Apuntes de la asignatura

Matemáticas Generales

Aplicadas a la Bioquímica

Grado en Bioquímica por las Universidades de Sevilla y Málaga
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

Índice

Versión: 18 de octubre de 2019

Tema 1

Revisión de instrumentos básicos

Versión: 18 de octubre de 2019

1.1 El lenguaje básico de las matemáticas

Las matemáticas se expresan mediante un lenguaje propio, que es una extensión del lenguaje común, en nuestro caso el español. La sintaxis es la misma, con la diferencia de que aparecen nuevos símbolos, además de las letras del abecedario. Tales símbolos pueden ser totalmente diferentes de las letras del abecedario: $+$, $\times$, $\geq$, $\rightarrow$, etc., pero también las propias letras: x, t, m, que toman significados diferentes (normalmente, se trata de "variables" o "incógnitas"). Los símbolos pueden representar números o cantidades físicas, pueden formular operaciones o relaciones del tipo "igual a" ó "mayor que".

Símbolos y álgebra pueden ser usados para expresar magnitudes físicas, químicas, etc.. Por ejemplo, E puede representar la energía total de un trozo de materia, m su masa y c la velocidad de la luz. Combinando estos junto con el símbolo matemático para "igual a", Einstein escribió su famosa fórmula,

$$E = mc^2.$$

En lenguaje común, esta ecuación se expresaría como "La energía total de un cuerpo es igual al producto de su masa por el cuadrado de la velocidad de la luz", lo que resulta, además de más largo, mucho más difícil de manejar conceptualmente. De aquí el gran interés en usar el lenguaje matemático cuando se trata de analizar de forma cuantitativa el comportamiento del mundo real.

Habitualmente, el camino se recorre en sentido contrario: Es necesario expresar en términos matemáticos una relación cuantitativa. Por ejemplo, podemos expresar "Juan es treinta centímetros más alto que Roberto" como

$$J = R + 30$$

siendo J la altura de Juan, y R la altura de Roberto, medidas ambas en centímetros. Observemos que al leer esta ecuación, el verbo está representado por el signo $=$. De forma más sofisticada, podemos usar una notación con subíndices:

$$H_J = H_R + 30$$

donde ahora H_J y H_R denotan, respectivamente, las alturas de Juan y Roberto (en cm). Obviamente, es un esfuerzo excesivo el expresar una frase tan sencilla en términos matemáticos. Sin embargo, cuando las relaciones se vuelven más y más complejas, la expresión de relaciones cuantitativas mediante el lenguaje común es enormemente complicada. Esto condujo de forma natural a introducir la notación matemática, mucho más simplificada y compacta. A cambio, es necesario efectuar un esfuerzo de conceptualización para entender correctamente el significado de los diferentes símbolos y relaciones.

1.2 Cantidades físicas, valores numéricos y unidades

Cuando se usan en ciencias aplicadas, los símbolos matemáticos no representan números, sino magnitudes físicas. Cada símbolo representa la combinación de un valor numérico y de una unidad física. No tiene sentido decir que una línea mide 75, sino que mide 75 cm o 75 m. Este hecho tiene varias consecuencias:

- Las ecuaciones que relacionan magnitudes físicas expresan identidades, tanto de los valores numéricos como de las unidades físicas de los dos términos de la igualdad. Por ejemplo, en la ecuación de Einstein

$$E = mc^2,$$

E es una energía, cuya magnitud es ML^2T^{-2} (o sea, masa $\times$ longitud al cuadrado / tiempo al cuadrado), m es una masa, cuya magnitud es M, y c es una velocidad, cuya magnitud es L^2T^{-2}. Esto se expresa por $[E] = ML^2T^{-2}$, $[m] = M$, $[c] = L^2T^{-2}$. Observamos cómo, efectivamente, las unidades de los dos términos de la ecuación (izquierda y derecha) son iguales a ML^2T^{-2}:

$$[E] = [mc^2] = ML^2T^{-2}.$$

Este principio de que los dos términos de la ecuación deben tener las mismas unidades se extiende a la suma y resta: solo se pueden restar o sumar magnitudes físicas con las mismas unidades.

Un ejemplo de relevancia en Bioquímica es la ecuación que describe el número de receptores ocupados en una reacción química en la que unas moléculas de una determinada sustancia, disuelta en el medio celular, se enlazan con grandes moléculas (proteínas, por ejemplo), los "receptores". Si denotamos por N_b el número de receptores ocupados por unidad de masa de tejido circundante, este varía en función de la concentración de la sustancia c, del número total de receptores por unidad de masa de tejido N_T y de la constante de afinidad química para el enlace K_a:

$$N_b = \frac{K_a c N_T}{1 + K_a c}.$$

La magnitud más clara aquí es la de la concentración, $[c] = ML^{-3}$ (o sea, masa/volumen). Para que la suma $1 + K_a c$ tenga sentido, las unidades de 1 y de $K_a c$ deben ser iguales, según hemos comentado más arriba. Por tanto, las unidades de K_a deben ser las inversas de las de c: $[K_a] = M^{-1}L^3$. Las unidades de N_b y N_T son $[N_b] = [N_T] = MM^{-1} = 1$ (Masa/Masa, ya que se trata de la masa de los receptores por unidad de masa del tejido circundante).

- El cambio de unidades implica el cambio de los valores numéricos asociados. Para cambiar las unidades, se usa el principio de que si se multiplican los dos términos de una ecuación por un mismo número la identidad sigue siendo cierta. Esto se aplica a realizar el cambio de unidades, si multiplicamos hábilmente por 1. Por ejemplo,

$$108\,\frac{\text{Km}}{\text{h}} = 108\,\frac{1000\text{m}}{1\text{Km}}\,\frac{1\text{h}}{3600\text{s}}\,\frac{\text{Km}}{\text{h}} = 108\,\frac{1000}{3600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- La representación gráfica de una función donde las variables dependiente e independiente son magnitudes físicas requiere incluir las unidades en que estas variables se expresan. De otro modo sería imposible interpretar la gráfica.

1.3 Números, aritmética y resolución de ecuaciones

Repasamos aquí algunas reglas básicas de las operaciones aritméticas con números, y los tipos de estos.

- **Números enteros, suma y resta.** Los números naturales (0, 1, 2, ...) son los que empleamos para contar, y con ellos podemos sumar sin salirnos de los propios números naturales. Si pretendemos restar, es necesario pasar a los números enteros (..., -2, -1, 0, 1, 2, ...): La diferencia de dos números enteros es siempre un número entero, y no siempre es así con los números naturales.

La solución de ecuaciones de la forma

$$a + x = b,$$

siendo a y b números enteros, siempre es un número entero $x = b - a$.

- **Números racionales, producto y división.** Podemos multiplicar números enteros y el resultado será siempre un número entero. Sin embargo, no siempre el cociente de dos números enteros es un número entero. Esta propiedad sí es cierta, sin embargo, en los números racionales ó fraccionarios: El cociente de dos números racionales siempre es un número racional. Para un científico es de enorme importancia realizar con soltura las cuatro operaciones básicas con números racionales: Suma, resta, producto y cociente.

La solución ecuaciones de la forma

$$a + cx = b,$$

siendo a, b y $c \neq 0$ números racionales, siempre es un número racional, $x = b - \dfrac{a}{c}$. Estas ecuaciones se llaman *lineales*, porque su gráfica es una línea recta.

Esta propiedad también es cierta cuando se trata de varias ecuaciones lineales simultáneas con coeficientes racionales: Por ejemplo, la solución (si existe) (x, y, z) del sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 9 \\ -3x + 2y + 3z &= 8 \\ 7x - 3y + 8z &= -4 \end{aligned}$$

pertenece a los números racionales, según la regla de Cramer.

- **Números reales, completitud.** Podemos representar los números racionales sobre una recta como segmentos (a cada número le asignamos un segmento de origen el cero, cuya longitud es el número). A pesar de existir una infinidad de números racionales entre dos números racionales cualesquiera (por ejemplo, calculando el promedio, repetido sucesivamente), la recta así construida está trufada de “agujeros”. O sea, que hay “muchos” segmentos cuya longitud no es un número racional. Uno de tales agujeros es $\sqrt{2}$, un número del que ya en la Grecia clásica se demostró que no es racional[1].

  Una forma intuitiva de construir los números reales es mediante una representación decimal infinita: $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\ldots$ Este número se puede construir de forma aproximada mediante la sucesión de números $r_1 = 1.4$, $r_2 = 1.41$, $r_3 = 1.414$, $r_4 = 1.4142$, $\ldots$ Se demuestra que esta sucesión *converge* a $\sqrt{2}$, ó que $\sqrt{2}$ es el *límite* de esta sucesión. Esto significa que todos los términos de la sucesión a partir de uno dado están tan cerca de $\sqrt{2}$ como queramos. Se demuestra que la recta así construida es *completa* en el sentido de que no tiene agujeros, o, dicho de otro modo, en el sentido de que el límite de una sucesión de números reales siempre es un número real.

  Los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir, obteniéndose siempre un número real. Por ello, al igual que con los números racionales, la solución ecuaciones de la forma

  $$a + cx = b,$$

  siendo a, b y $c \neq 0$ números reales, siempre es un número real, $x = b - \dfrac{a}{c}$.

  El cálculo diferencial e integral, que son dos de los instrumentos fundamentales de la matemática aplicada, se basan de forma extensiva en el concepto de límite, por lo que el conjunto de números adecuado para construir estos dos tipos de cálculo es el de los reales.

- **Números complejos, solución de ecuaciones polinómicas.** Dentro de los números reales no siempre tienen solución ecuaciones de la forma $a + cx^2 = b$, siendo a, b y c números reales. Por ejemplo, la ecuación

  $$1 + x^2 = 0$$

  no tiene solución, ya que $1 + x^2 \geq 1$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$.

  Podemos, sin embargo, definir la unidad imaginaria i como la solución de esta ecuación $1 + x^2 = 0$. A partir de aquí construimos los números complejos en la forma $a + ib$, siendo a y b números reales cualesquiera.

  Los números complejos se representan en el plano como el par de números reales (a, b). Es una extensión de la representación de los números reales como segmentos en la recta.

  Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Para ello basta considerar que $i^2 = -1$, y que por tanto $i^{-1} = i$. Usando estas propiedades, podemos multiplicar por ejemplo $2 + 3i$ y $5 - 4i$ como sigue:

  $$(2 + 3i)(5 - 4i) = 10 - 12i^2 + 15i - 8i = 22 + 7i,$$

  y también podemos dividir $2 + 3i$ entre $5 - 4i$ racionalizando como sigue:

  $$\frac{2 + 3i}{5 - 4i} = \frac{(2 + 3i)(5 + 4i)}{(5 - 4i)(5 + 4i)} = \frac{-2 + 23i}{36} = -\frac{2}{36} + \frac{23}{36}i.$$

[1] La demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 está atribuida a Hipaso de Metaponto, un discípulo de Pitágoras que nació en torno al año 500 a.C.

La representación de un número complejo como $z = a + ib$, siendo a y b números reales, es llamada *forma binómica* del número. Existe una forma alternativa, llamada *forma polar*. Para construirla, escribimos

$$z = a + ib = r(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}) = r(\operatorname{sen}\alpha + i\,\cos\alpha),$$

donde

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

es el *módulo* de z, también denotado $|z|$ y

$$\alpha = \arctan(b/a)$$

es el *argumento* de z, también denotado $\arg(z)$. El argumento es el ángulo entre la parte positiva del eje OX y el segmento que une el origen con el número z. El argumento no está definido de forma única, ya que todos los ángulos de la forma

$$\arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

poseen el mismo seno y el mismo coseno.

Es acostumbrado representar z como $z = r_\alpha$ (forma polar del número z). Por ejemplo, la forma polar del número 1 es $1 = 1_0 = 1_{2\pi}$, y la de la unidad imaginaria es $i = 1_{\pi/2}$.

El producto y cociente de números complejos en forma polar es muy simple: Si las formas polares de los números complejos z y z' son $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'}$, entonces las formas polares de su producto y su cociente son:

$$zz' = (rr')_{\alpha+\alpha'}, \quad \frac{z}{z'} = (\frac{r}{r'})_{\alpha-\alpha'}.$$

O sea,

$$|zz'| = |z||z'|, \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z'), \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad \arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z').$$

De aquí se puede calcular con comodidad la potencia n-ésima de un número complejo:

$$z^n = r^n_{n\alpha}.$$

También se pueden calcular las n raíces n-simas de un número complejo:

$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{r})_{(\alpha+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Por ejemplo, las raíces cuartas de $-1 = 1_\pi$ son

$$\sqrt[4]{-1} = 1_{\pi/4+k\pi/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Un relevante número complejo asociado a $z = a + ib$ es su *conjugado*: $\bar{z} = a - ib$. Cumple algunas propiedades interesantes:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Además, la forma polar del conjugado viene dada por

$$\bar{z} = r_{-\alpha}.$$

Un gran interés de los numéros complejos es que toda ecuación polinómica (de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0$) tiene exactamente n raíces (contando la multiplicidad) en los números complejos.

Hay, sin embargo, una propiedad de los demás tipos de números (sean naturales, enteros, racionales o reales) que no poseen los números complejos: La ordenación. No se puede decidir de forma coherente cuál es el mayor de dos números complejos distintos.

En general, si estamos interesados en resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ (algo que ocurre con cierta frecuencia en las ciencias aplicadas y también en bioquímica) será necesario utilizar números complejos, aunque en muchas situaciones podemos usar solamente números reales.

1.4 Errores. Truncamiento y redondeo. Sistemas de numeración

Podemos efectuar cálculos teóricos con números reales y complejos, pero en los cálculos efectivos únicamente se usan números racionales. De este modo se introducen errores, que es necesario reconocer y limitar en la medida de lo posible.

Un error habitual es el de *truncamiento*: Los dos números $a = 3.3456$ y $b = 3.3412$ resultan ser $c = 3.34$ si los truncamos a la segunda cifra decimal. Los errores cometidos son $a - c = 0.0056$ y $b - c = 0.0012$. Sin embargo, si aproximamos a por $d = 3.35$, el error cometido es $a - d = -0.0044$, que es menor (en valor absoluto) que $a - c$. Por tanto, aproximar a por d resulta una mejor aproximación que aproximarlo por c. Esto sugiere la técnica de aproximación llamada "redondeo": La última cifra decimal retenida se deja igual si la primera cifra despreciada es menor o igual que 5, y por la siguiente si la primera cifra despreciada es mayor que 5.

La necesidad de redondeo ocurre en particular con el manejo de números por los ordenadores, que debido a su capacidad limitada trabajan solamente con un número finito de cifras decimales.

Los ordenadores, sin embargo, almacenan la información en sistema binario. Recordemos que en sistema decimal la expresión 123 representa al número $3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$, donde utilizamos las sucesivas potencias de 10. En sistema binario únicamente se usan las sucesivas potencias de 2 para representar un número. Por ejemplo, el número 123 en base 2 se representará por 1111011, ya que

$$123 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 = 1 + 2 + 8 + 16 + 32 + 64.$$

El ordenador almacena solamente ceros y unos.

Las cifras de la representación binaria (resp., decimal) de un número se obtienen dividiendo sucesivamente por 2 (resp., por 10) y reteniendo los restos, que se escriben en orden inverso para construir la representación. Por ello, solo aparecen ceros y unos (resp., los 10 dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9). El valor de cada cifra en la representación depende de la posición que ocupa, ya que la última cifra se multiplica por 1, la penúltima por 2 (resp., por 10), la antepenúltima por $2^2 = 4$ (resp., por $10^2 = 100$), etc.

Análogamente, para representar un número menor que 1 en sistema binario, es necesario multiplicarlo sucesivamente por 2 y retener las cifras a a izquierda de la coma (que serán solamente ceros o unos). Si una de estas cifras es un 1, se resta y retiene el resto para continuar el proceso. Por ejemplo, para escribir 0.8125 en sistema binario, consideramos que

$$\begin{aligned}
0.8125 \times 2 &= 1.625 &&: \text{restamos 1 y lo retenemos}\\
0.625 \times 2 &= 1.25 &&: \text{restamos 1 y lo retenemos}\\
0.25 \times 2 &= 0.5 &&: \text{retenemos el cero}\\
0.5 \times 2 &= 1 &&: \text{retenemos el 1 y terminamos}
\end{aligned}$$

De este modo, en sistema binario, 0.8125 se representa por 0.1101, lo que significa que

$$0.8125 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

Este proceso puede no tener fin, en el sentido de que la representación binaria (o decimal) de un número puede tener infinitas cifras no nulas. Más aún, puede ocurrir que la representación decimal contenga un número finito de cifras y la binaria un número infinito (pero no al revés, ya que 10 es divisible por 2). Por ejemplo, la representación binaria de $1/5 = 0.2$ es 0.000101000101000101000101.... (formada por la concatenación indefinida del grupo "000101").

Otros sistemas de numeración de cierta relevancia por sus conexiones con el código genético son el cuaternario (con base 4, utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3), el octodecimal (con base 8, utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) y el hexadecimal (con base 16, utiliza 16 dígitos, para lo que son necesarios símbolos especiales a partir del 9).

Recordemos que el valor de cada dígito en la representación de un número depende de la posición que ocupa. Es una situación análoga a la descripción del ADN mediante las letras A, T,C y G, que corresponden a las bases nitrogenadas Adenina, Tiamina, Citosina y Guanina, respectivamente. La disposición secuencial de estas cuatro bases a lo largo de la cadena es la que codifica la información genética: por ejemplo, una secuencia de ADN puede ser ATGCTAGATCGC. En este sentido, cada cadena de ADN se corresponde con un único número en sistema cuaternario.

1.5 Resolución de ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, en la que alguna de las cantidades no es conocida. Las cantidades desconocidas se llaman *incógnitas*. Cada una de las dos expresiones que se igualan se llama *miembro*. Una ecuación proporciona información sobre la o las incógnitas. Resolver la ecuación es calcular la incógnita en función de cantidades conocidas, de forma que se satisfaga la ecuación si la incógnita se reemplaza por el valor calculado. Si se trata de varias ecuaciones que deben satisfacerse al mismo tiempo, el conjunto de todas ellas se llama *sistema de ecuaciones*. Resolver el sistema de ecuaciones es calcular las incógnitas en función de cantidades conocidas, de forma que se satisfaga cada ecuación del sistema si las incógnitas se reemplazan por los valores calculados. La solución de una ecuación (o sistema de ecuaciones) puede no existir, puede existir solo una, o varias, o una infinidad. Por ejemplo,

$$3x - 2 = 7$$

es una ecuación lineal, siendo x la incógnita. Su solución es $x = 3$, ya que $3 \times 3 - 2 = 7$. También

$$x^2 - x - 6 = 0$$

es una ecuación cuadrática ó de segundo orden, que admite dos soluciones, $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$. La ecuación $x-y = 1$ admite una infinidad de soluciones, en la forma $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, $y = x-1$. Por ejemplo, $x = 0, y = -1$ son soluciones, pero también $x = 1, y = 0$ ó $x = 1000, y = 999$, etc.

El sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 3y & = & 3, \\ -x + 2y & = & -2, \end{array} \right.$$

es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (x e y) que admite solución única, $x = 0$, $y = -1$.

En una ecuación intervienen *expresiones*, que son combinaciones de símbolos, por ejemplo $1 + 4$, $2x - 3az$ ó $(x + 2)(x - 3)$. Cada una de las partes de una expresión es una sub-expresión. Por ejemplo, $2x$ y $3az$ son subexpresiones de la expresión $2x - 3az$. Si dos o más subexpresiones se suman, cada una de ellas se denomina *término* ó *sumando*. Si dos o más subexpresiones se multiplican, cada una de ellas se llama *factor*. Por ejemplo, en la expresión $(x + 2)(x - 3)$, $x + 2$ y $x - 3$ son factores.

Las reglas de la aritmética se usan para expandir o simplificar expresiones que aparecen en las ecuaciones. Por ejemplo,

- La propiedad distributiva del producto respecto de la suma permite expandir el producto $(x + 2)(x - 3)$ como
$$(x + 2)(x - 3) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6.$$
- Reduciendo a factor común, podemos simplifica la expresión $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ como sigue:
$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}.$$
- Calculando las raíces de los polinomios, podemos simplificar la expresión $\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+3x^2+2x}$:
$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3);$$
$$x^3 + 3x^2 + 2x = x(x + 1)(x + 2);$$
de donde si $x \neq 0, -1, 2$,
$$\frac{x^2+5x+6}{x^3+3x^2+2x} = \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{(x+3)}{x(x+1)} = \frac{x+3}{x^2+x},$$
Observemos que si $x = -2$ la expresión inicial no está definida, pero sí la final.

1.5.1 Manipulaciones básicas con ecuaciones

Para resolver una ecuación o sistema de ecuaciones usualmente se efectúan una serie de manipulaciones que transforman los términos de la ecuación, pero mantienen la identidad. El objetivo es aislar la incógnita (o las incógnitas), igualándola a una expresión conocida. Estas manipulaciones deben respetar las leyes de la aritmética. Las más básicas son las siguientes:

- Sumar la misma cantidad a los dos miembros de la ecuación. Para resolver
$$3x - 1 = 5, \tag{1.1}$$
sumamos 1 a los dos miembros de la ecuación, obteniendo
$$3x = 6.$$

- Multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por el mismo número, *si este no es nulo*. Para resolver la ecuación anterior, dividimos los dos miembros de la ecuación por 3, obteniendo
$$3x/3 = 6/3 \quad \Rightarrow x = 2.$$

- Elevar los dos miembros de la ecuación a un mismo número. Esta manipulación puede introducir soluciones falsas cuando se eleva a potencias mayores que 1, si no se consideran los signos. Por ejemplo, si elevamos los dos miembros de la "ecuación"
$$x = 1$$
al cuadrado, obtenemos
$$x^2 = 1,$$
que admite la solución $x = 1$, pero también la solución $x = -1$. Hay, pues, que eliminar las soluciones falsas. Por otra parte, se pueden eliminar soluciones verdaderas si se eleva a potencias menores que uno, si no se considera la multiplicidad de los radicales. Por ejemplo, podemos sacar la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuación
$$(x-1)^2 = 4,$$
obteniendo
$$x - 1 = \sqrt{4}.$$
Si consideramos que $\sqrt{4} = 2$, obtenemos la solución $x = 3$. Pero también puede ser $\sqrt{4} = -2$ lo que proporciona la solución $x = -1$.

Usando estas tres reglas, podemos por ejemplo resolver la clásica ecuación de segundo grado. Consideremos el ejemplo
$$4x^2 - 2x + 8 = 9. \tag{1.2}$$
En primer lugar, por reducirnos a un problema canónico, restamos 9 a los dos miembros de la ecuación, obteniendo
$$4x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{1.3}$$
A continuación, buscamos un cuadrado perfecto de la forma $(ax+b)^2$ que englobe los téminos en x^2 y en x. Para ello, consideramos que
$$(ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2,$$
e igualamos $a^2x^2 = 4x^2$, $2abx = -2x$. La primera igualdad se cumple si $a = \sqrt{4} = 2$, y la segunda si $b = \dfrac{-1}{a} = \dfrac{-1}{2}$. Para obtener el cuadrado perfecto en la ecuación (1.3) sumamos $b^2 = \dfrac{1}{4}$ a los dos miembros:
$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}, \quad \text{o sea,} \quad (2x - \frac{1}{2})^2 - 1 = \frac{1}{4}.$$
En segundo lugar dejamos el cuadrado perfecto en el miembro de la izquierda, sumando 1 a los dos miembros:
$$(2x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

En tercer lugar sacamos la raíz cuadrada de los dos términos de la ecuación:

$$2x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{5/4}.$$

Por último, despejamos x sumando $\frac{1}{2}$ y dividiendo por 2 los dos miembros de la ecuación:

$$x = x_{\pm} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{5/4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}. \tag{1.4}$$

1.5.2 Sistemas lineales

La resolución de sistemas lineales es de especial utilidad en ciencias aplicadas, ya que por una parte se dan con mucha frecuencia en la práctica para determinar el funcionamiento de diversos procesos y sistemas, y por otra se saben resolver bien. Esto hace que la resolución de sistemas de ecuaciones más complejos se reduzcan por diversos procedimientos a la resolución de sistemas lineales.

