el hábitat en el instante t.

a) Determina los puntos de equilibrio de la ecuación anterior y su estabilidad.

b) Interpreta los resultados obtenidos en el apartado anterior en términos de la dinámica de la población.

43) La dinámica de una determinada población viene descrita por la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y(3 - \ln(y + 1)).$$

a) Determina los puntos de equilibrio de la ecuación anterior y su estabilidad.

b) Interpreta los resultados obtenidos en el apartado anterior en términos de la dinámica de la población.