Existen diversas técnicas de resolución de sistemas lineales. Si son de talla pequeña se puede abordar su resolución a mano. Sin embargo, para sistemas de mediana y gran talla (el número de ecuaciones) es preferible el uso del ordenador. Es posible la resolución simbólica de sistemas de talla mediana en ordenador (hasta una decena de ecuaciones), que sin embargo resulta inabordable en cuanto la talla supera la decena. Por ello, en estos casos se usa la resolución numérica, que permite resolver sistemas de talla muy grande (varios millones de ecuaciones), aunque es necesario resolver cada sistema con valores numéricos concretos de forma aislada.

Como hemos comentado más arriba, un sistema lineal puede o no tener solución (si la tiene, se dice que es *compatible*, y si no, *incompatible*). De tener solución, esta puede ser única (se dice que el sistema es *determinado*), o puede haber infinitas soluciones (se dice que el sistema es *indeterminado*).

Habitualmente, se escriben los sistemas lineales en notación compacta, en la forma

$$AX = B, \tag{1.5}$$

donde A es la matriz del sistema, X es un vector columna (la incógnita) y B es otro vector columna (el dato). Por ejemplo, para el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z &=& 14, \\ x - y + z &=& 2, \\ 3x + 2y + z &=& 10. \end{array} \right. \tag{1.6}$$

la matriz A y los vectores X y B vienen dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Resumimos a continuación la Teoría de Rouché-Frobenius (data de 1875) sobre la existencia y unicidad de soluciones de sistemas lineales. Se llama *menor* de orden r de la matriz A al determinante de cualquier sub-matriz cuadrada de orden r (con número de filas y de columnas igual a r). Se define el *rango* de la matriz A como el orden del mayor menor de A no nulo.

El sistema lineal (1.5) es compatible (o sea, admite solución) si el rango de la matriz A coincide con el rango de la *matriz ampliada*, $M = [A|B]$. Esto garantiza que todas las ecuaciones se pueden satisfacer a la vez, o dicho de otro modo, que no son incompatibles entre sí. Además, la solución será única (o sea, el sistema será determinado) si este rango coincide con el número de incógnitas. Esto garantiza que todas las incógnitas se pueden despejar de forma única en función de los datos. En caso contrario, existirá una infinidad de soluciones, que se obtienen despejando las incógnitas correspondientes a la mayor sub-matriz con determinante no nulo, en función de las demás.

En el caso del sistema lineal cuadrado (1.7) hay solución única si la matriz A tiene determinante no nulo, ya que entonces el rango de A y de la matriz ampliada son iguales a 3, y además este número coincide con el número de incógnitas.

Para efectuar la resolución a mano de un sistema lineal existen diversas técnicas. Según el Teorema de Rouché-Frobenius, si el sistema es compatible lo que es necesario resolver de forma efectiva para calcular la solución (o las soluciones) es un sistema cuadrado. Existen fórmulas cerradas para resolver sistemas cuadrados. Sin embargo, son difíciles de recordar, por lo que es preferible el uso de otras técnicas más sencillas e intuitivas. Recordemos aquí la técnica de Gauss o de eliminación. La idea es reducir por etapas el sistema a otro en que cada incógnita se exprese en función de las anteriores, hasta que solo quede una ecuación con una incógnita. Calculada esta incógnita, se calculan sucesivamente las demás. Por ejemplo, en el sistema (1.6),

- Comenzamos eliminando la incógnita x en la segunda y tercera ecuaciones. Para ello a la segunda ecuación le restamos la primera, y a la tercera le restamos la primera multiplicada por 3. Esto reduce el sistema a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 14, \\ -3y-2z &=& -12, \\ -4y-8z &=& -32. \end{array}\right. \tag{1.8}$$

- Nos centramos ahora en la resolución del sub-sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3y-2z &=& -12, \\ -4y-8z &=& -32, \end{array}\right. \tag{1.9}$$

  que tiene solo dos ecuaciones con dos incógnitas. Eliminamos la variable y en la tercera ecuación restando a esta ecuación la segunda multiplicada por $-4/3$. Esto reduce la última ecuación del sub-sistema (1.9) a

$$-\frac{16}{3}z=-16. \tag{1.10}$$

- El sistema de partida ha quedado reducido al sistema triangular

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 14, \\ -3y-2z &=& -12, \\ -\dfrac{16}{3}z &=& -16. \end{array}\right. \tag{1.11}$$

  Resolvemos este sistema como sigue: La última ecuación proporciona $z=3$. Sustituímos este valor en la segunda ecuación y obtenemos $y=2$, y por último sustituímos estos dos valores en la primera ecuación para obtener $x=1$.

Observemos que la matriz C del sistema reducido (1.9) es *triangular superior*,

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -16/3 \end{bmatrix},$$

con lo que su determinante es trivialmente el producto de los elementos diagonales. Si alguno de estos elementos diagonales fuera cero, el sistema sería bien incompatible, bien compatible indeterminado, ya que la matriz sería singular. Esta información se obtiene de forma automática aplicando el método de Gauss.

1.6 Resolución de inecuaciones

Otro de los problemas que se presentan con frecuencia en las ciencias aplicadas es el obtener valores de ciertas variables que satisfacen no ya una igualdad, sino una desigualdad. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se pretende mantener las variables dentro de rangos admisibles (estos valores pueden ser concentraciones, temperaturas, precios,...). Podemos pedir, por ejemplo, en lugar de la ecuación (1.1), la inecuación

$$3x-1\le 5 \tag{1.12}$$

O, en lugar de (1.2),

$$4x^2-2x+8>9. \tag{1.13}$$

Es frecuente encontrar inecuaciones en que aparezca el valor absoluto de alguna expresión. Recordemos que el valor absoluto de un número se define por

$$|x|=\max\{-x,x\}.$$

La solución de una inecuación, en general, no es uno o varios valores aislados de la incógnita, sino un conjunto completo, frecuentemente determinado por una o varias desigualdades. Puede ser, sin embargo, que una inecuación (o un sistema de inecuaciones) no posea solución. Para resolver inecuaciones, es necesario seguir estrategias que transformen la inecuación en inecuaciones equivalentes, con el propósito de dejar aislada la (o las) incógnitas. Para ello, usamos una extensión de las reglas que hemos introducido para resolver ecuaciones:

- Sumar la misma cantidad a los dos miembros de la ecuación mantiene la desigualdad. Para resolver (1.12) sumamos 1 a los dos miembros de la ecuación, obteniendo

$$3x \le 6. \tag{1.14}$$

- Multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por el mismo número, *si este es positivo* mantiene la desigualdad. Para resolver la ecuación anterior, dividimos los dos miembros de la ecuación por 3, obteniendo la solución de (1.12):

$$x \le 2.$$

  En cambio, multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por el mismo número, *si este es negativo* cambia el sentido de la desigualdad. Por ejemplo, si queremos resolver

$$-3x \le 6,$$

  dividimos los dos miembros de la inecuación por -3, obteniendo

$$x \ge -2.$$

- Elevar los dos miembros de la inecuación al cuadrado mantiene la desigualdad, **solo si ambos miembros son positivos**.

- Para extraer raíces cuadradas, el uso del valor absoluto puede resultar de utilidad. Por ejemplo, podemos sacar la raíz cuadrada de los dos miembros de la inecuación

$$(x-1)^2 \le 4, \tag{1.15}$$

  obteniendo

$$|x-1| \le \sqrt{4},$$

  lo cual se reescribe como

$$-2 \le x-1 \le 2.$$

  Sumando 1 ahora a cada término de la cadena de desigualdades, obtenemos la solución de la inecuación (1.15):

$$-1 \le x \le 3.$$

Para ejercitar estas reglas, podemos resolver la inecuación (1.13). En primer lugar, transformamos la inecuación a forma homogénea restando 9 a cada miembro:

$$4x^2 - 2x - 1 > 0. \tag{1.16}$$

Como hemos obtenido las raíces x_- y x_+ del polinomio $4x^2 - 2x - 1$ en (1.4), tenemos el polinomio factorizado como

$$4x^2 - 2x - 1 = 4(x - x_-)(x - x_+).$$

Por tanto, dividiendo por 4, la inecuación (1.16) se transforma en

$$(x - x_-)(x - x_+) > 0.$$

Para que el producto de dos números sea positivo, ambos números deben ser bien positivos, bien negativos a la vez. Por tanto, la solución de nuestra inecuación es el conjunto de los números $x \in \mathbb{R}$ que satisface

$$\text{O bien} \quad x - x_- > 0, \text{ y } x - x_+ > 0, \quad \text{o bien} \quad x - x_- < 0, \text{ y } x - x_+ < 0.$$

O sea,

$$\text{O bien} \quad x > x_-, \text{ y } x > x_+, \quad \text{o bien} \quad x < x_-, \text{ y } x < x_+.$$

Pero como $x_- < x_+$, las desigualdades anteriores proporcionan la solución de la inecuación (1.16):

$$\text{O bien} \quad x > x_+, \quad \text{o bien} \quad x < x_-.$$

1.7 Funciones polinómicas

Pasamos a continuación al repaso de las funciones más sencillas, que aparecen frecuentemente en aplicaciones de las matemáticas y, especialmente, en Bioquímica. Nuestro objetivo será conocer la definición y las propiedades básicas de las funciones consideradas. Estudiaremos especialmente los ceros, el crecimiento y decrecimiento, las posibles sigularidades y el comportamiento en el infinito. Estudiaremos también algunos aspectos de la representación gráfica de funciones: Su interpretación, y cómo usarla para resolver ecuaciones e inecuaciones.

Recordemos en primer lugar que una función es una regla que transforma números reales en números reales (también se habla de funciones de variable compleja, que no consideraremos aquí). Puede estar definida en todo o en parte de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$

está definida en todo $\mathbb{R}$, mientras que la función

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

está definida en todo $\mathbb{R}$, excepto en $x = -1$ y en $x = 1$, que son los puntos donde se anula el denominador. Se llama *dominio* de la función al conjunto de puntos en que está definida. El dominio de f es todo $\mathbb{R}$, mientras que el dominio de g es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

La funciones más sencillas de calcular son las que se construyen usando sumas y productos. Estas son las funciones polinómicas, que por esta simplicidad aparecen con frecuencia en aplicaciones de las matemáticas, y además se usan para aproximar funciones más complejas. La estructura de una función polinómica es

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los *coeficientes* $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1$ y a_0 son números reales dados. Es importante conocer el comportamiento de las funciones polinómicas de grado bajo, así como sus gráficas. Esto ayuda a utilizarlas de forma práctica con soltura. El caso más sencillo (aparte de las funciones constantes) son las funciones polinómicas de grado 1, o *lineales*. Se llaman así porque su gráfica es una línea recta. Su estructura es

$$f(x) = a_1 x + a_0.$$

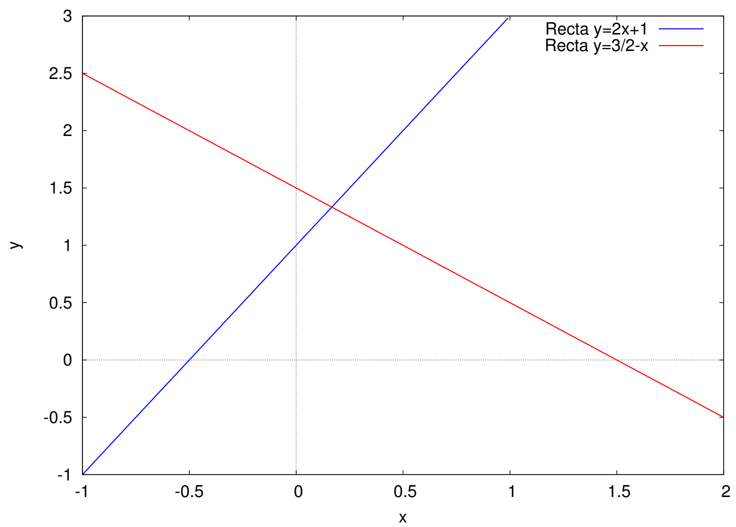


Figura 1.1: Gráficas de rectas

Los coeficientes a_1 y a_0 pueden ser interpretados geométricamente en la gráfica de la función: a_0 es la altura del corte con el eje OY (O sea, $f(0)$), y a_1 es la pendiente de la recta. La pendiente se puede calcular conociendo dos puntos de la recta:

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Un par de puntos notables para ello son los cortes con los ejes coordenados (correspondientes a $a = 0$, $f(b) = 0$): $(0, f(0))$ y $(b, 0)$. En este caso,

$$a_1 = \frac{-f(0)}{b},$$

con lo que la ecuación de la recta es

$$f(x) = -\frac{f(0)}{b}\,x + f(0).$$

En la Figura 1.1 se representa una recta con pendiente positiva y otra con pendiente negativa. Una recta corta al eje OX en un único punto $x = -\dfrac{a_0}{a_1}$ si su pendiente es no nula. Se dice que tiene un único *cero*.

La función polinómica de segundo grado

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{con} \quad a_2 \neq 0$$

se representa gráficamente como una parábola. Buscando un cuadrado perfecto, escribimos

$$f(x) = a_2(x-\alpha)^2 + \beta, \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{a_1}{2a_2}, \quad \beta = a_0 - \frac{a_2a_1^2}{4a_2^2}.$$

De aquí deducimos que la gráfica de la curva es simétrica respecto al punto $x = \alpha$ (O sea, que $f(\alpha - t) = f(\alpha + t)$, para cualquier número real t).

Deducimos además que si $a_2 > 0$ la curva alcanza su mínimo en $x = \alpha$:

$$f(\alpha) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además, en este caso los valores de f aumentan indefinidamente si x aumenta indefinidamente. Se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

También tenemos, debido a la simetría de la función,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Si $a_2 < 0$, el punto $x = \alpha$ es un máximo:

$$f(\alpha) \geq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

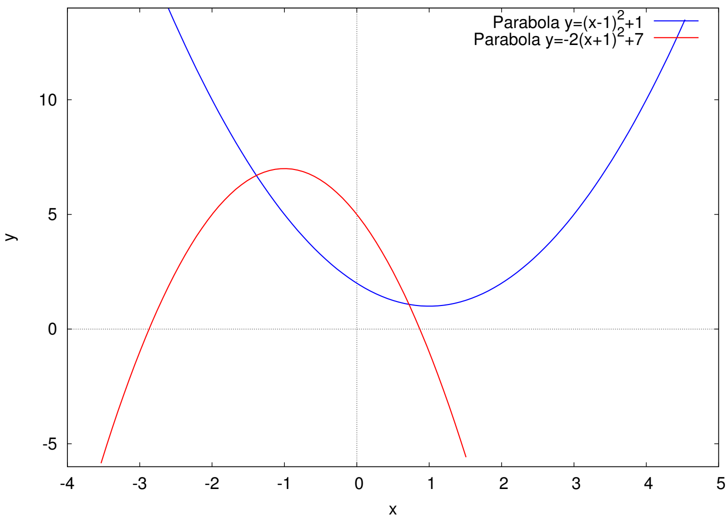


Figura 1.2: Gráficas de parábolas

Por otra parte, si $a_2 < 0$, los valores de f disminuyen indefinidamente si x aumenta indefinidamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Podemos ver estas propiedades en la Figura 1.2 en que hemos representado los dos tipos de parábolas.

Una función polinómica de grado dos puede no anularse nunca (es el caso de la curva azul en la Figura 1.2). Sin embargo, si se anula necesariamente tiene dos ceros (caso de la curva roja). Ello ocurre porque si un polinomio tiene un cero complejo, entonces el conjugado de este también es cero del polinomio. En efecto, supongamos factorizado el polinomio como

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

donde $a_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ son las raíces de f. Entonces, tomando conjugados,

$$f(x) = \overline{f(x)} = a_n(x - \overline{x_1})(x - \overline{x_2})\cdots(x - \overline{x_n}).$$

Por tanto las raíces de f son $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}$.

Esta propiedad puede usarse también para clasificar las funciones polinómicas de grado 3, ó *cúbicas*: Deben tener al menos un cero real, ya que de tener todos los ceros complejos, estos serían al menos 4 (cada cero y su conjugado). Entonces, o bien tienen exactamente un cero real, o bien tienen 3. En el primer caso admiten la factorización

$$f(x) = a_3(x - x_1)P_2(x);$$

donde x_1 es el cero real, y P_2 es un polinomio de grado 2 con dos ceros complejos conjugados, y en el segundo, admiten la factorización

$$f(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

donde x_1, x_2 y x_3 son los ceros reales de f. En la Figura 1.3 hemos representado una curva de cada una de estas clases. Podemos ver cómo ambas tienden a infinito (con el signo dado por a_3 y por x) cuando x tiende a infinito.

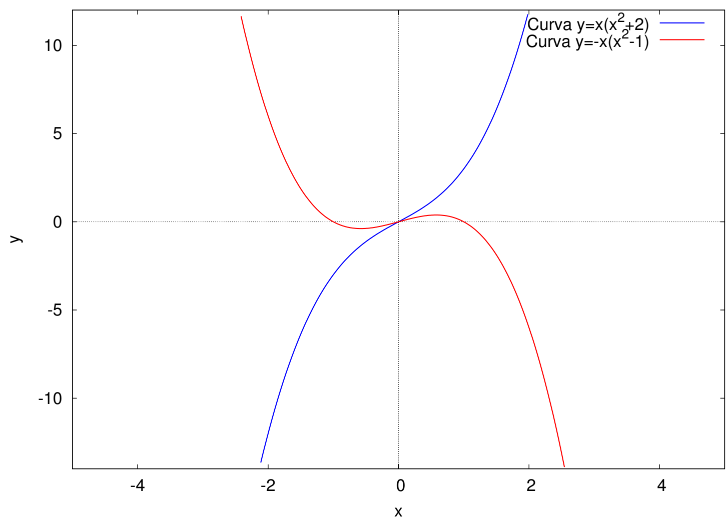


Figura 1.3: Gráficas de funciones polinómicas de tercer grado

En general, el comportamiento de una función polinómica viene determinado conociendo sus ceros. Si conocemos todos los ceros $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de $f(x)$, esta se factoriza por

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Esto permite determinar el signo de $f(x)$ y su comportamiento en el infinito. Si, por ejemplo, $a_n > 0$, entonces $f(x) > 0$ si $x > x_n$, $f(x) < 0$ si $x_{n-1} < x < x_n$, etc: f mantiene signo constante entre dos raíces, y el signo va cambiando alternativamente al incrementarse (o decrementarse) x. Por otra parte, si $a_n > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

si n es par, y

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

si n es impar. Si $a_n < 0$, entonces todos los signos se cambian por los opuestos.

1.8 Funciones racionales

Las funciones racionales son cocientes de funciones polinómicas. Se construyen, pues, añadiendo la división a la suma y el producto como operaciones para construir funciones. La estructura general de una función racional es

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. El comportamiento de una función racional viene marcado por los ceros de p y q, y por los grados de estos:

- **Dominio:** En general, el dominio de una función racional no es todo $\mathbb{R}$, ya que no está definida en los puntos en que se anula el denominador. Sin embargo, puede ser que numerador y denominador se anulen en un mismo punto. Para evitar esta ambigüedad, hay que factorizar p y q eliminando los factores correspondientes a ceros comunes. Por ejemplo, si

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad q(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x,$$

factorizamos

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3), \quad q(x) = x(x-1)(x-2)^2.$$

El dominio de f es entonces $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. La Figura 1.4 representa esta función, donde podemos observar su comportamiento general.

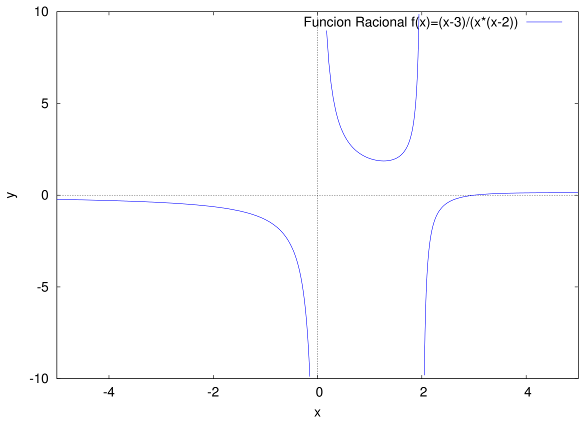


Figura 1.4: Función racional

- **Ceros:** En principio, los ceros de f son los de su numerador p, aunque hay que considerar la posibilidad de que el denominador q se anule a su vez en algún cero de p. Una vez factorizados p y q, los ceros de f son los de p. En el ejemplo anterior, el único cero de f es $x = 3$.

- **Asíntotas verticales.** En los ceros del denominador, f no está definida. Sin embargo, sí lo está en puntos arbitrariamente cercanos. Una vez simplificada f, en el entorno de un cero de q, el numerador p toma valores no nulos, por lo que $f(x)$ va a hacerse cada vez mayor (en valor absoluto) cuando x se acerque al cero. El signo de f dependerá de los signos de p y q, pero será constante entre dos ceros consecutivos de p y q. En definitiva, si a es un cero de q, y nos acercamos por la derecha a a, tenemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty,$$

donde el signo $+$ ó $-$ dependerá de los signos de p y q a la derecha de a. Igualmente, si nos acercamos por la izquierda a a, tenemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty,$$

donde ahora el signo de ∞ es el opuesto al límite anterior, ya que f a la izquierda de a tiene el signo opuesto que a la derecha.

En el ejemplo anterior, los ceros del denominador (una vez simplificada f) son $x = 0$ y $x = 2$. Vemos que $f(x) < 0$ si $2 < x < 3$. Por tanto,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty,$$

y entonces

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty.$$

- **Comportamiento en el infinito.** En el infinito, tanto p como q crecen indefinidamente, pero el comportamiento preponderante es del que tenga mayor crecimiento, que viene dado por su grado. Para determinar el límite, lo más fácil es aplicar la regla que dice que el límite en el infinito($+$ o $-$) de un cociente de dos polinomios coincide con el límite del cociente de sus términos dominantes respectivos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^4-5x^3+8x^2-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si tuviéramos la fracción inversa:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-5x^3+8x^2-4x}{x^3-6x^2+11x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1} = +\infty$$

Si numerador y denominador tuvieran el mismo grado, obtendríamos un límite finito. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+x^3-6x^2+11x-6}{x^4-5x^3+8x^2-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1} = 3$$

1.9 Funciones trigonométricas

Una gran cantidad de procesos naturales tienen naturaleza ondulatoria. Esto ocurre, por ejemplo, con las mareas oceánicas, la rotación de la Tierra o la oscilación de un péndulo. Pero es también el caso de ciertos fenómenos específicos de la Bioquímica, como es por ejemplo la transmisión de la señal eléctrica a través del axón de la neurona.

Las funciones más utilizadas para representar matemáticamente los procesos ondulatorios son las funciones trigonométricas. Esto se debe a dos razones: Son relativamente fáciles de calcular, y tienen carácter periódico. Podemos usar el seno, por ejemplo, para representar una oscilación de un péndulo, de período T. Ponemos

$$f(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi t/T),$$

donde A es la *amplitud* de la oscilación. Esta ecuación corresponde a un oscilador armónico simple. Como la función seno es periódica de período 2π, la función $f(t)$ es periódica de período T:

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

El nombre de amplitud se debe a que f varía entre $-A$ y A, dado que el seno varía entre -1 y 1.

Recordemos la definición y las propiedades más importantes de las funciones seno y coseno. Ambas se construyen a partir de triángulos rectángulos (Figura 1.5):

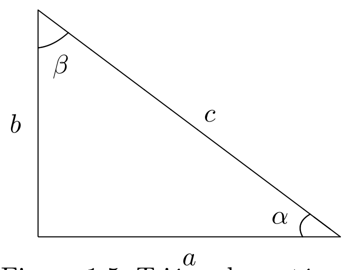


Figura 1.5: Triángulo rectángulo

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\text{Longitud cateto opuesto}}{\text{Longitud hipotenusa}} = \frac{b}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Longitud cateto adyacente}}{\text{Longitud hipotenusa}} = \frac{a}{c}.$$

Entonces

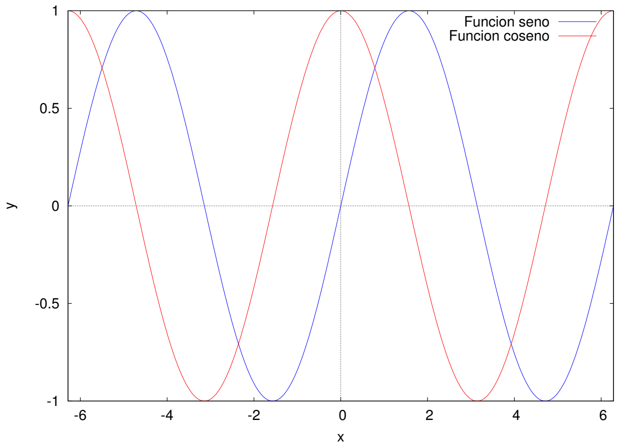
$$\mathrm{sen}\,\beta = \frac{a}{c}, \quad \cos\beta = \frac{b}{c}.$$

De modo que, como $\alpha + \beta = \pi/2$, deducimos

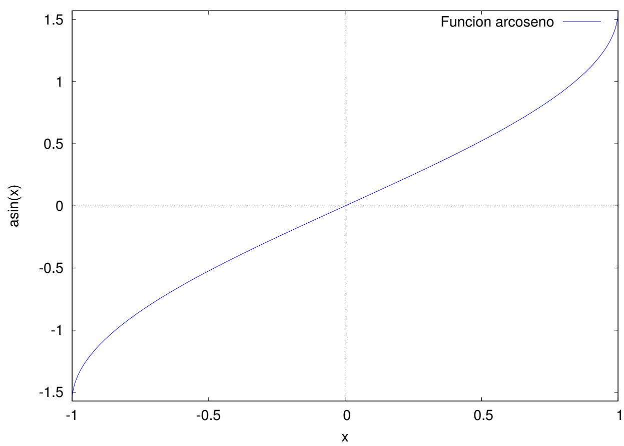
$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha), \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha). \tag{1.17}$$

Por el Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, y de aquí la relación fundamental

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$



(a) Seno y coseno



(b) Arcoseno

Figura 1.6: Gráficas de funciones seno, coseno y arcoseno

Ambas funciones se definen de forma natural para ángulos menores o iguales que $\pi/2$. Para $\alpha \in [-\pi/2, 0]$, se orientan los ejes horizontal y vertical, de modo que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = -\operatorname{sen}(-\alpha), \quad \cos(\alpha) = \cos(-\alpha), \quad \text{si} \quad \alpha \in [-\pi/2, 0]. \tag{1.18}$$

Tenemos así definidas seno y coseno en $[-\pi/2, \pi/2]$. Usando ahora la relación (1.17), las definimos en $[0, \pi]$. Por último, usando (1.18) las definimos en $[-\pi, 0]$.

De su definición, el seno se anula si $\alpha = 0$ o si $\alpha = \pi$, y el coseno se anula si $\alpha = -\pi/2$ ó $\alpha = \pi/2$. Ambas funciones se extienden de forma natural para ángulos mayores que π, o menores que $-\pi$, de forma periódica,

$$\operatorname{sen}(2k\pi + \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha), \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos(\alpha), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{si} \quad \alpha \in [-\pi, \pi].$$

De este modo, seno y coseno se definen sobre todo $\mathbb{R}$ como funciones periódicas de período 2π. Basta conocerlas en cualquier intervalo de longitud 2π para tenerlas determinadas en todo $\mathbb{R}$.

Las funciones seno y coseno satisfacen una serie de relaciones que resultan de utilidad, que mencionamos sin demostración:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta;$$

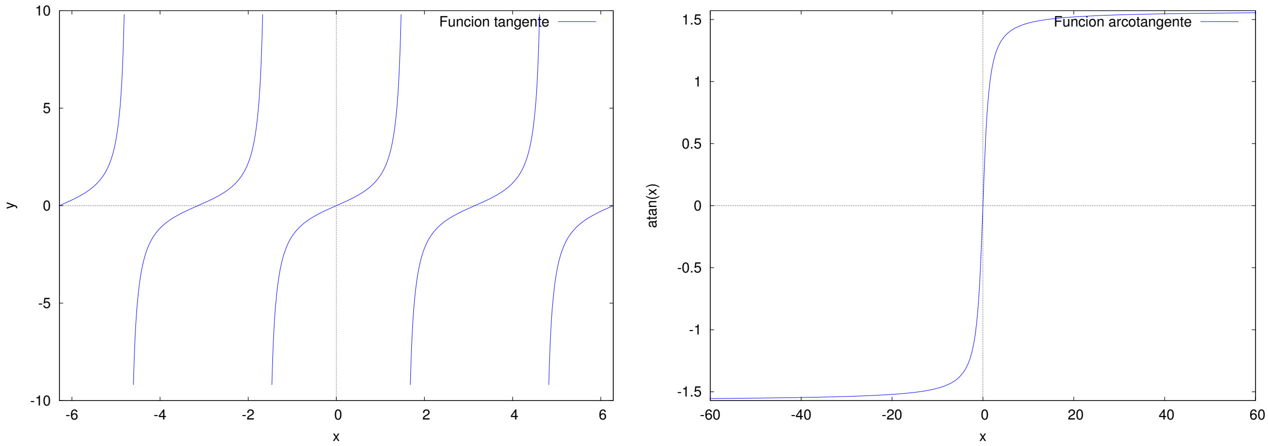
$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right];$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right];$$

La función seno es biyectiva y creciente de $[-\pi/2, \pi/2]$ en $[-1, 1]$. Se puede definir su función inversa, llamada *arcoseno*, de $[-1, 1]$ en $[-\pi/2, \pi/2]$, como sigue:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) = y \quad \text{si} \quad \operatorname{sen}(y) = x.$$

Notemos que la función arcoseno no está bien definida de $[-1, 1]$ en $[-\pi, \pi]$, ya que a cada valor de x le corresponderían dos valores de y. Podemos observar la gráfica de la función arcoseno en la Figura 1.6b. Vemos que, al igual que el seno es creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$, el arcoseno es una función creciente en $[-1, 1]$.



(a) Tangente (b) Arcotangente

Figura 1.7: Gráficas de funciones tangente y arcotangente

En realidad, si una función es creciente y admite inversa, esta es creciente. En efecto, supongamos que f es creciente:

$$\text{Si} \quad x_1 < x_2, \quad \text{con} \quad x_1, x_2 \in Dom(f), \quad \text{entonces} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Para probar que su inversa (que denotamos por f^{-1}) es creciente, supongamos que $y_1 < y_2$, con $y_1, y_2 \in Dom(f^{-1})$. Esto significa que existen $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. De ser $x_2 < x_1$, al ser f creciente deberíamos tener $y_2 = f(x_2) < y_1 = f(x_1)$, lo cual es falso. Por tanto, o bien $x_1 = x_2$, o bien $x_1 < x_2$. Pero en el primer caso, sería $y_1 = f(x_1) = y_2 = f(x_2)$, lo cual también es falso. Concluímos que $f^{-1}(y_1) = x_1 < f^{-1}(y_2) = x_2$. O sea, que f^{-1} es creciente.

Igualmente, si la función es decreciente, su inversa es decreciente.

De forma análoga se define la función inversa del coseno, el arcocoseno, que es decreciente de $[-1, 1]$ en $[0, \pi]$.

Son también de relevancia varias funciones construidas a partir del seno y del coseno. Por ejemplo, la función tangente,

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{definida si} \quad \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde los puntos $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$ son los ceros del coseno. La función tangente es periódica de período π, y tiene asíntotas verticales en las rectas $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (Ver Figura 1.7a). Es biyectiva de $(-\pi/2, \pi/2)$ en $\mathbb{R}$, por lo que su función inversa, llamada *arcotangente*, es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $(-\pi/2, \pi/2)$. Al igual que la tangente, el arcotangente es una función estrictamente creciente (Ver Figura 1.7b). Además, tiende a la asíntota $y = \pi/2$ cuando $x \to +\infty$, y a la asíntota $y = -\pi/2$ cuando $x \to -\infty$: Las asíntotas verticales de la tangente se transforman en asíntotas horizontales del arcotangente.

1.10 Función exponencial

Es posible elevar un número racional positivo a un número racional cualquiera:

$$p^{n/m} = (\sqrt[m]{p})^n, \quad \text{con} \quad p > 0 \quad \text{racional} \quad \text{y} \quad n, m \quad \text{enteros}.$$

Para ello es necesario saber calcular la raíz m-sima de un número racional, lo cual es posible con un procedimiento iterativo especialmente diseñado, o con algoritmos específicos como el habitual para calcular la raíz cuadrada.

Este procedimiento puede ser extendido para elevar un número real positivo a a un número real x. Para ello, aproximamos a y x por números racionales $a_1, a_2, a_3 \cdots$, $x_1, x_2, x_3 \cdots$ (por ejemplo, sus desarrollos decimales), y aproximamos a^x por $a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, a_3^{x_3}, \cdots$. Esto proporciona una sucesión convergente cuyo límite es a^x.

La función exponencial siempre es positiva. Sin embargo, sus características dependen de si la *base* a es mayor o menor que 1. Obviamente, si $a = 1$ obtenemos la función constante igual a 1. En la Figura 1.8 podemos observar las gráficas en las dos situaciones: Si $a > 1$, la función es creciente, tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, y tiende a la asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to -\infty$. Cuando $a < 1$, los comportamientos en $+\infty$ y $-\infty$ son los opuestos respecto al caso anterior. En realidad este segundo caso es una consecuencia del primero, ya que

$$a^x = (a^{-1})^{-x} = \frac{1}{(a^{-1})^x},$$

y si $a < 1$, entonces $a^{-1} > 1$.

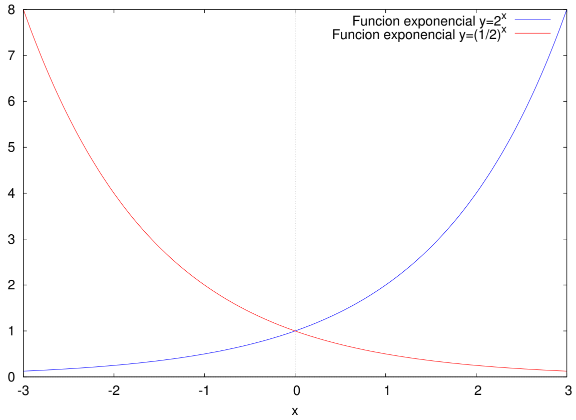


Figura 1.8: Función exponencial

La función exponencial tiene la notable propiedad de transformar suma en producto:

$$a^{x+y} = a^x\, a^y. \tag{1.19}$$

Existe una base natural, que es el número e. Para definirlo, denotemos $f_a(x) = a^x$. Entonces, el número e está caracterizado por

$$f_e'(x) = f_e(x),$$

donde f_e' denota la *función derivada* de f_e (que estudiaremos en el Tema 3). Se demuestra que existe un único número $e > 0$ que cumple esta propiedad. Se trata de un número irracional, que se aproxima por $e \simeq 2,7182818284590452354$. Fue introducido por el matemático escocés John Napier (Neper) en 1614. Por convenio, el logaritmo con base e (también llamado neperiano ó natural) se denota por ln.

El logaritmo con base 10, por abreviar, se denota a veces log, omitiendo la base. Sin embargo es necesario prestar atención, ya que en ciertos libros y programas de cálculo científico, la notación log se usa para el logaritmo neperiano.

1.11 Funcion logarítmica

La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial:

$$log_a(x) = y \quad \text{si} \quad a^y = x, \quad \forall x > 0.$$

La exponencial es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $(0, +\infty)$, por lo que su inversa es biyectiva de $(0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$.

Para representar la gráfica de la función logarítmica, observemos que si un punto (x, y) está en la gráfica de una función, entonces el punto (y, x) está en la gráfica de su función inversa (si esta existe). En efecto, si (x, y) está en la gráfica de f, entonces $y = f(x)$. De aquí $x = f^{-1}(y)$, y por tanto (y, x) está en la gráfica de f^{-1}. O sea, que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$. Podemos observar la aplicación de este hecho a la gráfica de la función logaritmo en la Figura 1.9.

Una propiedad notable de la función logarítmica es

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

Esta propiedad se demuestra como sigue:

$$a^{\log_a b} = b \Rightarrow a^{c \log_a b} = b^c, \quad \text{lo que significa que} \quad \log_a b^c = c \log_a b.$$

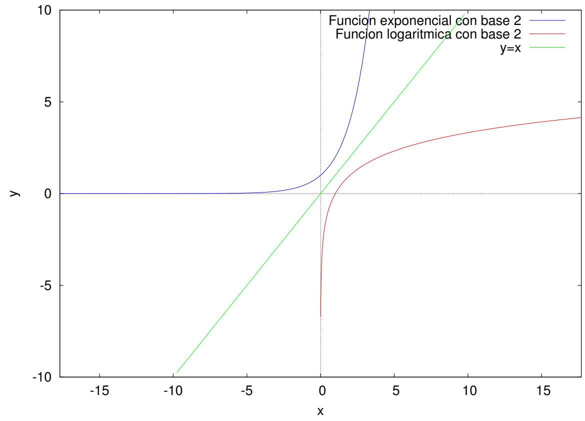


Figura 1.9: Función logarítmica como función inversa de la exponencial

De aquí, se puede calcular el logaritmo en cualquier base a partir del logaritmo neperiano. En efecto, si

$$y = \log_a x, \quad \text{entonces} \quad a^y = x, \quad \text{de donde} \quad y \ln a = \ln x, \quad \text{y por tanto} \quad y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Otra interesante propiedad de la función logarítmica es que transforma producto en suma:

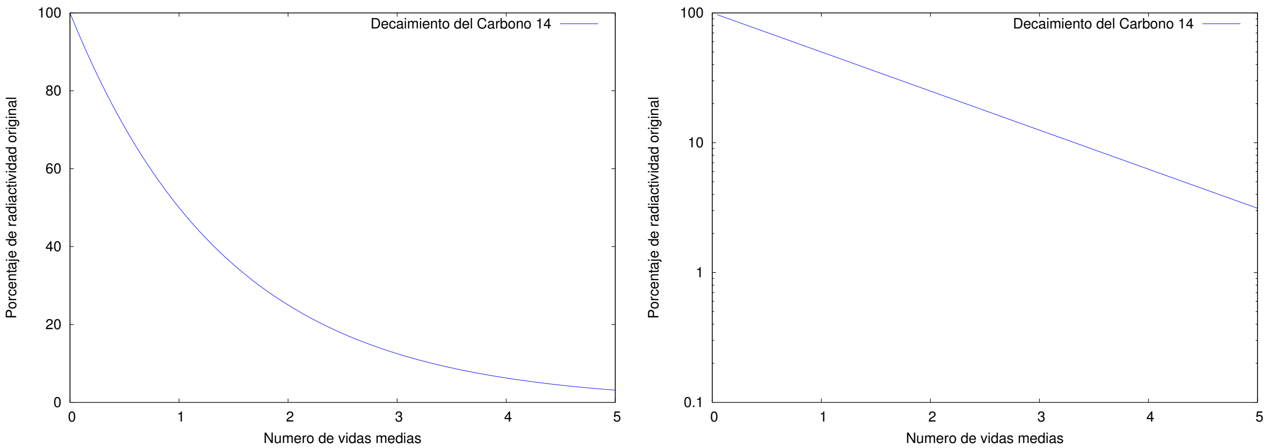
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y). \tag{1.20}$$

Esta propiedad se deriva de la propiedad (1.19) de la función exponencial.

Los logaritmos y la función logarítmica se usan con frecuencia en Biología y Bioquímica. Por ejemplo, el pH de una solución es el logaritmo decimal de la concentración molar de iones H^+, con signo opuesto.

Una aplicación en Bioquímica de las funciones exponencial y logarítmica corresponde a la desintegración de isótopos radiactivos. Los isótopos radiactivos son usados por ejemplo para datar muestras de vida fósil, y son de utilidad en investigación biomédica como trazadores de ciertos tipos de tejidos. El decaimiento del número de átomos radiactivos presentes en un instante dado $N(t)$ viene dado por la ley

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t},$$



(a) Escala normal (b) Escala logarítmica en y

Figura 1.10: Decaimiento del Carbono 14

donde N_0 es el número inicial de átomos, y λ es la tasa de desintegración del isótopo (fracción del número de isótopos que se desintegran por unidad de tiempo, que es constante para cada elemento).

Un tiempo característico de la desintegración de isótopos es la llamada *vida media*, que es el tiempo que tarda una determinada cantidad de átomos en reducirse a la mitad. Para calcularla, escribimos

$$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0. \quad \text{O sea,} \quad N_0 \, e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0.$$

De aquí, tomando logaritmo neperiano,

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Por ejemplo, el Carbono 14 C^{14} tiene una tasa de desintegración $\lambda = 1.216 \times 10^{-4}$/año. Su vida media es entonces

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{1.216 \times 10^{-4}} \text{ años} \simeq 5.700 \text{ años}.$$

1.11.1 Gráficas en escala logarítmica

La propiedad (1.20) permite transformar funciones potenciales en funciones lineales. En efecto, si

$$f(x) = b\,a^x \quad \text{con} \quad b, a > 0,$$

entonces

$$\ln f(x) = \ln b + x\,\ln a,$$

por lo que la función $\ln f(x)$ es lineal en x.

Esto sugiere utilizar *escalas logarítmicas* para representar gráficamente funciones que tienen un crecimiento exponencial. Observemos que el decaimiento de isótopos radiactivos obedece la ley

$$N(t) = e^{-\ln(2)\,t/t_{1/2}},$$

por lo que

$$\ln N(t) = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\,t.$$

En la Figura 1.10 podemos observar las gráficas de $N(t)$ en escala normal, y logarítmica en y (llamada *semilogarítmica*). Observamos en el primer lugar una exponencial decreciente, y en el segundo una recta decreciente. El segundo caso permite distinguir mejor la evolución de la cantidad de isótopo cuando esta es pequeña.

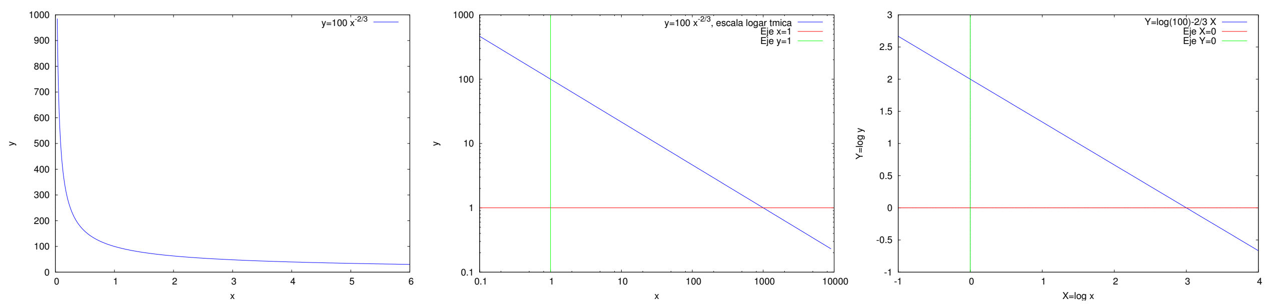
Se puede usar una escala totalmente logarítmica (en x y en y) para representar funciones potenciales. Consideremos, por ejemplo, la función

$$y = 100\,x^{-2/3} \quad \text{para} \quad x > 0$$

Tomando logaritmos la función se transforma en

$$Y = \log 100 - \frac{2}{3}X, \quad \text{siendo} \quad Y = \log y, \quad X = \log x,$$

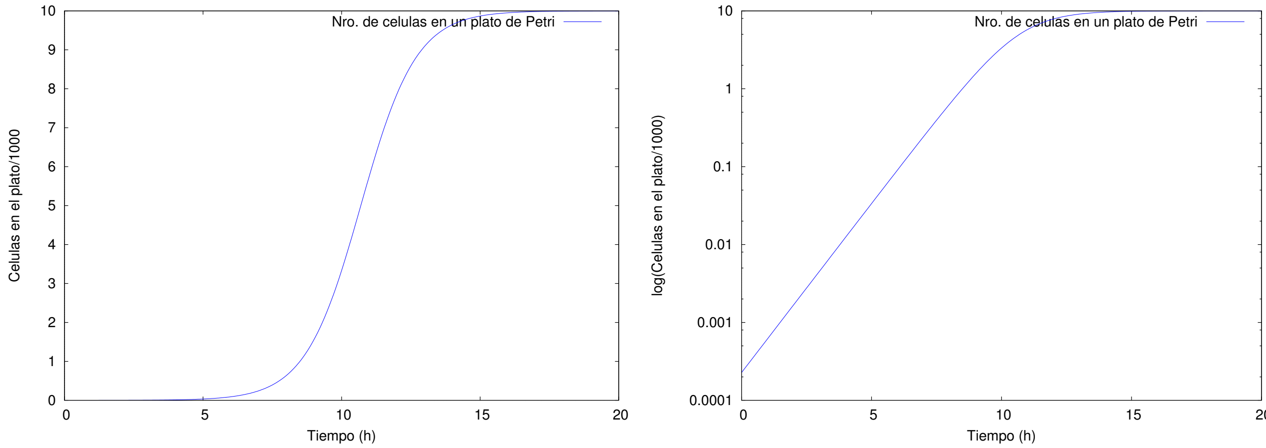
que es una función lineal. De nuevo, podemos observar mejor la variación de la función cuando sus valores son pequeños (Figura 1.11). Las divisiones de los ejes en la escala logarítmica se corresponden de forma directa con la escala lineal, pero no deben confundirse (comparar la segunda y tercera figuras en la Figura 1.11).



(a) Escala normal (b) Escala logarítmica (c) Función lineal equivalente

Figura 1.11: Funcion potencial decreciente

La escala logarítmica permite determinar el comportamiento de ciertos procesos. Por ejemplo, en la Figura 1.12 se representa el crecimiento del número de células en un plato de Petri. Cuando las bacteras son cultivadas en un nutriente de agar en un plato de Petri, el número de células inicialmente crece exponencialmente, doblándose a intervalos regulares. Sin embargo, eventualmente este número se acerca a un límite debido a la limitada disponibilidad de nutrientes. A partir de la gráfica con escala lineal estándar, es difícil determinar cuánto dura el crecimiento exponencial, e incluso si este crecimiento es exponencial en los primeros momentos. Si la gráfica se representa en escala logarítmica, el crecimiento exponencial puede ser observado como crecimiento lineal. Es posible determinar con cierta precisión el tiempo que tarda el número de células en multiplicarse por 10, ya que la escala es logarítmica con base 10. Determinamos que este crecimiento tiene lugar desde el primer momento, y dura aproximadamente hasta el instante $t = 15h$, en que el número de células se estabiliza.



(a) Escala normal (b) Escala logarítmica

Figura 1.12: Crecimiento del número de células en un plato de Petri

1.12 Funciones hiperbólicas

Algunas combinaciones de funciones exponenciales merecen un nombre propio y son estudiadas como ejemplos de nuevas funciones. Presentamos el *seno hiperbólico*, el *coseno hiperbólico*, la *tangente hiperbólica*, etc,

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x}.$$

El calificativo de *hiperbólico* se debe a que del mismo modo que las funciones trigonométricas habituales se pueden relacionar con una circunferencia, las hiperbólicas se pueden relacionar con otra cónica llamada hipérbola (una figura geométrica "parecida" a la circunferencia).

Las funciones hiperbólicas tienen propiedades similares a las de las funciones trigonométricas, por ejemplo:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

El coseno hiperbólico se usa para determinar la posición de los puntos de un cable suspendido por sus extremos, sometido a su propio peso (curva catenaria) como pueden ser los cables del tendido eléctrico. La velocidad de las olas en el mar, v, puede describirse mediante la tangente hiperbólica, relacionando su longitud de onda (distancia entre cresta y cresta), λ, y la profundidad del agua en la que viajan las olas, h. Concretamente,

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$$

donde g es la gravedad.

1.13 Representación gráfica de funciones

La gráfica de una función proporciona mucha información cualitativa sobre el proceso que representa. Es por ello muy importante saber por una parte representar correctamente la gráfica de una función cuyos valores numéricos son conocidos, para transmitir esta información a otras personas. Por otra parte, es también muy importante saber interpretar el comportamiento del proceso a partir de la gráfica que lo representa. Por ejemplo, la Figura 1.13 representa la diversidad de especies (es decir, el número de especies) en función de la productividad primaria (la velocidad con que los autótrofos convierten la luz o la energía química inorgánica en energía química orgánica). Vemos cómo para pequeñas productividades la diversidad es pequeña, pero va aumentando hasta un valor máximo, a partir del cual de nuevo decrece. Existe, pues, un valor óptimo de productividad primaria al que está asociado un máximo de diversidad de especies. Vemos también cómo la diversidad decrece progresivamente al aumentar la productividad.

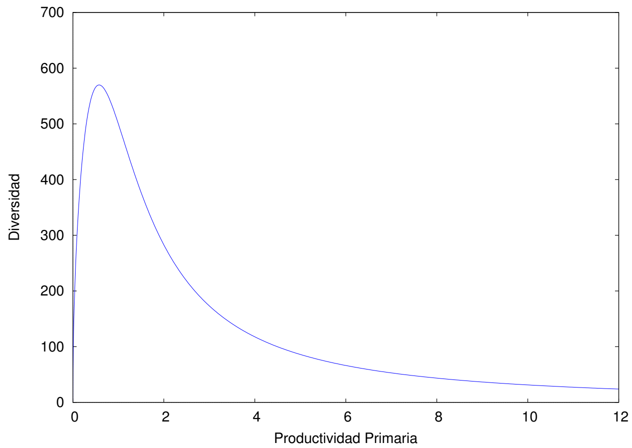


Figura 1.13: Diversidad de especies en función de la productividad primaria

La correcta interpretación de la representación gráfica de curvas requiere conocer los siguientes elementos:

- **Dominio.** Es el conjunto de puntos x donde la función está definida. En el caso de la Figura 1.13, el dominio es $D = [0, +\infty)$. En efecto, solo tiene sentido considerar productividades positivas (o nulas).
- **Recorrido.** Es el conjunto de valores y que alcanza la función. Esto nos da una idea de la magnitud de la función que estamos considerando. En el caso de la Figura 1.13, el recorrido es, aproximadamente, $[0, 600]$. O sea, que en la zona de estudio el óptimo de la productividad primaria genera unas 600 especies.
- **Zonas de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.** Proporcionan información sobre cómo varía la función considerada al aumentar o disminuir la variable independiente, y de cuáles son sus máximos o mínimos. La identificación de estos es importante en muchos procesos. En el caso de la Figura 1.13, ya hemos comentado que la diversidad aumenta para pequeños valores de la productividad, y disminuye para grandes valores de la misma, existiendo un único valor máximo.
- **Asíntotas verticales.** Algunos procesos tienen comportamientos “explosivos". Por ejemplo, magnitudes que crecen de forma incontrolada en tiempo finito (imaginemos la presión generada por una explosión). Es el caso del comportamiento cuando $x \to 0^+$ ó $x \to 0^-$ en la Figura 1.4.
- **Asíntotas horizontales.** Determinan el comportamiento de la función considerada cuando la variable independiente tiende a $+\infty$ ó $-\infty$. En el caso de la Figura 1.13, la diversidad tiende a cero si la productividad tiende a $+\infty$.
- **Asíntotas oblicuas.** También determinan el comportamiento de la función en el infinito. En este caso, la función se acerca progresivamente a una recta que no es horizontal. Se caracteriza por

  $$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

  siendo $y = ax + b$ la ecuación de la asíntota. De aquí, a y b se obtienen por

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

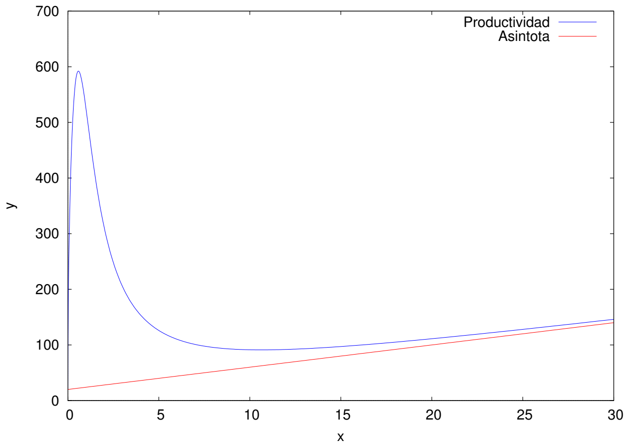


Figura 1.14: Curva con asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$

1.14 Resolución gráfica de ecuaciones e inecuaciones

Podemos usar las facilidades que nos proporcionan los programas de dibujo de gráficas para resolver ecuaciones e inecuaciones. Estos procedimientos son relativamente rudimentarios frente a técnicas analíticas y numéricas, pero los usaremos aquí dada la escasez de tiempo de curso de que disponemos. Básicamente, se trata de hacer un zoom en el entorno de los ceros de la función considerada.

Supongamos que queremos resolver la ecuación $f(x) = 0$, siendo f una función conocida. Representando su gráfica, o usando información sobre la función de la que disponemos previamente, podemos identificar un intervalo en el que se encuentra un cero x_0. Denotamos por $[a_1, b_1]$ este intervalo. Si denotamos por c_1 al centro de este intervalo, entonces la distancia entre c_1 y el cero queda acotada por

$$|x_0 - c_1| \leq \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Observando la gráfica de la función en este intervalo, podemos determinar un intervalo más pequeño en el que se encuentre el cero: $[a_2, b_2]$. Podemos suponer sin dificultad que la longitud de este intervalo es, como mucho, la mitad de la del primero. Si denotamos por c_2 el centro de este intervalo, tendremos

$$|x_0 - c_2| \leq \frac{b_2 - a_2}{2} \leq \frac{b_1 - a_1}{4}.$$

A su vez, representando la gráfica en este intervalo, podemos determinar un intervalo $[a_3, b_3]$ que contiene al cero, y cuya longitud es, como mucho, la mitad de la longitud de $[a_2, b_2]$. Tendremos entonces

$$|x_0 - c_3| \leq \frac{b_3 - a_3}{2} \leq \frac{b_2 - a_2}{4} \leq \frac{b_1 - a_1}{8}.$$

Consideramos los centros de los intervalos como aproximaciones al cero de la función que pretendemos obtener. Determinamos así una sucesión de números $\{c_1, c_2, c_3, \cdots\}$ cada vez más próximos al cero, ya que de hecho satisfacen

$$|x_0 - c_n| \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}.$$

En la práctica podemos mejorar la precisión, si conseguimos por ejemplo dividir por diez la longitud de los intervalos en cada etapa. Esto proporciona la estimación

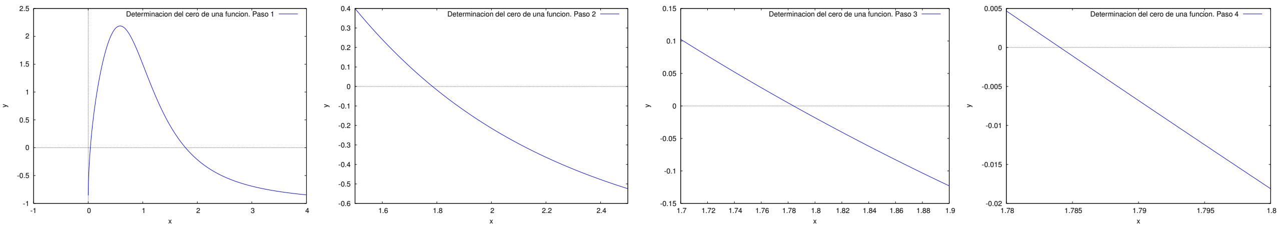
$$|x_0 - c_n| \leq \frac{b_1 - a_1}{10^n},$$

lo que significa que conseguimos una cifra decimal exacta más en cada iteración. En el caso anterior, conseguimos una cifra binaria exacta más en cada iteración. Detendremos el procedimiento cuando calculemos el cero con la precisión requerida por la aplicación concreta con la que trabajemos.

Este procedimiento está ilustrado en la Figura 1.15. La función representada es

$$f(x) = 5\frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} - 1.$$

Esta función posee dos ceros, que denotamos por x_0 y x_1. En la cuarta iteración, el segundo cero es aproximadamente $x_1 \simeq 1.785$.



(a) Iteración 1 (b) Iteración 2 (c) Iteración 3 (d) Iteración 4

Figura 1.15: Aproximación gráfica del cero de una función

Por otra parte, para resolver inecuaciones en la forma

$$f(x) \leq 0,$$

nos apoyamos en el procedimiento anterior para calcular los ceros: A la vista de la gráfica podemos determinar cualitativamente los intervalos en que la función es positiva y negativa. Entonces, basta determinar los extremos de estos intervalos para localizar los conjuntos de puntos x en que $f(x) \leq 0$. Por ejemplo, la función de la Figura 1.15 es menor o igual que cero si, o bien $x \geq x_1$, o bien $0 < x < x_0$ (la función solo está definida para $x > 0$). Ya que tenemos aproximado $x_1 \simeq 1.785$, nos basta aproximar x_0. Usando el mismo procedimiento, obtenemos $x_0 \simeq 0.04$, por lo que la inecuación $f(x) \leq 0$ se resuelve aproximadamente por

$$\text{O bien} \quad 0 < x \leq 0.04, \quad \text{o bien} \quad x \geq 1.785.$$

Estos procedimientos pueden también aplicarse a resolver ecuaciones de la forma

$$h(x) = g(x),$$

o inecuaciones de la forma

$$h(x) \leq g(x),$$

utilizando la función diferencia $f(x) = h(x) - g(x)$. También se puede utilizar directamente la representación gráfica de las dos funciones, aproximando los puntos de corte mediante zooms progresivos, en lugar de los ceros de f.

1.15 Determinación de parámetros

En muchas ocasiones ocurre que se sabe que una cierta magnitud y, que depende de otra x, sigue una ley determinada; por ejemplo, que tiene un comportamiento lineal. Esto significa que se sabe que la función $y = f(x)$ es de la forma $f(x) = ax + b$. Sin embargo no se conocen los valores de los coeficientes a y b que determinan dicha dependencia.

En ocasiones, los valores de dichos coeficientes se pueden calcular si se conoce el valor de la función en un número suficiente de puntos, es decir, si se conoce el valor de y correspondiente a un número suficiente de x.

Ejemplo 1.1
Se sabe que la temperatura de cierto objeto tiene un comportamiento lineal, con respecto del tiempo. Sabiendo que en un instante inicial, $t = 0$, la temperatura era de $10°$C y que pasados 30 minutos era de $20°$C, determinar la función que proporciona la temperatura en función del tiempo, en cualquier instante t. Determinar también el instante t en que la temperatura del objeto alcanza el valor de $45°$C.

Denotaremos por T a la temperatura y por t al tiempo medido en minutos. Puesto que la temperatura sigue una ley lineal se tendrá: $T(t) = at + b$ para algunos valores a y b que (de momento) no conocemos. Se trata, pues, de determinarlos utilizando la información dada. Por un lado,

$$10 = T(0) = a \cdot 0 + b = b \quad \Longleftrightarrow \quad b = 10$$

Por otro lado, y sabiendo ya que $b = 10$,

$$20 = T(30) = a \cdot 30 + 10 \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot 30 = 20 - 10 = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Luego se tiene, para la función $T(t)$:

$$T(t) = \frac{1}{3}\,t + 10$$

Para determinar el instante en que $T = 45$, hay que calcular para qué valor de t de tiene

$$T(t) = \frac{1}{3}\,t + 10 = 45 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3}\,t = 45 - 10 = 35 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 305 \text{ minutos.}$$

Ejemplo 1.2
Un incendio comienza en un campo abierto y seco y se extiende en forma de círculo. El radio de tal círculo aumenta a razón de 0.5 metros por minuto. Determínese el área de la zona incendiada como una función del tiempo.

Aunque se trata de determinar el área de la zona incendiada, la información de la que se dispone es relativa al **radio** de dicha zona. Por ello, será más fácil determinar en primer lugar el radio en función del tiempo. Una vez conocido este, solo hay que calcular el área del círculo con dicho radio.
Denotaremos por r al radio del círculo medido en metros y por t al tiempo medido en minutos. Comenzaremos a contar el tiempo en el instante en que se inicia el incendio.
Aumentar (o disminuir) a un ritmo constante es una característica de las funciones lineales. Luego la información proporcionada nos indica que $r(t)$ es una función lineal:

$$r(t) = at + b$$

La información de la que se dispone para determinar a y b es:

1. $r(0) = 0$, ya que inicialmente el radio de la zona incendiada es nulo.
2. $r(1) = 0.5$, ya que en un minuto dicho radio habrá aumentado 0.5 metros.

En consecuencia:

$$0 = r(0) = a \cdot 0 + b \iff b = 0$$
$$0.5 = r(1) = a \cdot 1 = a \iff a = 0.5$$

Luego la función que nos da el radio en función del tiempo es

$$r(t) = 0.5\,t = \frac{1}{2}\,t$$

En consecuencia, el área de la zona incendiada será el área del círculo de radio $r(t)$:

$$S(t) = \pi\, r(t)^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\,t\right)^2 = \frac{\pi}{4}\,t^2$$

Ejemplo 1.3
El número de bacterias de un determinado cultivo de laboratorio sigue la ley $y = \dfrac{r}{1+Ce^{-t}}$ **donde** t **es el tiempo medido en días,** y **es el número de bacterias medido en millones y** r **y** C **son parámetros que hay determinar a partir de datos experimentales. Se sabe que, al inicio del cultivo había** 5×10^5 **bacterias y que, cuando pasa mucho tiempo, la población de bacterias tiende a estabilizarse en el valor de** 40 **millones. Determínense los valores de dichos parámetros. Determínese también en qué instante** t **se alcanzará el número de 10 millones de bacterias.**

Por comodidad y porque es lo lógico, comenzaremos a contar el tiempo en el momento en que se inicia el cultivo.

Por tanto se tiene que $y(0) = 500000$ bacterias $= \dfrac{1}{2}$ millones de bacterias.

Por otro lado, el valor en el que se estabiliza la población cuando se deja pasar mucho tiempo se obtendrá tomando límite cuando t tiende a $+\infty$:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 40$$

Utilizando estas dos informaciones se tiene:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{r}{1+Ce^{-t}} = \frac{r}{1+C\cdot 0} = r = 40$$

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{40}{1+Ce^{0}} = \frac{40}{1+C} \iff 1+C = 80 \iff C = 79$$

Luego finalmente se tiene:

$$y(t) = \frac{40}{1+79e^{-t}}$$

Para determinar el instante en que la población llega a 10 millones de bacterias hay que resolver la ecuación

$$\frac{40}{1+79e^{-t}} = 10 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{40}{10} = 4 = 1+79e^{-t} \quad\Leftrightarrow\quad 3 = 79e^{-t} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{79} = e^{-t}$$

de donde, tomando logaritmos en ambos miembros, se tiene

$$-t = \ln\left(\frac{3}{79}\right) \quad\Leftrightarrow\quad t = -\ln\left(\frac{3}{79}\right) \approx 3.3 \text{ días}$$

Tema 2

Funciones: continuidad y derivabilidad

Versión: 18 de octubre de 2019

La vida como la conocemos sería imposible sin cambios. Cambios en la concentración de sustancias en pequeñas distancias son muy importantes en Bioquímica. Por ejemplo, dos tercios del ATP producido en las neuronas es consumido por proteinas que envían cationes a través de la membrana celular al medio extracelular, disminuyendo la concentración de potasio y aumentando la de sodio. El gradiente de concentración a través de la membrana celular proporciona la fuerza conductora para la entrada en la célula de agua, glucosa y otros nutrientes. Otro ejemplo es la diferencia de temperatura entre los animales de sangre caliente y su entorno, que limita las características de sus cuerpos. Por ejemplo, las focas suavizan las transferencias de calor entre su cuerpo y el entorno envolviéndose en capas de grasa y pelo.

Este tema está dedicado a la diferenciación o derivación, que es la rama de las matemáticas que predice cómo cambios en una cantidad determinarán cambios en otra. Estudiaremos cómo analizar y esbozar los grafos de diferentes curvas, cómo hacer aproximaciones polinómicas y cómo manejar pequeños errores en medidas experimentales.

2.1 Funciones

Función real de variable real es una correspondencia del tipo

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que a cada valor x del conjunto de números reales A le asocia un **único** número real $y = f(x)$

$$f : x \in A \longrightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}$$

Expresa en términos matemáticos la dependencia de la magnitud y con respecto a la magnitud x.

Dominio de una función es el conjunto A en el que está definida.

Ejemplo 2.1
$f(x) = x^2 + 3$
El dominio de esta función es toda la recta real $\mathbb{R}$, ya que la expresión $x^2 + 3$ está bien definida para cualquier valor de x.

Ejemplo 2.2
$f(x) = \dfrac{1}{x}$
El dominio de esta función es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir, toda la recta real excepto el origen, ya que $\dfrac{1}{x}$ está definida para cualquier valor excepto para $x = 0$.

Ejemplo 2.3
$f(x) = +\sqrt{x}$
La raíz cuadrada de un número negativo no está definida, en consecuencia el dominio de esta función es el conjunto $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, es decir, la semi-recta formada por los números reales no negativos.

Ejemplo 2.4
$f(x) = +\sqrt{x-2}$
Esta función solo está definida para los valores de x que hagan no negativo el radicando, es decir, para $x-2 \geq 0$ o, lo que es lo mismo, para $x \geq 2$. Luego el dominio de la función es $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$.

Ejemplo 2.5
$f(x) = \dfrac{+\sqrt{x}}{(1+4x)(x-2)}$
El numerador solo está definido para $x \geq 0$. El denominador está definido para cualquier valor de x, pero el cociente no está definido cuando el denominador sea nulo:

$$(1+4x)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4x = 0 \Leftrightarrow x = -1/4 \\ \text{o bien} \\ x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

El valor $x = -1/4$ ya está excluído por la condición anterior. Por lo tanto el dominio de definición de la función será:

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \setminus \{2\} = [0,2) \cup (2,+\infty)$$

Ejemplo 2.6
$f(x) = \dfrac{1}{x+3} \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$
En primer lugar, el logaritmo solo está definido para valores positivos de su argumento. Debe ser por tanto

$$\frac{1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

Además el denominador de la otra fracción debe ser no nulo: $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$. Pero este valor $x = -3$ ya está excluído, porque no verifica $x > -2$. El dominio es, pues,

$$\{x \in \mathbb{R} : x > -2\} = (-2,+\infty)$$

Ejemplo 2.7
$f(x) = \sqrt{e^x - 3}$
La raíz cuadrada solo está definida para números no negativos. En consecuencia, debe ser

$$e^x - 3 \geq 0 \Longleftrightarrow e^x \geq 3$$

Haciendo uso de que el logaritmo es una función monótona. es decir, que si $a \leq b$ entonces $\ln(a) \leq \ln(b)$, se tiene:

$$e^x \geq 3 \Longleftrightarrow \ln(e^x) = x \geq \ln(3)$$

El dominio es, pues,

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq \ln(3)\} = [\ln(3), +\infty)$$

Ejemplo 2.8
$f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$
En primer lugar se observa que la función logaritmo solo está definida para valores positivos, luego debe ser $x > 0$.
Pero además, puesto que se trata de un cociente, hay que excluir del dominio los puntos en los que se anule el denominador: la función $\ln(x)$ solo se anula en $x = 1$.
El dominio es, pues,

$$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Ejemplo 2.9
$f(x) = \dfrac{x}{e^{2x} + e^x - 2}$
Tanto el numerador como el denominador son funciones definidas para cualquier valor de x. Los únicos puntos que hay que excluir del dominio son los puntos en que se anule el denominador.
Hay que calcular, pues, las soluciones de $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. Para ello basta observar que, si llamamos $z = e^x$, lo que nos queda es una ecuación de segundo grado en z:

$$e^{2x} + e^x - 2 = (e^x)^2 + e^x - 2 = z^2 + z - 2 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{array}{r} 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

Puesto que e^x es siempre positivo, solo nos interesa la raíz positiva, $z = 1$, de donde $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
El dominio de la función es, por lo tanto:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Además de por las condiciones matemáticas, el dominio de una función puede venir determinado por el significado físico de las magnitudes que representa.

Ejemplo 2.10

La dosis d (en mg) de un cierto medicamento que hay que suministrar a niños menores de 14 años viene dada, en función de su edad t (en años), por la fórmula siguiente

$$d = f(t) = \frac{t+1}{24}$$

La función $\frac{t+1}{24}$ tiene perfecto sentido para cualquier valor de t. Sin embargo, puesto que la variable independiente t representa la edad del niño, no tiene sentido que sea $t \leq 0$. Por otra parte, la fórmula solo es aplicable hasta los 14 años, luego deber ser $t \leq 14$.
El dominio de la función es, pues,

$$\{t \in \mathbb{R} \,:\, 0 < t \leq 14\} = (0, 14]$$

Imagen o recorrido de una función es el conjunto de valores que toma la función.

Ejemplo 2.11
$y = f(x) = x^2 + 3$
x^2 es siempre ≥ 0, luego $x^2 + 3 \geq 3$. La imagen de la función es, pues, $\{y \in \mathbb{R} \,:\, y \geq 3\}$.

Ejemplo 2.12
$y = f(x) = +\sqrt{x+4}$
La imagen de esta función es

$$\{y \in \mathbb{R} \,:\, y \geq 0\}$$

2.2 Límites y continuidad de funciones

En la base del concepto de derivada está un concepto abstracto, que nos será absolutamente necesario: El concepto de límite de una función en un punto. La idea es que los valores de la función se acercan al valor límite cuando la variable independiente se acerca al punto.

Límite de una función en un punto
Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b), y consideremos un punto $c \in (a, b)$. Se dice que el límite de $f(x)$ en el punto $x = c$ es $L \in \mathbb{R}$ si:
Dado un intervalo arbitrariamente pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, podemos encontrar un intervalo en torno al punto c, $(c - \delta, c + \delta)$, tal que toda la imagen del intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ (salvo el punto c) está incluida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. O sea,

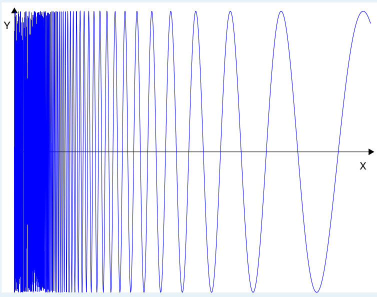
$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta, \qquad \textit{entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En este caso, se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Ejemplo 2.13
$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ **no tiene límite en** $x = 0$

Podemos encontrar valores de x arbitrariamente cercanos a cero tales que $\operatorname{sen}(1/x)$ toma cualquier valor a entre 0 y 1.

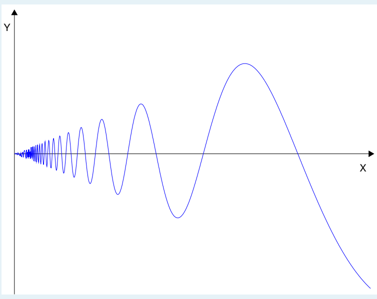


En efecto,

$$\operatorname{sen}(1/x) = a \quad \text{si} \quad 1/x = \operatorname{arc\,sen}(a) + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, si se eligen $\quad x_k = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,sen}(a) + 2k\pi} \quad$ se tiene $\operatorname{sen}(1/x_k) = a$.
Por tanto, los valores de $\operatorname{sen}(1/x)$ no pueden acercarse a ningún límite L concreto cuando $x \to 0$.

Ejemplo 2.14
$\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$



En efecto, denotemos $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $c = 0$, $L = 0$. Entonces,

$$|f(x) - L| = |f(x)| = |x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|.$$

Si queremos que $|f(x)| < \varepsilon$ cuando $|x| < \delta$, basta elegir $\delta = \varepsilon$. La imagen por f del intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ (excepto $x = 0$) está contenida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

El concepto anterior de límite se extiende de forma natural a límites por la derecha (cuando $x > c$) y por la izquierda (cuando $x < c$): Basta pedir que la imagen de $(c, c + \delta)$ (en el primer caso) o de $(c - \delta, c)$ (en el segundo caso) esté incluida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Se denota

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = L.$$

Los límites verifican un álgebra que permite calcular nuevos límites a partir de los ya conocidos. Véase el Apéndice A y los ejemplos que allí se incluyen.

LÍMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO	
$\lim_{x\to a} f(x) = A$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es A si cuando tomamos valores de x cada vez más próximos a a, aunque sin llegar a a, los valores de f están cada vez más próximos a A. $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x - a\| < \delta$ entonces $\|f(x) - A\| < \varepsilon$
$\lim_{x\to a^-} f(x) = A$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda es A si cuando tomamos valores de x **más pequeños que** a y cada vez más próximos a a, aunque sin llegar a a, los valores de f están cada vez más próximos a A. $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a - \delta, a)$ entonces $\|f(x) - A\| < \varepsilon$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = A$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es A si cuando tomamos valores de x **mayores que** a y cada vez más próximos a a, aunque sin llegar a a, los valores de f están cada vez más próximos a A. $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, a + \delta)$ entonces $\|f(x) - A\| < \varepsilon$
$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ (-\infty)$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $+\infty$ $(-\infty)$ si, cuando tomamos valores de x cada vez más próximos a a, aunque sin llegar a a, los valores de $f(x)$ se hacen más grandes (pequeños) que cualquier número positivo (negativo). $\forall M > 0$ $(M < 0)$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta$ implica $f(x) > M$ $(f(x) < M)$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$	Las definiciones de estos límites resultarán evidentes a partir de las cuatro anteriores.
Una función tiene límite en un punto $x = a$ si y solo si existen los límites laterales y son iguales y finitos.	

LÍMITES DE FUNCIONES EN $\pm\infty$	
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es A si, cuando tomamos valores de x cada vez más grandes, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más a A. $\forall\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $x > M$ implica $\|f(x) - A\| < \varepsilon$
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es $+\infty$ si, cuando tomamos valores de x cada vez más grandes, los valores de $f(x)$ se hacen más grandes que cualquier número positivo. $\forall M > 0$ existe $N > 0$ tal que $x > N$ implica $f(x) > M$
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es $-\infty$ si, cuando tomamos valores de x cada vez más grandes, los valores de $f(x)$ se hacen más pequeños que cualquier número negativo. $\forall M < 0$ existe $N > 0$ tal que $x > N$ implica $f(x) < M$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = A$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$	Las definiciones análogas cuando x tiende a $-\infty$ son fáciles de deducir.

Función continua

En lenguaje impreciso, se dice que una función es **continua** si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Si en algún punto hay que levantar el lápiz del papel para dibujar la gráfica de una función se dice que la función es **discontinua en dicho punto**.

Matemáticamente esto se formaliza pidiendo que el límite de la función en cada punto x del dominio de la función coincida con el valor de la función $f(x)$:

Supongamos que una función f está definida en un intervalo (a, b) y sea c un punto del intervalo. Diremos que f es continua en c si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

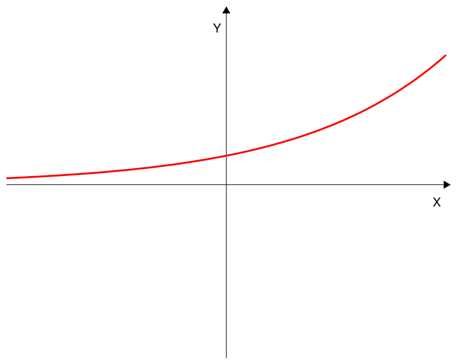


Figura 2.1: En el intervalo en que está representada, la gráfica de la función se puede trazar sin levantar el lápiz del papel: la función es continua en dicho intervalo.

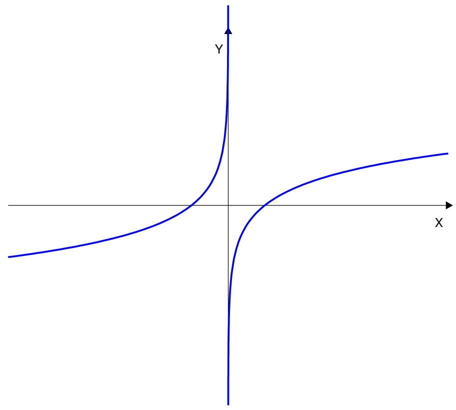


Figura 2.2: La gráfica de esta función está formada por dos ramas. Para dibujarlas es preciso levantar el lápiz del papel: la función es discontinua en $x = 0$.

Ejemplo 2.15

La función $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no está, en principio, definida en $x = 0$:
Sin embargo, se ha visto en el Ejemplo 2.2, que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
Se puede entonces definir $f(0) = 0$, con lo que la función así definida es continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Las funciones definidas por expresiones elementales[1] son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

[1] Expresiones construidas con las operaciones aritméticas aplicadas a las funciones elementales (polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales, etc.) y su composición.

Ejemplo 2.16
Probar que la función logarítmica $f(x) = \ln(x)$ es continua en todo punto $c > 0$

Para ello estudiamos si la diferencia $|f(x) - f(c)|$ es menor que ε cuando x y c están suficientemente cerca:

$$|f(x) - f(c)| = |\ln(\frac{x}{c})| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \ln(\frac{x}{c}) < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon} < \frac{x}{c} < e^{\varepsilon}$$

Ponemos $\dfrac{x}{c} = \dfrac{x-c}{c} + 1$, y entonces

$$|f(x) - f(c)| = |\ln(\frac{x}{c})| < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon} - 1 < \frac{x-c}{c} < e^{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow c(e^{-\varepsilon} - 1) < x - c < c(e^{\varepsilon} - 1).$$

Basta tomar entonces $\delta = \text{mín}\{|c(e^{-\varepsilon} - 1)|, c(e^{\varepsilon} - 1)\}$ para tener $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ si $|x - c| < \delta$.

De forma análoga a los conceptos de límite por la derecha y por la izquierda, se definen los conceptos de continuidad por la derecha y por la izquierda. Por ejemplo, la función f es continua por la derecha en $x = c$ si

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c).$$

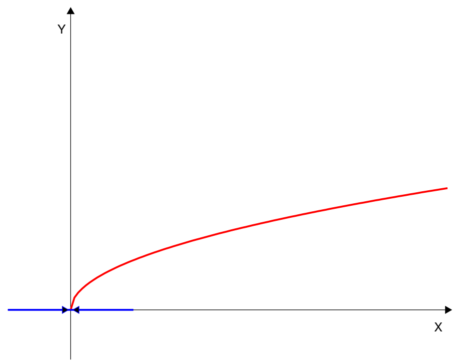


Figura 2.3: Gráfica de la función $f(x) = +\sqrt{x}$. El $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ no existe, ya que la función no está definida para $x < 0$. Sin embargo, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

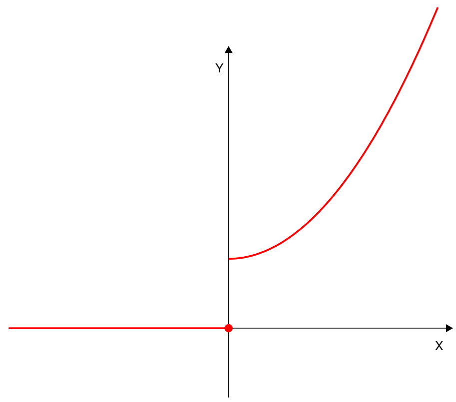


Figura 2.4: La función definida por $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ y por $f(x) = x^2 + 1$ si $x > 0$ tiene límite a ambos lados del punto $x = 0$, pero son distintos: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

Operaciones con funciones continuas.
Si f y g son continuas en a, entonces $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f^g son también continuas en a.
Si $g(a) \neq 0$, entonces también $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.
Si g en continua e a y f es continua en $g(a)$, entonces $f(g(x))$ es continua en $x = a$.

En la práctica, esta última propiedad significa que la composición de las funciones que ya hemos estudiado es continua, ya que cada una de ellas lo es, siempre y cuando permanezcamos en el dominio de definición de cada función. Por ejemplo, si p_k es un polinomio de grado k, la función

$$f(x) = \ln(p_k(x))$$

es continua en los puntos en que $p_k > 0$, ya que de otro modo f no está definida. A su vez, la función

$$g(x) = \sqrt{p_k(x)}$$

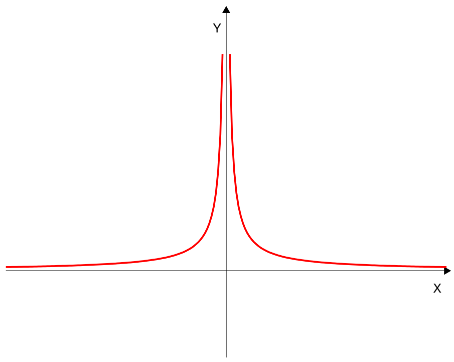


Figura 2.5: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$:
Cuando nos aproximamos a $x = 0$ (tanto por la izquierda como por la derecha) la función toma valores positivos indefinidamente grandes: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

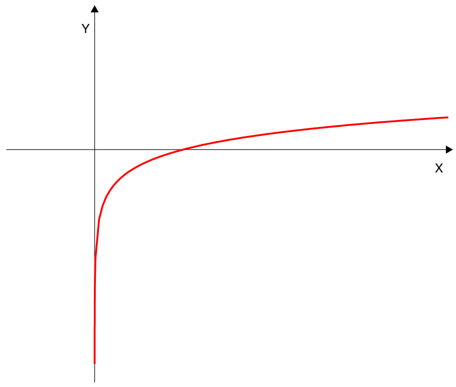


Figura 2.6: Gráfica de la función $f(x) = \ln x$.
El límite cuando $x \to 0^-$ no existe (la función no está definida para $x \le 0$). Cuando $x \to 0^+$ la función toma valores negativos indefinidamente grandes en valor absoluto: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

es también continua en los puntos en que $p_k > 0$. En los puntos en que $p_k(x) = 0$ será continua bien por la derecha, bien por la izquierda, o incluso por los dos lados, dependiendo del signo de p_k a la derecha y a la izquierda de x.

Ejemplo 2.17

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x = 1$. Sin embargo, existe $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ y vale 2.
Este tipo de discontinuidades se llaman **evitables**, ya que basta con re-definir la función $f(x)$ en el punto $x = 1$ (en este caso, poner $f(1) = 2$), dándole el valor del límite, para obtener una función contínua.

Ejemplo 2.18

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En este caso existen los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to 0$ y son iguales. Pero no coinciden con el valor de $f(0)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad f(0) = 1$$

En consecuencia, $f(x)$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad (evitable, igual que en el ejemplo anterior).

Ejemplo 2.19

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En este caso existen los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to 0$ pero son distintos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1,$$

En consecuencia, $f(x)$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad.
Este tipo de discontinuidades, en la que existen los límites laterales pero son distintos, se denominan **de salto**.

Ejemplo 2.20

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Esta función tiene dos discontinuidades (en realidad dos puntos en los que no está definida): $x = -1$ y $x = 1$. En ambos casos, los límites laterales de $f(x)$ no existen (son infinitos):

- $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$, ya que, a la izquierda de $x = -1$, se tiene $x^2 > 0$ y $x^2 - 1 > 0$
- $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$, ya que, a la derecha de $x = -1$, se tiene $x^2 > 0$ y $x^2 - 1 < 0$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, ya que, a la izquierda de $x = 1$, se tiene $x^2 > 0$ y $x^2 - 1 < 0$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, ya que, a la derecha de $x = 1$, se tiene $x^2 > 0$ y $x^2 - 1 > 0$

2.3 Concepto de derivada

El concepto de derivada es uno de los más importantes de la matemática actual. En su forma moderna fue introducido por Newton y Leibnitz a finales del siglo XVII. Newton lo usó, por ejemplo, para calcular la órbita de la Luna y de los planetas a partir de su famosa Ley de Gravitación Universal.

La derivada expresa básicamente la rapidez con la que una función varía en cada punto. Consideremos una función f definida en un intervalo (a, b), y un punto $c \in (a, b)$. La variación de f entre c y otro punto x de (a, b) es $f(x) - f(c)$, y su variación promedio, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

La derivada de f en $x = c$ se define como el límite de la variación promedio:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \tag{2.1}$$

Derivada de una función en un punto.
Se llama **derivada de f en c** y se denota $f'(c)$ al límite, **si existe**

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Si existe dicho límite, se dice que **f es derivable en c**.
Si la derivada de f existe en todos los puntos de un intervalo I, entonces se dice que f **es derivable en el intervalo I**.

Si la función es continua en $x = c$, el numerador de este cociente se anula en $x = c$, por lo que cabe esperar que este límite exista. Obviamente, no existirá si f no es continua en $x = c$. De hecho, se demuestra fácilmente que si f es derivable en c, entonces es continua en c.

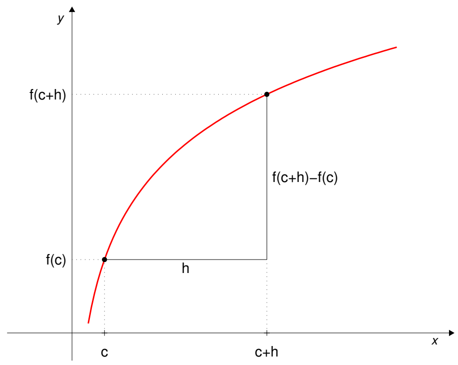


Figura 2.7: La derivada de f en a «mide» el crecimiento de la función en el punto a.

Teorema
Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.
Demostración Puesto que f es derivable en a se tiene

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para demostrar que f es continua en a hay que probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ o, lo que es lo mismo, que $\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$. Ahora bien,

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left(\lim_{x \to a} (x - a) \right) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Lo cual termina la demostración.

El Teorema anterior implica además que, si f no es continua en a, entonces f no puede ser derivable en a.

Lo contrario no es cierto: una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en dicho punto, como se puede comprobar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.21
La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y no es derivable en dicho punto
Para comprobar que f es derivable habría que verificar que existe y es finito el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

La función $f(x) = |x|$ está definida por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{en consecuencia} \quad \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h \geq 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

lo que pone de manifiesto que no existe el límite por no coincidir los límites por la derecha y por la izquierda de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ y por tanto que la función no es derivable en 0.

Observando la gráfica de la función $|x|$ en la Figura (2.8) se comprende de forma intuitiva que esto era de esperar, ya que en el punto $x = 0$ el crecimiento de la función cambia de forma radical: pasa de tener pendiente -1 a tener pendiente 1. En general, las funciones cuyas gráficas presenten “picos” no van a ser derivables en esos puntos (véase Figura (2.9)).

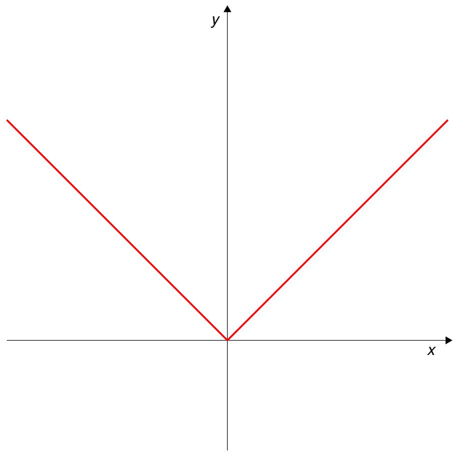


Figura 2.8: La función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, ya que los límites por la derecha y por la izquierda del cociente incremental son distintos.

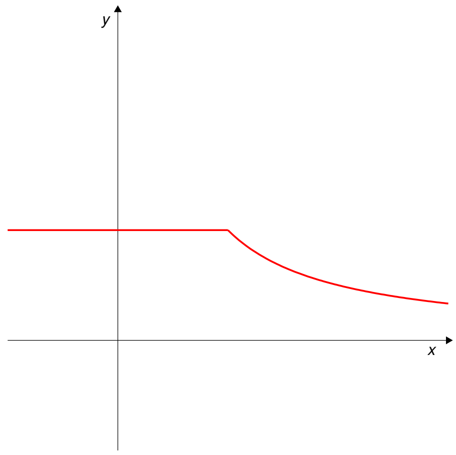


Figura 2.9: Las funciones que, como la de la figura, aún siendo continuas, presentan “picos” en determinados puntos no son derivables en dichos puntos, por la misma razón que la función $|x|$.

Podemos caracterizar la derivada como sigue: La recta secante a la curva $y = f(x)$ en dos puntos $(c, f(c))$ y $(d, f(d))$ es

$$y = p(x - c) + f(c), \quad \text{con} \quad p = \frac{f(d) - f(c)}{d - c},$$

de modo que la pendiente a esta recta secante es justamente la variación promedio de f entre c y d. Si acercamos d a c, la recta secante se acercará progresivamente a una ideal “recta tangente ”cuya pendiente será lógicamente

$f'(c)$. La ecuación de esta recta será, pues,

$$y = f'(c)(x - c) + f(c).$$

Esto ocurrirá solamente si existe esta derivada, y entenderemos que la curva $y = f(x)$ admite una recta tangente en el punto $(c, f(c))$ si f es derivable en $x = c$.

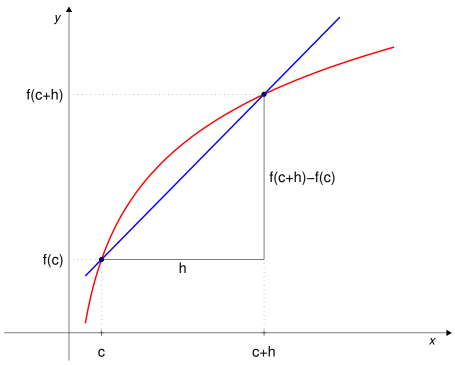


Figura 2.10: La recta secante a la curva en los puntos $(c, f(c))$ y $(c+h, f(c+h))$ tiene la ecuación $y = f(c) + \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}(x - c)$

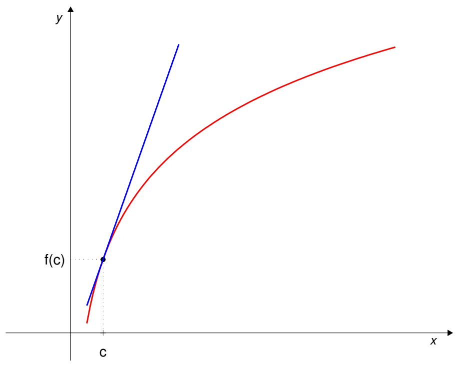


Figura 2.11: Cuando h tiende a 0 el punto $c + h$ se confunde con el punto c y la recta secante se convierte en la tangente a la curva en el punto $(c, f(c))$, de ecuación $y = f(c) + f'(c)(x - c)$.

Si una función es derivable en un conjunto D, se puede definir la *función derivada*: $f' : D \to \mathbb{R}$ que transforma cada punto $x \in D$ en la derivada de f en ese punto, $f'(x)$. Es un concepto práctico, que permite denotar las derivadas de funciones habituales con comodidad.

La notación f' que estamos usando se debe a Lagrange. Existen otras notaciones para las derivadas. Por ejemplo, $\dfrac{df}{dx}$ (debida a Leibnitz) ó $\dot{f}$ (debida a Newton). Esta última es más utilizada en Física.

2.4 Cálculo de derivadas

2.4.1 Derivadas de las funciones elementales

La derivada de las funciones elementales se calcula recurriendo directamente a la definición, como en los siguientes ejemplos, aunque en algunos casos los límites indeterminados que aparecen pueden ser complicados de calcular.

Ejemplo 2.22
Derivada de una función constante $f(x) = k$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Ejemplo 2.23
Derivada de $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

Ejemplo 2.24
Derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.4.2 Álgebra de derivadas

Conocidas las derivadas de las funciones elementales, un conjunto de propiedades conocidas como **álgebra de derivadas**, permiten calcular la derivada de otras funciones construidas combinando aquellas mediante operaciones aritméticas y composición de funciones.

ÁLGEBRA DE DERIVADAS	
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$, si $h(x) \neq 0$.
$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ (Regla de la CADENA)

TABLA DE DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Funciones elementales		Funciones compuestas (usando la Regla de la Cadena)	
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = a\,x$	$f'(x) = a$	$f(x) = a\,g(x)$	$f'(x) = a\,g'(x)$
$f(x) = a\,x + b$	$f'(x) = a$	$f(x) = a\,g(x) + b$	$f'(x) = a\,g'(x)$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = g(x)^2$	$f'(x) = 2\,g(x)\,g'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\,g'(x)$
$f(x) = x^n\ (n \neq 0)$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$f(x) = g(x)^n$	$f'(x) = n\,g(x)^{n-1}\,g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}\,g'(x)$
$f(x) = a^x\ (a > 0)$	$f'(x) = a^x\,\ln(a)$	$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)}\ln(a)g'(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)}\,g'(x)$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\,\ln(b)}$	$f(x) = \log_b(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)\,\ln(b)}\,g'(x)$
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$	$f'(x) = \cos(g(x))\,g'(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$	$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(g(x))g'(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$f(x) = \tan(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))}\,g'(x)$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \arctan(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+g(x)^2}\,g'(x)$

2.4.3 Ejemplos de cálculo de derivadas

Ejemplo 2.25
Derivada de $f(x) = (5x^3 + 2)^4$
Aplicando la fórmula de derivación de la potencia de una función, $g(x)^n$, se tiene

$$f'(x) = 4\,(5x^3 + 2)^3 \cdot (5 \cdot 3 \cdot x^2) = 60\,(5x^3 + 2)^3\,x^2$$

Ejemplo 2.26
Derivada de $f(x) = \sqrt{7 - x^3}$
Aplicando la fórmula de derivación de la raíz cuadrada de una función, $\sqrt{g(x)}$, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{7 - x^3}} \cdot (-3x^2) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{7 - x^3}}$$

Ejemplo 2.27
Derivada de $f(x) = e^{3x^2}$
Hay que aplicar la derivada de la exponencial de una función, $e^{g(x)}$,

$$f'(x) = e^{3x^2}\,(3 \cdot 2 \cdot x) = 6\,x\,e^{3x^2}$$

Ejemplo 2.28
Derivada de $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+2}$
Aplicando la fórmula de derivación de un cociente:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2)-(x^3-1)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{(3x^4+6x^2)-(2x^4-2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+2x}{(x^2+2)^2}$$

Ejemplo 2.29
Derivada de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)$
Hay que aplicar en primer lugar la fórmula de derivación del seno de una función, $\operatorname{sen}(g(x))$, y después la de la derivada de un cociente:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x+4}{x-1}\right)\left(\frac{(x-1)-(x+4)}{(x-1)^2}\right) = \frac{-5}{(x-1)^2}\,\cos\left(\frac{x+4}{x-1}\right)$$

Ejemplo 2.30
Derivada de $f(x) = x\sqrt{x^2-3}$
Hay que aplicar la derivada de un producto y la derivada de la raíz cuadrada de una función:

$$f'(x) = \sqrt{x^2-3} + x\,\frac{1}{2\sqrt{x^2-3}}(2x) = \sqrt{x^2-3} + \frac{x^2\,\sqrt{x^2-3}}{(x^2-3)} = \sqrt{x^2-3}\,\left(1+\frac{x^2}{x^2-3}\right)$$

Ejemplo 2.31
Derivada de $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2+1)}$
Hay que escribir la raíz como una potencia de exponente fraccionario, $f(x) = \big(\ln(x^2+1)\big)^{1/3}$, y aplicar la fórmula de derivación de $g(x)^n$ y luego la del logaritmo:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,\big(\ln(x^2+1)\big)^{-2/3}\,\frac{1}{x^2+1}\,(2x) = \frac{2x}{3(x^2+1)\sqrt[3]{\ln^2(x^2+1)}}$$

Ejemplo 2.32
Derivada de $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
Hay que aplicar la regla de derivación de un cociente de dos funciones:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\,\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln x}{x} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln x}{x} = \frac{\dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Ejemplo 2.33
Derivada de $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+1})$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\,\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}2x = \frac{1}{x^2+2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo 2.34
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^2+3x-1$ **en el punto** $x = 2$**.**

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

En este caso, $\quad f(x) = x^2+3x-1 \quad$ y su derivada es $\quad f'(x) = 2x+3$

Sus valores en $x = 2$ son $\quad f(2) = 4+6-1 = 9 \quad$ y $\quad f'(2) = 4+3 = 7$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = 9 + 7(x-2)$$

Ejemplo 2.35
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \ln(x^2+3)$ **en el punto** $x = 1$**.**

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

En este caso, $\quad f(x) = \ln(x^2+3) \quad$ y su derivada es $\quad f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

Sus valores en $x = 1$ son $\quad f(1) = \ln(1+3) = \ln(4) \quad$ y $\quad f'(1) = \dfrac{2}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = \ln(4) + \frac{1}{2}(x-1)$$

Ejemplo 2.36
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$ en el punto $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

En este caso, $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-1}{\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) x^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

Sus valores en $x = 1$ son $f(1) = \operatorname{arc\,tg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0.7854$ y $f'(1) = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1)$$

2.4.4 Derivada de la función inversa

Para calcular la derivada de la función inversa, se usa la regla de la cadena: Observamos que f y su inversa f^{-1} (caso de existir), vienen relacionadas por

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x, \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

Derivando en los dos miembros de esta igualdad y utilizando la Regla de la Cadena para derivar el primer miembro se tiene

$$f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot \big(f^{-1}\big)'(x) = 1, \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

y por lo tanto

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

Ejemplo 2.37
Calcular la derivada de la función $f(x) = \ln(x)$ utilizando la derivada de la función inversa.

Derivando en la identidad $e^{\ln(x)} = x$ se tiene

$$e^{\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

como es bien sabido.

Ejemplo 2.38
Calcular la derivada de la función $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$ utilizando la derivada de la función inversa.

Derivando en la identidad $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x$ se tiene $\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) \cdot \dfrac{d}{dx}\big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big) = 1$ de donde, despejando,

$$\frac{d}{dx}\big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2.4.5 Derivada logarítmica

En ocasiones, resulta cómodo derivar el logaritmo de una función para calcular su derivada. Según la regla de la cadena, si f es derivable en x y $f(x) > 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

y de aquí se puede despejar $f'(x)$.

Ejemplo 2.39
Utilizar la derivación logarítmica para calcular la derivada de la función $f(x) = a^x$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\big(a^x\big) = x\,\ln(a)$$

y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(a) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ln(a)\,f(x) = \ln(a)\,a^x$$

Ejemplo 2.40
Utilizando la derivación logarítmica, deducir la fórmula de la derivada de un producto de dos funciones.

Sea $h(x) = f(x)\cdot g(x)$. Tomando logaritmos se tiene $\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$.
Derivando en ambos miembros:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)},$$

de donde, depejando ahora $h'(x)$:

$$h'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)h(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)f(x)g(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)f(x)g(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ejemplo 2.41
Calcular la derivada de la función $f(x) = \big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\Big(\big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}\Big) = \cos(x)\,\ln\operatorname{sen}(x)$$

y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\operatorname{sen}(x)\,\ln\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\,\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\operatorname{sen}(x)\,\ln\operatorname{sen}(x) + \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

de donde

$$f'(x) = \left(-\operatorname{sen}(x)\,\ln\big(\operatorname{sen}(x)\big) + \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)\big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}$$

Ejemplo 2.42
Calcular la derivada de la función $f(x) = \left(x^2+1\right)^{2x-3}$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene $\ln f(x) = (2x-3)\,\ln(x^2+1)$ y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln(x^2+1) + (2x-3)\frac{2x}{x^2+1}$$

de donde

$$f'(x) = \left(2\ln(x^2+1) + \frac{2x(2x-3)}{x^2+1}\right) f(x) = \left(2\ln(x^2+1) + \frac{2x(2x-3)}{x^2+1}\right)\left(x^2+1\right)^{2x-3}$$

2.4.6 Derivación implícita

En ocasiones la relación entre dos variables no viene expresada explícitamente, es decir, con una de ellas "despejada", como en $y = x\ln(x^2+1)$, sino que viene dada mediante una relación entre ambas (una ecuación), como en $x^2y + y^3 = 1$. Se dice en estos casos que y viene **implícitamente definida** por dicha ecuación.

Sin embargo, es posible, utilizando la Regla de la Cadena, derivar con respecto de x directamente en la ecuación. Para ello se deriva con respecto de x en ambos miembros de la ecuación, teniendo en cuenta que y es una función de x: $y = y(x)$.

Por ejemplo, en la ecuación anterior $x^2y + y^3 = 1$ se tendría

$$x^2y + y^3 = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2y + y^3\right) = \frac{d}{dx}\left(1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2y\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \left(2xy + x^2y'\right) + \left(3y^2y'\right) = 0$$

Agrupando los términos que contienen y' y despejando se tiene:

$$2xy + x^2y' + 3y^2y' = 2xy + \left(x^2 + 3y^2\right)y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{-2xy}{x^2+3y^2}$$

Es decir: en un punto (x, y) que verifique la ecuación $x^2y + y^3 = 1$, la derivada de y con respecto de x es $y' = \dfrac{-2xy}{x^2+3y^2}$.

Ejemplo 2.43
Derivar implícitamente en el ecuación $x\ln(y^2+1) + y = 1$ y despejar la derivada de y con respecto de x.

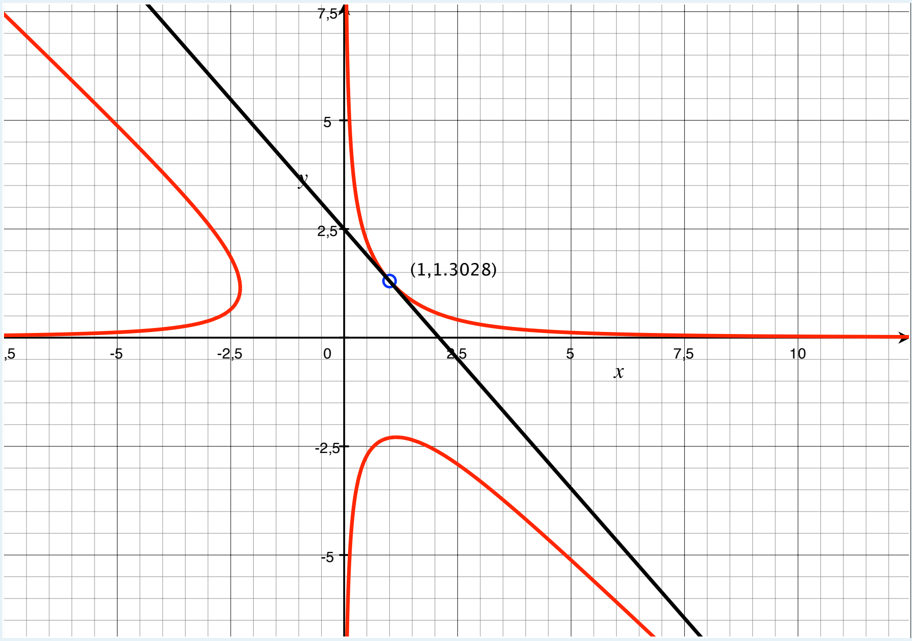
$$x\ln(y^2+1) + y = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\Big(x\ln(y^2+1) + y\Big) = \frac{d}{dx}\Big(x\ln(y^2+1)\Big) + \frac{d}{dx}\Big(y\Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(y^2+1) + x\cdot\frac{d}{dx}\Big(\ln(y^2+1)\Big) + \frac{d}{dx}y = \ln(y^2+1) + x\left(\frac{2yy'}{y^2+1}\right) + y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(y^2+1) + \left(\frac{2xy}{y^2+1} + 1\right)y' = \ln(y^2+1) + \left(\frac{2xy + y^2 + 1}{y^2+1}\right)y' = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-\ln(y^2+1)}{\dfrac{2xy+y^2+1}{y^2+1}} = \frac{-(y^2+1)\ln(y^2+1)}{2xy+y^2+1}$$

Ejemplo 2.44
Los puntos del plano que verifican la ecuación $x^2y + xy^2 = 3$ forman una curva con varias ramas. El punto $(1, 1.3028)$ pertenece a una de ellas. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.



Calculamos, implítamente, la derivada de y con respecto de x:

$$x^2y + xy^2 = 3 \Rightarrow 2xy + x^2y' + y^2 + x \cdot 2yy' = 0 \;\Leftrightarrow\; (2xy + y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{y' = \frac{-(2xy + y^2)}{2xy + x^2}}$$

Sustituyendo ahora $(x, y) = (1, 1.3028)$ obtendremos la derivada de y con respecto a x en dicho punto, es decir, la pendiente de la recta tangente en dicho punto:

$$y' = \left.\frac{-(2xy + y^2)}{2xy + x^2}\right|_{x=1, y=1.3028} = \frac{-(2 \times 1.3028 + (1.3028)^2)}{2 \times 1.3028 + 1} \approx -1.1934$$

Escribimos ahora la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1.3028)$ con pendiente $p = -1.1934$:

$$y = 1.3028 - 1.1934(x - 1) = -1.1934x + 2.4962$$

2.5 Crecimiento y decrecimiento

Funciones crecientes y decrecientes
Una función, f, definida en un intervalo I, se dice que es **creciente** en I si $f(x_1) \le f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Análogamente, se dice que f es **decreciente** en I si $f(x_1) \ge f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Las funciones que son crecientes o decrecientes en todo su dominio de definición se denominan **monótonas**. Por ejemplo, e^x es una función monótona creciente.

La derivada proporciona un criterio simple para saber cuándo una función es creciente o decreciente:

Criterio de crecimiento/decrecimiento

Sea f derivable en (a, b).

a) Si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b)

b) Si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b)

El conocimiento de los intervalos donde una función es creciente y decreciente proporciona, a su vez, información sobre sus mínimos y máximos locales, como se verá más adelante.

Ejemplo 2.45

Estudiar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Esta función no está definida para $x = \pm 1$. Su derivada es

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

que se anula para $x = 0$. En consecuencia, los puntos en los que f' puede cambiar de signo son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$-2x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(x^2-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$

Así,

$$\begin{cases} f \text{ es creciente en } (-\infty, -1) \\ f \text{ es creciente en } (-1, 0) \\ f \text{ es decreciente en } (0, 1) \\ f \text{ es decreciente en } (1, +\infty) \end{cases}$$

Ejemplo 2.46

Estudiar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Esta función solo está definida para $x > 0$. Su derivada es

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \ln(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{x^2}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

que se anula para $2 - \ln x = 0$, es decir, para $x = e^2$. En consecuencia, f' solo puede cambiar de signo en $x = e^2$.

	$(0, e^2)$	$(e^2, +\infty)$
$2 - \ln x$	$+$	$-$
$2x\sqrt{x}$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$

Así,

$$\begin{cases} f \text{ es creciente en } (0, e^2) \\ f \text{ es decreciente en } (e^2, +\infty) \end{cases}$$

2.6 Máximos y mínimos relativos

Hablando sin precisión, se dice que una función tiene un mínimo (respectivamente máximo) relativo en un punto $x = c$ si el valor que toma en dicho punto $f(c)$ es menor o igual (resp. mayor o igual) que los valores que toma en los puntos del entorno de c.

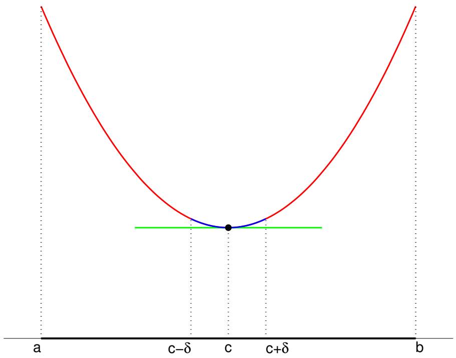


Figura 2.12: Mínimo local o relativo. Si f está definida en (a, b) (abierto) y $c \in (a, b)$, se dice que f tiene un mínimo relativo en c si, para algún valor $\delta > 0$ se tiene
$f(c) \leq f(x)\ \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$.

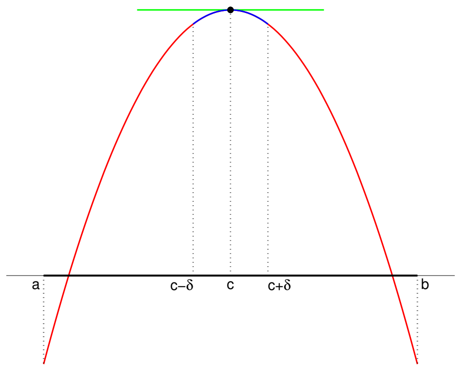


Figura 2.13: Máximo local o relativo. Si f está definida en (a, b) (abierto) y $c \in (a, b)$, se dice que f tiene un máximo relativo en c si, para algún valor $\delta > 0$ se tiene
$f(c) \geq f(x)\ \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$.

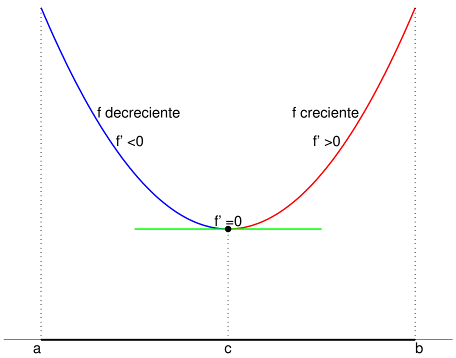


Figura 2.14: Si f es decreciente a la izquierda de $c \in (a, b)$ y creciente a su derecha, es claro que f tiene un mínimo relativo en el punto $x = c$.

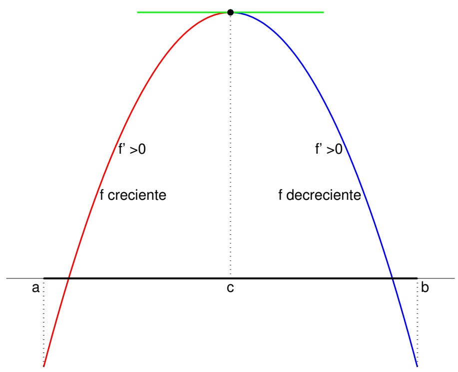


Figura 2.15: Si f es creciente a la izquierda de $c \in (a, b)$ y decreciente a su derecha, es claro que f tiene un máximo relativo en el punto $x = c$.

Criterio de mínimo / máximo local
Sea f una función continua en (a, b) y sea c un punto de (a, b).

a) Si f es decreciente en (a, c) y creciente en (c, b), entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$.

b) Si f es creciente en (a, c) y decreciente en (c, b), entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.

Si f es derivable y su derivada es continua en (a, b), los resultados anteriores se pueden expresar en función del signo de la derivada.

Criterio de mínimo / máximo local utilizando la derivada

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable y con derivada continua en (a, b), y sea $c \in (a, b)$ un punto interior al intervalo.

a) Si $f' \leq 0$ en (a, c) y $f' \geq 0$ en (c, b), entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$ y se tiene $f'(c) = 0$ (tangente horizontal en $(c, f(c))$).

b) Si $f' \geq 0$ en (a, c) y $f' \leq 0$ en (c, b), entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$ y se tiene $f'(c) = 0$ (tangente horizontal en $(c, f(c))$).

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que los puntos donde se anule la derivada, $f'(x) = 0$, son candidatos a ser máximos ó mínimos relativos de la función.

Pero, tras identificarlos, es necesario cerciorarse de que son efectivamente máximos o mínimos, ya que no todos lo son, como se muestra en el ejemplo de la Figura (2.16).

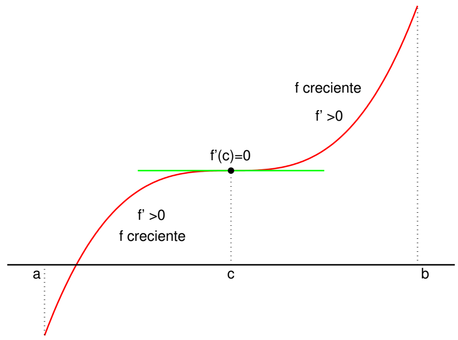


Figura 2.16: Esta función tiene tangente horizontal en el punto $x = c$, aunque no tiene en dicho punto ni un mínimo ni un máximo relativos. Lo que tiene es un **punto de inflexión**, es decir un punto donde cambia su concavidad (en este caso, cambia de cóncava a convexa).

Puntos críticos

Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** de dicha función.

Los puntos críticos pueden ser, además de máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión.

No hay que olvidar, no obstante, que una función continua puede tener un extremo relativo (mínimo o máximo) en un punto en el que no se anule la derivada.

Esto puede suceder en un punto en que la función continua no sea derivable, como es el caso de la función de la Figura (2.17).

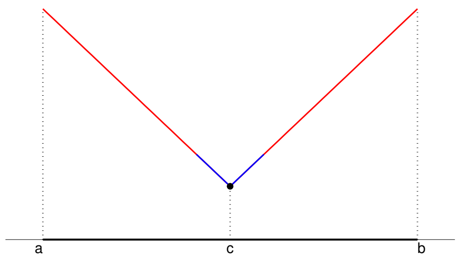


Figura 2.17: Esta función tiene un mínimo relativo en el punto $x = c$ aunque no se verifica $f'(c) = 0$: de hecho no se puede hablar de $f'(c)$, ya que f no es derivable en c.

En la búsqueda de máximos y mínimos relativos de una función hay que analizar, además de los puntos críticos, los puntos en los que la función no es derivable, si los hay.

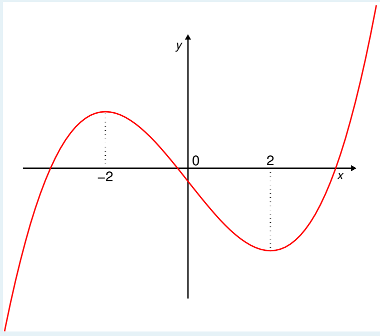
Ejemplo 2.47
Encontrar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 12x - 3$.

Para determinar los extremos locales se analizan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Para ello se comienza por determinar los puntos críticos (los puntos en que se anula la derivada)

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Estudiando el signo de f' se tiene que

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ en } (-\infty, -2) \\ f'(x) < 0 \text{ en } (-2, 2) \\ f'(x) > 0 \text{ en } (2, +\infty) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ es creciente en } (-\infty, -2) \\ f \text{ es decreciente en } (-2, 2) \\ f \text{ es creciente en } (2, +\infty) \end{cases}$$



Está claro de lo anterior que f tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Ejemplo 2.48
Encontrar los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$.

Se trata de una función polinómica, en consecuencia está bien definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Hay que estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, es decir, puesto que f es derivable en $\mathbb{R}$, el signo de su derivada:

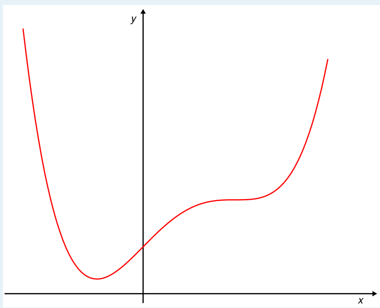
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 4(x-1)^2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Analizamos el signo de f':

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

Se tiene, pues

$$\begin{cases} f' < 0 \text{ en } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ f' > 0 \text{ en } \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ es decreciente en } (-\infty, -\frac{1}{2}) \\ f \text{ es creciente en } (-\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$$



de modo que

$$f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.49

La población de cierta especie sigue la siguiente función

$$P(t) = a + \frac{100t}{e^{t/2}}, \quad t \geq 0$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medida en miles), t el tiempo (medido en meses) y a es una constante positiva.
(1) Calcular a sabiendo que inicialmente la población constaba de 300 individuos.
(2) ¿En qué momento se puede predecir que alcanzará la población su máximo? ¿Cuánto es el valor de dicho máximo?
(3) ¿A qué tiende la población a largo plazo?
(4) Si se sabe que esta especie está en peligro de extinción cuando el número de sus individuos es menor que 100, ¿puede ocurrir que esta población entre de peligro de extinción?

(1) Si inicialmente había 300 individuos, se tiene

$$P(0) = \boxed{a = 300}$$

(2) Lo que queremos calcular es para qué valor de la variable independiente t se produce el máximo de esta función. Para ello igualamos a cero la derivada.

$$P'(t) = 100\frac{e^{t/2} - \frac{1}{2}te^{t/2}}{(e^{t/2})^2} = 100\frac{\left(1 - \dfrac{t}{2}\right)}{e^{t/2}} = 0 \iff 1 - \frac{t}{2} = 0 \iff \boxed{t = 2}$$

Tenemos que asegurarnos de que para $t = 2$ se produce efectivamente un máximo de la función, pero esto es claro, ya que $P'(t)$ es positiva a la izquierda de $t = 2$ y negativa a su derecha.
El valor de dicho máximo es el valor de $P(t)$ en $t = 2$:

$$P(2) = 300 + \frac{100 \times 2}{e^{2/2}} = 300 + \frac{200}{e} \approx 373.57 \approx 374 \Rightarrow \boxed{\text{El valor máximo es 374}}.$$

(3) Matemáticamente, el comportamiento de la población a largo plazo viene dado por el comportamiento de la función cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} 300 + \frac{100t}{e^{t/2}} = 300 + 100 \times \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t/2}} = 300 + 100 \times 0 = 300.$$

Es decir, $\boxed{\text{a largo plazo el tamaño de la población se estabiliza en 300 individuos}}$.

(4) El tamaño de nuestra población no desciende en ningún instante por debajo de 100; de hecho no desciende por debajo de 300. En efecto, ya hemos visto que el valor máximo es 374 y que asintóticamente tiende a 300. Si descendiera de 300, para volver a “subir” tendría que tener un mínimo relativo, y ya hemos visto que $t = 2$ es el único punto crítico. Así pues, $\boxed{\text{esta población no entrará en peligro de extinción.}}$

Ejemplo 2.50
Para cierta población de microorganismos, la densidad en el instante t (medido en minutos), viene dada por

$$p(t) = p_0 + \frac{at}{e^{kt}},$$

siendo p_0, a y k parámetros por determinar. Se sabe que la densidad inicial era de 2850, y se ha observado que el valor máximo $p_m = 9344$ se alcanza en el tiempo $t_m = 7.5$. Determinar los valores de p_0, a y k.

Tenemos tres parámetros que determinar y tres informaciones para hacerlo:
(1) La densidad inicial es de 2850: $p(0) = 2850$
(2) El valor máximo se obtiene para $t_m = 7.5$: $p'(7.5) = 0$
(3) El valor máximo es 9344: $p(7.5) = 9344$

De (1) se obtiene

$$p(0) = \boxed{p_0 = 2850}$$

De (2) se tiene

$$p'(t) = \frac{a(1-kt)}{e^{kt}} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - kt = 0 \text{ luego } 1 - 7.5k = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{k = \frac{1}{7.5}(\approx 0.13333)}$$

Finalmente, de (3) se tiene

$$p(7.5) = p_0 + \frac{7.5a}{e^{7.5k}} = 2850 + \frac{7.5a}{e} = 9344 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{e}{7.5}(9344 - 2850) \Rightarrow \boxed{a \approx 2353.67}$$

2.7 Concavidad y convexidad

Aunque se puede dar una definición de función convexa o concáva más general que la que sigue, esta es suficiente a los efectos de este curso.

Funciones convexas y cóncavas
Una función $f(x)$ derivable es **convexa** en (a, b) si su derivada, $f'(x)$, es creciente en (a, b).

Si la derivada, $f'(x)$, es decreciente en (a, b), entonces la función es **cóncava**.

Observación: en ocasiones se genera cierta confusión porque en algunos ámbitos las denominaciones cóncava y convexa están intercambiadas. En caso de duda, conviene especificar cuál es la que se está usando.

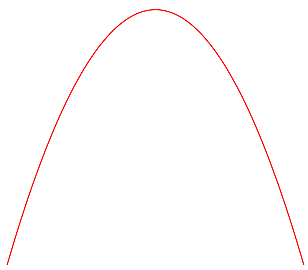


Figura 2.18: Función cóncava: su derivada es decreciente. Tiene forma de gorra o de monte.

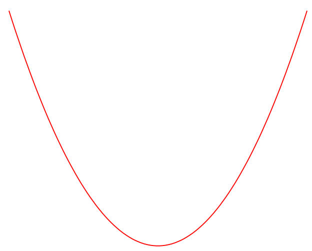


Figura 2.19: Función convexa: su derivada es creciente. Tiene forma de copa o de valle.

Como se ha visto con anterioridad, el signo de la derivada de una función indica si esta es creciente o decreciente. En consecuencia se puede utilizar el signo de «la derivada de la derivada» para determinar la convexidad o concavidad de una función.

Derivada segunda
Si la derivada de una función $f(x)$ es, a su vez, derivable, se dice que $f(x)$ es dos veces derivable, a la derivada de la derivada se le llama **derivada segunda** y se denota $f''(x)$.

Utilizando la derivada segunda de f, se tiene el siguiente criterio de convexidad/concavidad:

Criterio de convexidad / concavidad
Si $f(x)$ es dos veces derivable en (a, b), se tiene:

a) Si $f''(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es convexa en (a, b).

b) Si $f''(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es cóncava en (a, b).

Puntos de inflexión
Los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o viceversa se denominan **puntos de inflexión**. Utilizando el criterio anterior se tiene:

a) Si $f''(x) \geq 0\ \forall x \in (a, c)$ y $f''(x) \leq 0\ \forall x \in (c, b)$, entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = c$, en el que pasa de convexa a cóncava.

b) Si $f''(x) \leq 0\ \forall x \in (a, c)$ y $f''(x) \geq 0\ \forall x \in (c, b)$, entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = c$, en el que pasa de cóncava a convexa.

Ejemplo 2.51
$f(x) = x^2$

Esta función es polinómica, luego está bien definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
Derivadas de f: $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$.
Por lo tanto se tiene $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y en consecuencia que f' es creciente y que f es convexa en $\mathbb{R}$.
f no tiene puntos de inflexión.

Ejemplo 2.52
$f(x) = x^3$

f está bien definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
Derivadas de f: $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$.
Intervalos de convexidad: f'' solo se anula para $x = 0$ y es

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'' < 0 \text{ en } (-\infty, 0) & \Rightarrow f \text{ es cóncava en } (-\infty, 0) \\ f'' > 0 \text{ en } (0, +\infty) & \Rightarrow f \text{ es convexa en } (0, +\infty) \end{array} \right. \Longrightarrow \quad f \text{ tiene un punto de inflexión en } x = 0$$

2.8 Representación gráfica de funciones

Los elementos básicos descritos en el Tema 1 (dominio, ceros, signo, asíntotas), junto con la información proporcionada por la derivadas primera y segunda sobre el crecimiento o decrecimiento de la función, sus extremos relativos, su convexidad o concavidad y sus puntos de inflexión, permiten esbozar con mucho detalle la gráfica de la función.

Estos aspectos se resumen en el cuadro siguiente:

PROCEDIMIENTO PARA LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

SIN USAR LAS DERIVADAS

Dominio, corte con los ejes y signo de la función:	
Dominio	Determinar el conjunto D de los valores de x para los que está definida la función
corte con el eje $OY(*)$	Calcular, si existe, el punto $(0, y)$ con $y = f(0)$.
cortes con el eje $OX(*)$	Calcular, si existen, los puntos en que la gráfica corta al eje OX, que son los puntos $(x, 0)$ donde x es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.
signo de la función $(*)$	Determinar los intervalos en donde la función es positiva y negativa $\{x \in D \, : \, f(x) > 0\}$ (la gráfica de la función está por encima del eje OX) $\{x \in D \, : \, f(x) < 0\}$ (la gráfica de la función está por debajo del eje OX)
$(*)$No es imprescindible. Sólo si es «fácil».	
A síntotas:	
asíntotas verticales	Analizar la existencia de valores de $x = k$ para los cuales se tenga $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \pm\infty$ o bien $\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \pm\infty$
asíntotas horizontales	Calcular, si existen, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Si alguno de ellos tiene un valor finito, por ejemplo k, entonces la recta $y = k$ es una asíntota horizontal.
asíntotas oblicuas	Son las rectas $y = mx + n$ tales que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx - n) = 0$ Si existen, se pueden calcular m y n mediante $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$

UTILIZANDO LAS DERIVADAS

Monotonía:	
intervalos de crecimiento	Calcular los intervalos donde $f'(x) > 0$: en estos intervalos la función es creciente.
intervalos de decrecimiento	Calcular los intervalos donde $f'(x) < 0$: en estos intervalos la función es decreciente.
Conociendo los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función es posible determinar los máximos y mínimos locales de f.	
extremos relativos	Calcular los puntos $x = a$ tales que $f'(a) = 0$. $\begin{cases} \text{si } f''(a) > 0, \text{ x=a es un mínimo local} \\ \text{si } f''(a) < 0, \text{ x=a es un máximo local} \end{cases}$
Curvatura:	
intervalos de convexidad	Calcular los intervalos donde $f''(x) > 0$
intervalos de concavidad	Calcular los intervalos donde $f''(x) < 0$
puntos de inflexión	Calcular los puntos $x = a$ tales que $f''(a) = 0$. $\begin{cases} \text{si } f'''(a) > 0, \text{ x=a cambio cóncavo a convexo} \\ \text{si } f'''(a) < 0, \text{ x=a cambio convexo a cóncavo} \end{cases}$

Ejemplo 2.53
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Dominio de definición: $(0, +\infty)$
Corte con el eje OY: no hay, ya que el punto $x = 0$ no pertenece al dominio de definición.
Corte con el eje OX: la ecuación $\ln x = 0$ solo tiene la solución $x = 1$. Luego el único punto de corte es $(1, 0)$.
Signo de la función: claramente se tiene que $f(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$ y que $f(x) > 0$ para $x \in (1, +\infty)$. Esto nos permite ya determinar las regiones del plano donde está la gráfica (ver Figuras)
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Es decir, f tiene una asíntota horizontal para $y = 0$ cuando $x \to +\infty$
Asíntotas verticales: el único punto donde f puede tener una asíntota vertical es a la derecha de $x = 0$. Calculamos el límite correspondiente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

Es decir, f tiene una asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \to +\infty$

Derivada: La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

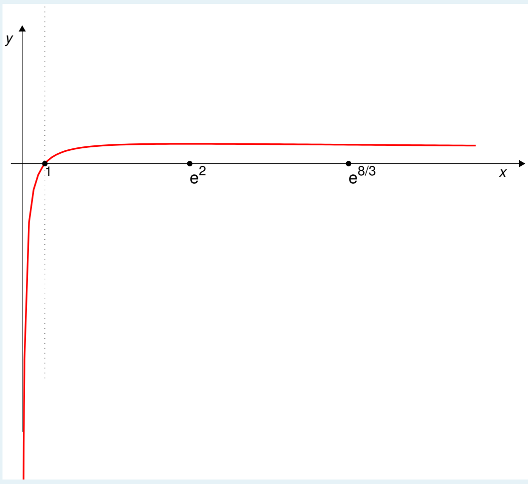
Crecimiento y decrecimiento: El denominador, $2x\sqrt{x}$, es positivo en todo el dominio de definición, luego el signo de la derivada viene determinado por $2 - \ln x$, que se anula en $x = e^2$, es positivo en $(0, e^2)$ y negativo en $(e^2, +\infty)$: la función es creciente en $(0, e^2)$ y decreciente en $(e^2, +\infty)$.

Extremos: La función cambia de creciente a decreciente en el punto $x = e^2$, por lo tanto tiene un máximo en dicho punto. El valor de la función en $x = e^2$ es $f(e^2) = \dfrac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \dfrac{2}{e} \approx 0.73$.
Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-\dfrac{1}{x}2x\sqrt{x} - (2 - \ln x)3\sqrt{x}}{4x^3} = \frac{-8 + 3\ln x}{4x^{5/2}}$$

Convexidad y concavidad: La derivada segunda se anula cuando $3\ln x - 8 = 0$, es decir, para $x = e^{8/3} \approx 14.4$, y se tiene

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{en } (0, e^{8/3}) \quad \Rightarrow f \text{ es cóncava en } (0, e^{8/3}) \\ f''(x) > 0 & \text{en } (e^{8/3}, +\infty) \quad \Rightarrow f \text{ es convexa en } (e^{8/3}, +\infty) \end{cases}$$



Ejemplo 2.54
Representar gráficamente la función $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$

Dominio de definición: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Corte con el eje OY: no hay, ya que el punto $x = 0$ no pertenece al dominio de definición.
Corte con el eje OX: la función se anula cuando $2x + \dfrac{1}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = -\dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0.79$
Signo de la función: claramente se tiene que $f(x) > 0$ si $x > 0$. Por otro lado,

$$2x^3 + 1 < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^3 < \frac{-1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x < \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} f \text{ es negativa en } (-\infty, \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}) \\ f \text{ es positiva en } (\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, 0) \cup (0, +\infty) \end{cases}$$

Asíntotas horizontales: f no tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Asíntotas verticales: el único punto donde f puede tener asíntotas verticales es $x = 0$. Es obvio que la función tiende a infinito cuando x se acerca a cero y que lo hace a $+\infty$, ya que es positiva tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

Asíntotas oblicuas: son, si existen, las rectas $y = mx + n$ tales que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx - n) = 0$. Si existen, se pueden calcular m y n mediante $m = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$. En este caso:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x^3}\right) = 2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + \frac{1}{x^2}}{x}$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2} - 2x\right)$$

Es decir, la recta $y = 2x$ es una asíntota de la función, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} \qquad \text{que solo se anula para } x = 1$$

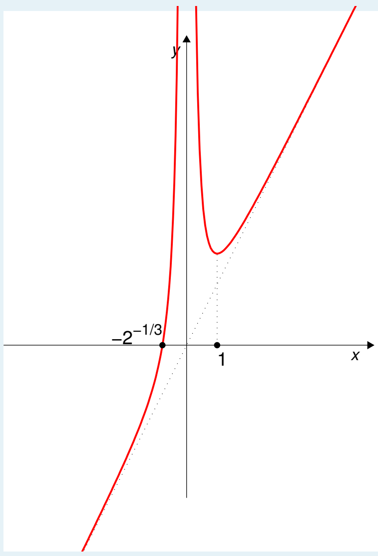
Crecimiento y decrecimiento:
Para $x < 0$ es $x^3 < 0$. Luego $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3} > 2 > 0$ en $(-\infty, 0)$.
En el intervalo $(0, 1)$, $x^3 < 1$, luego $\dfrac{2}{x^3} > 2$, luego $f'(x) < 0$.
Finalmente, en $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, ya que $\dfrac{2}{x^3} < 2$.
Resumiendo:

$$\begin{cases} f \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \\ f \text{ es decreciente en } (0, 1) \\ f \text{ es creciente en } (1, +\infty) \end{cases}$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que f tiene un mínimo en $x = 1$.
Derivada segunda:

$$f''(x) = -2\,(-3)\,x^{-4} = \frac{6}{x^4}$$

Convexidad y concavidad: La derivada segunda es siempre positiva, luego f es convexa en sus intervalos de definición.



Ejemplo 2.55
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Dominio de definición: $(-\infty, +\infty)$
Corte con el eje OY**:** $f(0) = 1$, luego la gráfica corta al eje OY en $(0, 1)$.
Corte con el eje OX**:** no hay, ya que la función no se anula en ningún punto.
Signo de la función: claramente se tiene que $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, es fácil observar que la función es simétrica, es decir, $f(x) = f(-x)$.
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Es decir, $y = 0$ es una asíntota horizontal de f.
Asíntotas verticales: no hay.
Asíntotas oblicuas: no hay, ya que hay horizontales, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

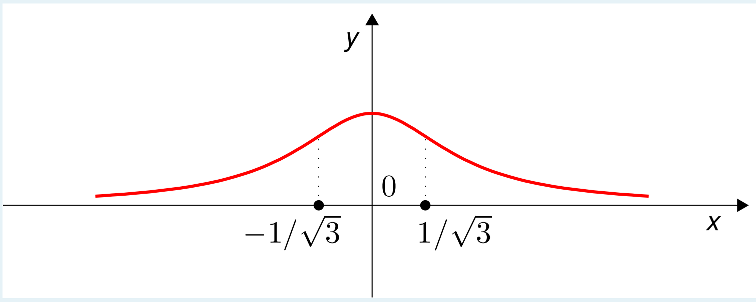
que solo se anula para $x = 0$.
Crecimiento y decrecimiento: Puesto que el denominador, $(x^2+1)^2$ es siempre positivo, es obvio $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$. Por lo tanto,

$$\begin{cases} f \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \\ f \text{ es decreciente en } (0, +\infty) \end{cases}$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que f tiene un máximo en $x = 0$, en el cual $f(0) = 1$.
Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = (x^2+1)\,\frac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^4} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

Convexidad y concavidad: La derivada segunda se anula cuando $6x^2 - 2 = 2(3x^2-1) = 0$, esto es, para $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Puesto que f tiene un máximo en $x = 0$, necesariamente ha de ser cóncava en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y convexa en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$.



Ejemplo 2.56
Representación gráfica de $f(x)=\dfrac{-x^2}{x+1}$

Dominio de definición: $(-\infty,-1)\cup(-1+\infty)$
Corte con el eje OY**:** $f(0)=0$, luego la gráfica corta al eje OY en $(0,0)$.
Corte con el eje OX**:** el único es $(0,0)$.
Signo de la función: teniendo en cuenta que el numerador es siempre negativo, claramente se tiene que:

$$\begin{cases} f(x)>0 \text{ si } x<-1 \\ f(x)<0 \text{ si } x>-1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x+1}=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x+1}=+\infty$$

Es decir, la función no tiene asíntotas horizontales.
Asíntotas verticales: es claro que tiene la asíntota vertical $x=-1$. Veamos los signos:

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-x^2}{x+1}=-\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-}\frac{-x^2}{x+1}=+\infty$$

Asíntotas oblicuas: puesto que $\dfrac{-x^2}{x+1}=(-x+1)-\dfrac{1}{x+1}$, se ve que $y=-x+1$ es asíntota oblicua de $\dfrac{-x^2}{x+1}$.
En efecto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x+1}-(-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x+1}+x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}$$

lo que prueba que, efectivamente $y=-x+1$ es asíntota oblicua, tanto para $x\to+\infty$ como para $x\to-\infty$.
Derivada:

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot(x+1)-(-x^2)}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x}{(x+1)^2}=\frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$$

que se anula para $x=0$ y para $x=-2$.
Crecimiento y decrecimiento: Puesto que el denominador de f', $(x+1)^2$, es siempre positivo, se tiene que

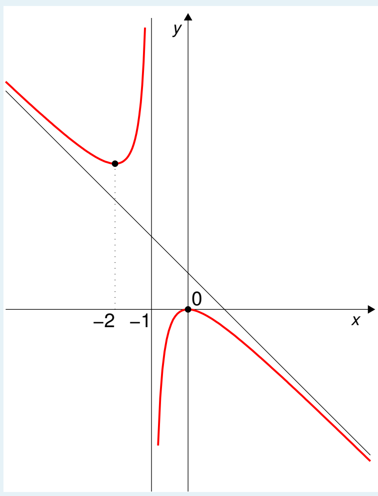
$$\begin{cases} f'(x)<0 \text{ en } (-\infty,-2) \\ f'(x)>0 \text{ en } (-2,-1)\cup(-1,0) \\ f'(x)<0 \text{ en } (0,\infty) \end{cases} \quad \text{y por lo tanto que} \quad \begin{cases} f \text{ es decreciente en } (-\infty,-2) \\ f \text{ es creciente en } (-2,-1)\cup(-1,0) \\ f \text{ es decreciente en } (0,\infty) \end{cases}$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que f tiene un mínimo en $x=-2$, en el cual $f(-2)=4$, y tiene un máximo en $x=0$, en el cual $f(0)=0$.
Derivada segunda:

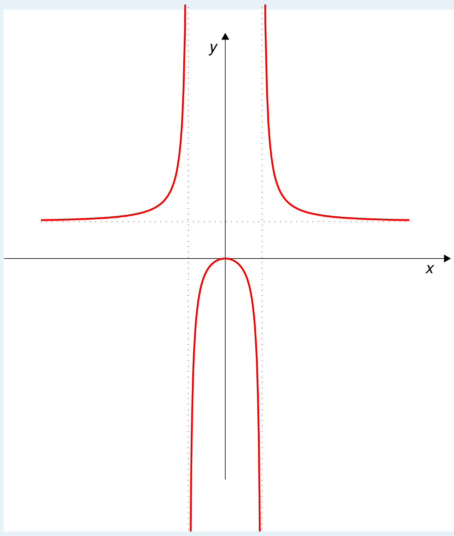
$$f''(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}$$

Convexidad y concavidad: el numerador es siempre negativo.
Es obvio que:

$$\begin{cases} f(x)''>0 \text{ si } x<-1 & \text{(convexa)} \\ f(x)''<0 \text{ si } x>-1 & \text{(cóncava)} \end{cases}$$



Ejemplo 2.57
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$



Dominio de definición: la función está bien definida excepto cuando $x^2 - 1 = 0$, es decir, cuando $x = \pm 1$. Luego el dominio es $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
Corte con el eje OY: el corte de la gráfica de la función con el eje OY se produce en el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$.
Corte con el eje OX: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0$, es decir $x = 0$.
Signo de la función: el numerador, x^2, es siempre positivo. Luego el signo de la función coincide con el signo del denominador:
$x^2 - 1 < 0 \iff x^2 < 1 \iff x \in (-1, 1)$.
Es decir,
$f(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$f(x) < 0$ en $(-1, 1)$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

Es decir, $y = 1$ es asíntota horizontal de f para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$.
Asíntotas verticales: las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = -1$.

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(1)^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to(1)^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

Asíntotas oblicuas: no hay, ya que hay horizontales, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

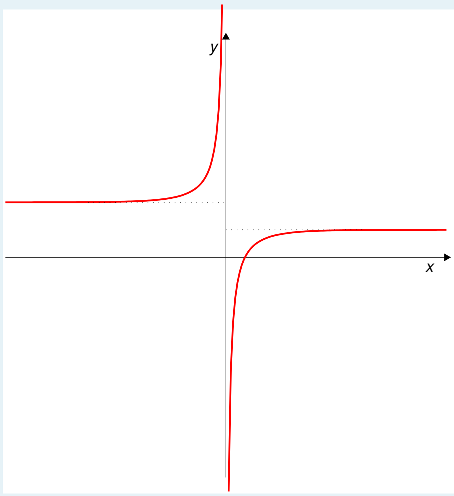
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x\,x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

que solo se anula para $x = 0$.
Crecimiento y decrecimiento: Claramente se tiene que:
$f'(x) > 0$ para $x < 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$.
$f'(x) < 0$ para $x > 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $(0, 1)$ y en $(1, \infty)$.
Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que en $x = 0$ (punto en que se anula la derivada) la función tiene un máximo local. No tiene más extremos, ya que la derivada no se anula en más puntos y la función es derivable en todos los puntos en los que está definida.
Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(x^2-1)^2 + 2x\cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-2\cdot(x^2-1) + 8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

Convexidad y concavidad: $6x^2 + 2$ es siempre positivo; $(x^2-1)^3$ es positivo cuando $|x| > 1$ y negativo si $|x| < 1$. En consecuencia f'' es positiva y por tanto f es convexa $(\cup)$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$ y f'' es negativa y f es cóncava $(\cap)$ en $(-1, 1)$

Ejemplo 2.58
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 1}$



Dominio de definición: la función está bien definida excepto cuando $e^x - 1 = 0$, es decir, cuando $x = 0$. Luego el dominio es $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Corte con el eje OY: no hay, ya que la función no está definida en $x = 0$.
Corte con el eje OX: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x - 2 = 0$, es decir $x = \ln(2)$.
Signo de la función:
En $(-\infty, 0)$, $e^x < 1 < 2$, luego $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} > 0$.
En $(0, \ln(2))$, se tiene $1 < e^x < 2$, luego $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} < 0$
En $(\ln(2), \infty)$, se tiene $1 < 2 < e^x$, luego $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} > 0$
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = 2$$

Es decir, $y = 1$ es asíntota horizontal de f para $x \to +\infty$ e $y = 2$ lo es para $x \to -\infty$.
Asíntotas verticales: la única posible asíntota vertical es $x = 0$, es decir, el eje OY,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = -\infty$$

Asíntotas oblicuas: no hay, ya que hay horizontales, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

que no se anula en ningún punto.
Crecimiento y decrecimiento: La derivada es siempre positiva, ya que lo son numerador y denominador. Por tanto f es creciente en cada uno de sus intervalos de definición.
Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que f no tiene extremos locales, puesto que la derivada no se anula en ningún punto y no hay otros posibles extremos, dado que f es derivable en todos los puntos en los que está definida.
Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)^2 - 2e^x(e^x - 1)e^x}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x(e^x - 1) - 2e^x e^x}{(e^x - 1)^3} = \frac{e^{2x} - e^x - 2e^{2x}}{(e^x - 1)^3} = \frac{-e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^3} = \frac{-(e^{2x} + e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

Convexidad y concavidad: Hay que estudiar el signo de la derivada segunda.
El numerador, $-(e^{2x} + e^x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. El denominador, $(e^x - 1)^3$ es negativo en $(-\infty, 0)$ (ya que $e^x < 1$), y es positivo en $(0, +\infty)$ (ya que $e^x > 1$). En consecuencia

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ en } (-\infty, 0) \\ f''(x) < 0 \text{ en } (0, +\infty) \end{cases}$$

Luego $f(x)$ es convexa ($\cup$) en $(-\infty, 0)$ y cóncava ($\cap$) en $(0, +\infty)$.

2.9 Aproximación de funciones por polinomios: polinomio de Taylor

En muchas ocasiones interesa sustituir una función (más o menos complicada o "difícil" de calcular) por otra función más sencilla que "se parezca" a ella (en algún sentido a precisar). Estas funciones más sencillas con frecuencia son polinomios, debido a que su evaluación solo requiere hacer sumas y multiplicaciones.

El "parecido" del polinomio con la función se puede buscar de distintas formas: podemos requerir que el polinomio se parezca mucho a la función cerca de un punto dado o bien que se parezca "en algo" de forma más global (un intervalo, por ejemplo). En esta sección nos interesamos por la primera de estas opciones: un polinomio que se parezca mucho a una función cerca de un punto dado.

Comenzamos por el caso más sencillo: sustitución de una función por una recta.

2.9.1 Aproximación lineal

Recordemos el concepto de recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto dado $x = c$: Es una recta que "toca" a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ con igual pendiente que la curva. La ecuación de esta recta se puede obtener fácilmente conociendo el valor de $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$ en el punto $x = c$:

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

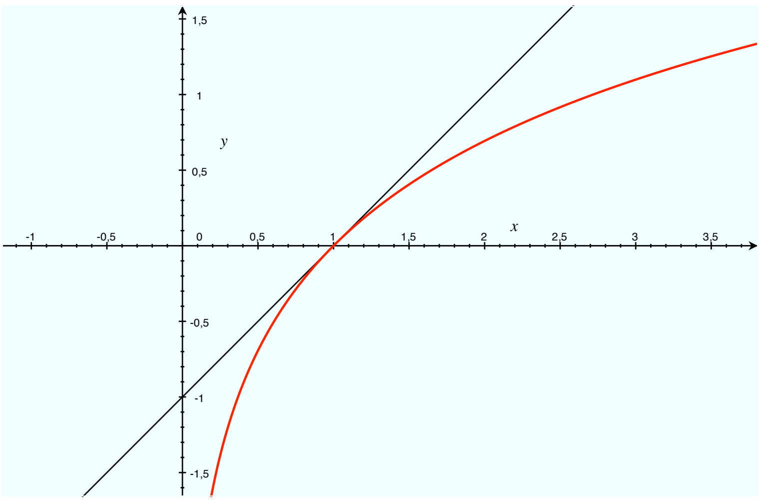


Figura 2.20: Curva $y = \ln(x)$ y su recta tangente en el punto $x = 1$, de ecuación $y = x - 1$.

Como se puede observar, la recta tangente, cerca del punto de tangencia, "se parece" mucho a la función. Por ejemplo, en el caso de la Figura 2.20, en el punto $x = 0.95$ el valor de f es $f(0.95) = -0.0513$ y el valor en el mismo punto de la tangente es $0.95 - 1 = -0.05$.

Esto sugiere la idea de que, cerca del punto $x = 1$, se puede aproximar la función $y = \ln(x)$ por su tangente en dicho punto $y = x - 1$. Obviamente, esta aproximación solo es válida si x está cerca de 1, es decir, si $|x - 1|$ es suficientemente pequeño.

Con carácter general,

Aproximación lineal de $y = f(x)$ en $x = c$

Si $f(x)$ es derivable en $x = c$, se llama **aproximación lineal** de $f(x)$ en $x = c$ a la función

$$h(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Esta técnica puede ser útil para calcular aproximadamente el valor de una función en un punto cercano a otro en el que se conoce el valor de la función y su derivada, como en el Ejemplo 2.59.

Pero es sobre todo útil cuando se desea, para cálculos ulteriores, sustituir la expresión de una función $f(x)$ cerca de un punto, por la expresión de una función más "manejable" (su recta tangente), como en el Ejemplo 2.60.

Ejemplo 2.59
Calcular una aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ y utilizar dicha aproximación para calcular el valor de $\sqrt{50}$ (sin calcular raíces).

Puesto que la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, la aproximación lineal de f cerca de un punto a es:

$$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = \sqrt{a} + \frac{x-a}{2\sqrt{a}}$$

En particular, para $x = 49$, se tiene $\sqrt{49} = 7$ y

$$h(x) = f(49) + f'(49)(x-49) = \sqrt{49} + \frac{x-49}{2\sqrt{49}} = 7 + \frac{x-49}{14}$$

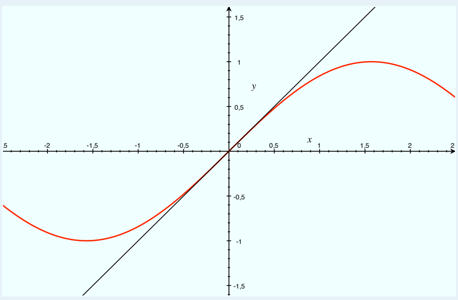
Entonces, se puede aproximar $\sqrt{50}$ por el valor $h(50) = 7 + \dfrac{50-49}{14} = 7 + \dfrac{1}{14} \approx 7.0714$

Ejemplo 2.60
Calcular una aproximación lineal de $f(x) = \operatorname{sen} x$ cerca de $x = 0$.

Puesto que la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$, la aproximación lineal de f cerca del punto $x = 0$ es:

$$h(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = \operatorname{sen} 0 + (\cos 0)\, x = x$$

Es decir, cerca de $x = 0$, la función $\operatorname{sen} x$ se aproxima linealmente por la recta $y = x$.
De hecho, es esta una sustitución frecuente, válida para valores pequeños de x.



2.9.2 Polinomio de Taylor

Ya se ha visto, en la subsección 2.9.1, cómo se puede utilizar la recta tangente para aproximar linealmente una función cerca de un punto.

Podemos pensar que obtendremos una mejor aproximación si aproximamos f no ya por un polinomio de grado 1, sino por un polinomio de grado 2. Nos planteamos ahora construir el polinomio de grado 2 cuya primera y segunda derivadas en c coincidan con las de f. Denotemos este polinomio por

$$t_2(x) = a_2(x-c)^2 + a_1(x-c) + a_0.$$

Sus derivadas primera y segunda son $t_2'(x) = 2a_2(x-c) + a_1$ y $t_2''(x) = 2a_2$.

Y los valores de $t_2(x)$, $t_2'(x)$ y $t_2''(x)$ en $x = c$ son:

$$t_2(c) = a_0, \quad t_2'(c) = a_1, \quad t_2''(c) = 2a_2.$$

Lo que deseamos es que t_2 y sus derivadas tomen los mismos valores que f y sus derivadas en $x = c$. Imponiendo estas condiciones, se tiene:

$$\begin{cases} t_2(c) = a_0 = f(c) \\ t_2'(c) = a_1 = f'(c) \\ t_2''(c) = 2a_2 = f''(c) \Rightarrow a_2 = \dfrac{1}{2}f''(c) \end{cases}$$

Así pues, el polinomio que buscamos es:

$$t_2(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + f'(c)(x-c) + f(c).$$

Con carácter general, repitiendo este proceso, podemos construir un polinomio de grado n (cualquiera),

$$t_n(x) = a_n(x-c)^n + \cdots a_3(x-c)^3 + a_2(x-c)^2 + a_1(x-c) + a_0$$

cuyas derivadas sucesivas en $x = c$ hasta las de orden n coincidan con las de f.
Las derivadas de t_n y su valor en $x = c$ son

$$t_n(x) = a_n(x-c)^n + \cdots a_3(x-c)^3 + a_2(x-c)^2 + a_1(x-c) + a_0 \quad \Rightarrow \quad t_n(c) = a_0 = f(c)$$

$$t_n'(x) = na_n(x-c)^{n-1} + \cdots 3a_3(x-c)^2 + 2a_2(x-c) + a_1 \quad \Rightarrow \quad t_n'(c) = a_1 = f'(c)$$

$$t_n''(x) = n(n-1)a_n(x-c)^{n-2} + \cdots + 6a_3(x-c) + 2a_2 \quad \Rightarrow \quad t_n''(c) = 2a_2 = f''(c)$$

$$t_n'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n(x-c)^{n-3} + \cdots 6a_3 \quad \Rightarrow \quad t_n'''(c) = 6a_3 = 3 \cdot 2a_3 = f'''(c)$$

En general, la derivada k-ésima de t_n es

$$t_n^{k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k} + \cdots + k!\,a_k \quad \Rightarrow \quad t_n^{k)}(c) = k! \cdot a_k = f^{k)}(c)$$

Si k es un número entero positivo, la expresión $k!$ se lee *k factorial* y representa el producto de k por todos los enteros positivos menores que k:

$$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3) \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Por ejemplo, $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5040$.
Despejando los valores de a_1, a_2, $\ldots a_n$ de las igualdades anteriores, finalmente se encuentra la expresión de $t_n(x)$:

$$t_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{n)}(c)(x-c)^n.$$

Polinomio de Taylor de $f(x)$ en torno al punto c

Es el polinomio

$$t_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{n)}(c)(x-c)^n,$$

que coincide con f y con todas sus derivadas hasta la de orden n en el punto $x = c$.

En particular, la recta tangente en $x = c$ es el polinomio de Taylor de orden 1 en $x = c$.

Para muchas funciones los sucesivos polinomios de Taylor proporcionan aproximaciones a f que mejoran al aumentar el grado n. Obviamente deben ser funciones que sean derivables hasta cualquier orden en $x = c$ (se dice que son *indefinidamente derivables*).

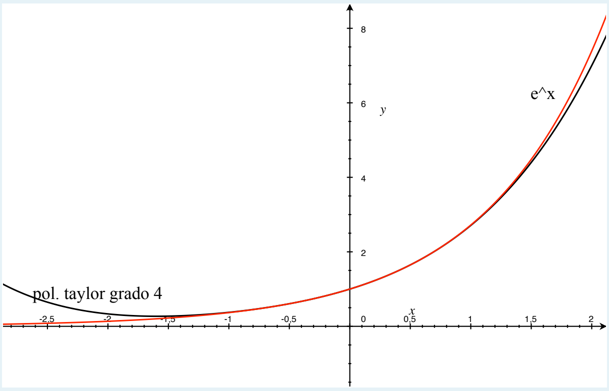
Ejemplo 2.61
Construir el polinomio de Taylor de orden 4 de la función exponencial $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

Su derivada coincide con ella misma: $f'(x) = e^x$, y por tanto todas sus derivadas de cualquier orden también: $f^{n)}(x) = e^x$, $\forall n = 0, 1, 2, \cdots$. Por tanto,

$$f^{n)}(0) = 1, \quad \forall n = 0, 1, 2, \cdots,$$

y su polinomio de Taylor de orden 4 en $x = 0$ es

$$t_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$



2.9.3 Estimación del error que se comete al aproximar una función por su polinomio de Taylor

Es importante poder determinar el error que se comete al aproximar una función por su polinomio de Taylor. En otro caso, la aproximación quedaría en buena medida indeterminada. Este error viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) - t_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,(x-c)^{n+1}, \quad \text{para cierto punto} \quad \xi \in (\min\{x, c\}, \max\{x, c\}). \tag{2.2}$$

La expresión $\xi \in (\min\{x, c\}, \max\{x, c\})$ significa que ξ está entre x y c, independientemente de cuál de los dos es mayor que el otro.[2]

La expresión del error es *parecida* a la expresión del término correspondiente a $n+1$ en la expresión de $t_{n+1}(x)$. Esto ayuda a recordarla.

La igualdad anterior (2.2) para la expresión del error del polinomio de Taylor presenta una situación muy habitual en el análisis matemático: se puede demostrar rigurosamente que **existe** un punto ξ entre x y c para el cual es **cierta** la igualdad, **pero no se sabe cuál es ese punto**.

Entonces, ¿para qué sirve? O –mejor planteado– ¿podemos extraer alguna información útil de la igualdad (2.2) a pesar de no saber cuál es el punto ξ?

La respuesta es: sí podemos, siempre que podamos saber cuáles son los valores máximos que puede tomar $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$ entre x y c.

[2] La ξ es la decimocuarta letra del alfabeto griego y se pronuncia [ksi].

Ejemplo 2.62
Estimar el error que se comete cuando se aproxima el valor de e^{-2} por el valor del polinomio de Taylor de grado 4 en $x = 0$.

El polinomio de Taylor de orden 4 de la función e^x en torno a $x = 0$ es, como hemos visto antes

$$t_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Según la fórmula (2.2), el error que cometemos si lo utilizamos para aproximar e^{-2} es

$$e^{-2} - t_4(-2) = \frac{1}{(4+1)!}e^{\xi}(-2)^{4+1} = \frac{1}{5!}e^{\xi}(-2)^5 \quad \text{para cierto } \xi \text{ entre } -2 \text{ y } 0.$$

Normalmente, lo que interesa del error es su valor absoluto, así que:

$$|e^{-2} - t_4(-2)| = \left|\frac{1}{(4+1)!}e^{\xi}(-2)^{4+1}\right| = \frac{1}{5!}e^{\xi}2^5 = \frac{32}{120}e^{\xi}, \quad \text{para cierto } \xi \text{ entre } -2 \text{ y } 0.$$

El punto ξ no es conocido, pero sí sabemos que está entre -2 y 0 (es decir, en el intervalo $(-2, 0)$). Puesto que e^x es creciente, el máximo valor que puede alcanzar e^{ξ} en $(-2, 0)$ es $e^0 = 1$ Por ello, podemos *estimar* (o sea, acotar) el error cometido por

$$|e^{-2} - t_4(-2)| = \frac{32}{120}e^{\xi} \leq \frac{32}{120} \approx 0.2666.$$

Se puede usar la expresión (2.2) para aproximar una función con un error predeterminado mediante su polinomio de Taylor.

En el caso del ejercicio anterior, si, por ejemplo, queremos aproximar el valor e^{-2} con 6 cifras decimales exactas, nuestro objetivo será determinar n de modo que $|e^{-2} - t_n(x)| \leq 10^{-6}$. Según la estimación (2.2), bastará que

$$\frac{1}{(n+1)!}e^{-2}2^{(n+1)} \leq 10^{-6}.$$

Ahora bien, $e^{-2} < e^0 = 1$, luego

$$\frac{1}{(n+1)!}e^{-2}2^{(n+1)} < \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!} \leq 10^{-6}.$$

Un cálculo muestra que si $n = 13$, el error es $1.88 \times 10^{-7} = 0.000000188$ y si $n = 12$, el error es $1.31 \times 10^{-6} = 0.00000131$.

Tomamos, pues, $n = 13$, con lo que $t_{13}(-2) = 0.1353351175573398$ proporciona una aproximación a $e^{-2} = 0.1353352832366127$ con, al menos, 5 cifras decimales exactas.

2.10 Optimización

La optimización matemática trata de resolver problemas en los que interesa **maximizar** una determinada cantidad (por ejemplo, un beneficio, una velocidad, la eficiencia de un sistema,...) o por el contrario **minimizar** algún criterio (por ejemplo, un coste, un riesgo, el tiempo empleado en algo, ...).

La cantidad ó criterio a optimizar suele venir dado por una función dependiente de una o varias variables a la que con frecuecia se llama **función coste** o **funcion objetivo**. Se trata, pues, de encontrar para qué valores de las variables se produce el máximo (ó mínimo) de la función coste.

Con mucha frecuencia, en este tipo de problemas las variables de las que depende la función beneficio no son completamente independientes: deben verificar ciertas condiciones, denominadas **restricciones**. Normalmente, a partir de dichas restricciones, se puede encontrar la dependencia de alguna variable respecto de las otras.

Ejemplo 2.63
Encontrar las dimensiones que debe tener un rectángulo de perímetro igual a $4\,\mathrm{cm}$ para que su área sea lo más grande posible.

Las dimensiones del rectágulo son **base**, a la que llamaremos x, y **altura**, a la que llamaremos y. Ambas son las variables que intervienen en este problema.
El perímetro de un rectángulo (suma de las longitudes de sus lados) viene dado por $P(x,y) = 2x+2y$. Su área viene dada por $A(x,y) = x \cdot y$. Obviamente, ambas dimensiones deben ser números estrictamente positivos.
El problema que se plantea es:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Maximizar } A = xy \\ \text{sujeto a } \left\{\begin{array}{l} P(x,y) = 2x+2y = 4 \\ x > 0, \;\; y > 0 \end{array}\right.\end{array}\right.$$

A partir de la restricción $2x+2y=4$ se puede deducir la dependencia de y con respecto de x (o al contrario, de x con respecto de y):

$$2x+2y=4 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{4-2x}{2} = 2-x$$

En consecuencia, puesto que para los rectángulos «admisibles» (aquéllos cuyo perímetro es de $4\,\mathrm{cm}$), la dimensión y viene dada a partir de la dimensión x, su área se puede escribir

$$A = xy = x(2-x)$$

y el problema de optimización anterior se escribe ahora, en función de una sola variable:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Maximizar } A = x(2-x) \\ \text{sujeto a } x > 0\end{array}\right.$$

Para resolver este problema hay que hallar el máximo global de la función $A(x) = x(2-x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.
La función A es continua y derivable en todo el intervalo $(0,+\infty)$. Se tiene

$$A'(x) = 2-2x, \quad \text{que solo se anula para } x=1 \text{ y se tiene } \left\{\begin{array}{l} A' > 0 \text{ en } (0,1) \\ A' < 0 \text{ en } (1,+\infty)\end{array}\right.$$

Está claro, pues, que A tiene un máximo local en $x=1$ y este es el único candidato a máximo global, ya que los extremos del intervalo no están incluidos en el mismo.
Así pues la dimensión x (base) optima es $x=1$. La altura óptima será $y=2-x=1$.
Solución: el rectángulo de perímetro 4cm y área máxima es un cuadrado de lado 1cm.

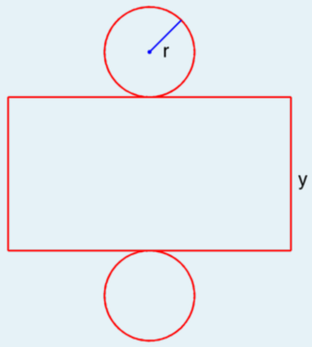
Ejemplo 2.64

Un conservero debe fabricar botes cilíndricos de 1 litro para envasar tomate frito. Determinar las dimensiones que debe tener el bote para que se fabrique con la menor cantidad posible de hojalata.

En primer lugar identificamos los datos del problema: las dimensiones de un cilindro son el radio de su base, que llamaremos r y su altura, que llamaremos y. Utilizaremos como unidades los centímetros.

El volumen del cilindro es igual al área de su base ($\pi\, r^2$) multiplicada por la altura del cilindro (y):

$$V(r,y) = \pi\, r^2\, y$$



Por otro lado, la superficie total de la lata está formada por la superficie cilíndrica más las dos tapas circulares.

La superficie cilíndrica, desarrollada, es un rectángulo de base igual a la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$) y de altura y, luego su área (longitud de la base por la altura) es $2\pi r y$.
El área de cada tapa es πr^2.

Finalmente, pues, el área total de la superficie que rodea la lata es: $A(r,y) = 2\pi r y + 2\pi r^2$
De lo que se trata, pues es de resolver el problema:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Minimizar } A(r,y) = 2\pi r y + 2\pi r^2 \\ \text{sujeto a } \left\{\begin{array}{l} V(r,y) = \pi\, r^2\, y = 1000 \quad (1\,\text{litro} = 1000\,\text{cm}^3) \\ r > 0,\ y > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

De la restricción $V(r,y) = 1000$ se puede deducir la relación que liga r con y:

$$V(r,y) = \pi\, r^2\, y = 1000 \quad \text{de donde} \quad y = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Sustituyendo esta expresión de y en función de r en la fórmula del área total de la superficie nos queda esta última expresada **solo** en función de r:

$$A(r) = 2\pi r y + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2 = \frac{2000 + 2\pi r^3}{r}$$

De lo que se trata, pues, es de encontrar para qué valor de r se consigue que esta área sea **mínima**:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Minimizar } A(r) = \dfrac{2000 + 2\pi r^3}{r} \\ \text{sujeto a } r > 0 \end{array}\right.$$

es decir, de calcular el mínimo de la función $A(r)$ en $(0,+\infty)$. Esta función es continua y derivable en $(0,+\infty)$ y se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2000 + 2\pi r^3}{r} = +\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{2000 + 2\pi r^3}{r}$$

La derivada $A'(x) = \dfrac{6\pi r^3 - (2000 + 2\pi r^3)}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$ se anula para $r = \sqrt[3]{\dfrac{2000}{4\pi}} \approx 5.42\,\text{cm}$ que solo puede ser un mínimo debido a que A tiende a $+\infty$ en los extremos del intervalo $(0,+\infty)$ y no hay más puntos críticos.
En consecuencia, el radio óptimo para la base de la lata es de $5.42\,\text{cm}$ y la altura correspondiente es

$$y = \frac{1000}{\pi r^2} \approx \frac{1000}{\pi \cdot (5.42)^2} \approx 10.83$$

En resumen, las dimensiones óptimas de la lata son:

$$\text{Radio de la base} = 5.42\,\text{cm} \quad \text{y} \quad \text{altura} = 10.83\,\text{cm}$$

Ejemplo 2.65

Se desea construir una nave industrial de base cuadrada y cubierta plana cuyo volumen sea $V = 100\,\mathrm{m}^3$. Los costes de construcción son de 100 euros por cada m^2 de pared lateral y de 200 euros por cada m^2 de cubierta. ¿Cómo deben elegirse las dimensiones de la nave para que el coste de construcción sea mínimo ?

Las dimensiones de la nave son: la longitud del lado del cuadrado que forma la base, que llamaremos x y la altura de la nave, que llamaremos y. Utilizaremos como unidad de longitud el metro.
El volumen encerrado dentro de la nave viene dado por el área de la base multiplicada por la altura. El área de la base es x^2, luego

$$V(x,y) = x^2 y\,\mathrm{m}^3$$

Por otra parte, la nave tendrá 4 paredes iguales, cada una de las cuales tiene un área de xy, luego el área total de las paredes es $4xy$. La cubierta tiene la misma área que la base: x^2.
El costo de construcción, por lo tanto vendrá dado por:

$$C(x,y) = 100\,4xy + 200\,x^2 = 400xy + 200x^2$$

El problema que se desea resolver es, en consecuencia:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Minimizar } \; C(x,y) = 400xy + 200x^2 \\ \text{sujeto a } \; \left\{\begin{array}{l} V(x,y) = x^2 y = 100 \\ x, y > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

De la restricción $x^2 y = 100$, que impone una relación entre las variables, se puede despejar (por ejemplo) la variable y en función de la variable x:

$$y = \frac{100}{x^2}$$

Entonces, sustituyendo esta expresión de y en función de x en nuestro problema, este se reduce a uno de minimización en una variable:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Minimizar } \; C(x) = 400x\dfrac{100}{x^2} + 200x^2 = \dfrac{40000}{x} + 200x^2 \\ \text{para } x \in (0, +\infty) \end{array}\right.$$

Se trata, pues, de calcular el máximo de la función $C(x)$ en el intervalo $(0, -\infty)$. Esta función es continua y derivable en $(0, +\infty)$ y se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{40000}{x} + 200x^2 = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{40000}{x} + 200x^2 = +\infty$$

Su derivada $C'(x) = \dfrac{-40000}{x^2} + 400x = \dfrac{-40000 + 400x^3}{x^2}$ se anula cuando $-40000 + 400x^3 = 0$, es decir, para

$$x = \sqrt[3]{\frac{40000}{400}} = \sqrt[3]{100} \quad \text{y se tiene} \quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ es decreciente en } (0, \sqrt[3]{100}) \\ f \text{ es creciente en } (\sqrt[3]{100}, +\infty) \end{array}\right.$$

Es claro, por lo tanto, que $C(x)$ tiene un mínimo local en $x = \sqrt[3]{100}$ que, por lo visto antes, también es mínimo global en el intervalo $(0, +\infty)$. Así pues, la solución al problema es $x = \sqrt[3]{100}$ y en consecuencia

$$y = \frac{100}{x^2} = \frac{100}{\left(\sqrt[3]{100}\right)^2} = \frac{100}{100^{2/3}} = 100^{1/3} = \sqrt[3]{100}$$

La opción óptima es construir una nave con forma de cubo de lado $\sqrt[3]{100}$.

Ejemplo 2.66
Se estima que el precio de mercado de un cierto producto ganadero durante el año próximo vendrá dado por la función

$$p(t) = -2(t+1)(t-13), \quad t \in [0, 12]$$

donde la variable t representa el tiempo medido en meses. Por otra parte, el coste de producción de dicho producto viene dado por

$$c(t) = 4 + 20\ln(1+t), \quad t \in [0, 12]$$

Se desea calcular cuál es el momento óptimo para poner a la venta el producto obteniendo el máximo beneficio posible.

El beneficio obtenido al poner a la venta el producto en el instante t vendrá dado por la diferencia entre el precio de venta y el coste de producción, es decir

$$f(t) = -2(t+1)(t-13) - 4 - 20\ln(1+t) = -2t^2 + 24t + 22 - 20\ln(1+t)$$

Es preciso, pues, hallar el máximo absoluto de esta función en el intervalo $[0, 12]$.
Los candidatos (puntos que hay que estudiar) son:

- los máximos locales
- los extremos del intervalo

La función f está definida y es continua y derivable en el intervalo $[0, 12]$, ya que el argumento del logaritmo, $(1+t)$, es positivo en dicho intervalo.
En los extremos del intervalo se tiene

$$f(0) = 22, \qquad f(12) = -488 + 488 + 22 - 20\ln(13) \approx -29.3$$

Veamos en qué puntos se anula la derivada (puntos críticos):

$$f'(t) = -4t + 24 - 20\frac{1}{1+t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-4t+24)(1+t) = 20 \quad \Leftrightarrow \quad -4t^2 + 20t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{400+64}}{-8} = \begin{cases} t = t_1 = \approx 5.2 \\ t = t_2 = \approx -0.2 \end{cases}$$

Obviamente, solo el punto t_1 pertenece al intervalo $[0, 12]$, y para él se tiene

$$f(t_1) \approx f(5.3) = 56.2$$

de donde se deduce que el máximo beneficio se obtiene vendiendo tras 5.3 meses.

Tema 3

Integración

Versión: 18 de octubre de 2019

3.1 La integral indefinida: cálculo de primitivas

La integral indefinida ó cálculo de primitivas es, en cierto modo, un proceso “ inverso” al de calcular la derivada de una función. Dada una función $f(x)$ nos planteamos ¿es f la derivada de alguna función? Y, si lo es, ¿cómo podemos calcularla?

Primitiva de una función

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función. Si $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ verifica que $F'=f$, se dice que F es una **primitiva de f** y se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

Esta definición lleva implícito el hecho de que F es derivable en (a,b).

Ejemplo 3.1

1. Sea $f(x)=0,\ \forall x$. Es obvio que $F(x)=1$ es una primitiva de f, ya que $F'(x)=0=f(x)$. Pero también $F(x)=9$ es una primitiva de f.
2. Sea $f(x)=2x$. Es obvio que $F(x)=x^2$ verifica $F'(x)=2x=f(x)$ y que, por lo tanto, F es una primitiva de f. Pero también $F(x)=x^2+3$ es una primitiva de f. De hecho, cualquier función de la forma $F(x)=x^2+C$, con $C\in\mathbb{R}$ cualquiera, lo es.
3. Es obvio, asimismo, que $F(x)=\operatorname{sen}x$ es una primitiva de $f(x)=\cos x$ y que, también, cualquier función de la forma $F(x)=\operatorname{sen}x+C$, con $C\in\mathbb{R}$ cualquiera, lo es.

Diferencia de dos primitivas

Si F_1 y F_2 son dos primitivas de la misma función, f, entonces su diferencia es una función constante:

$$F_1 - F_2 = C$$

Dicho de otro modo, si F es una primitiva de f, cualquier otra primitiva es de la forma $F(x) + C$, siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.2

1. $\displaystyle\int 4x\,dx = 2x^2 + C$
2. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
3. $\displaystyle\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}\,e^{4x} + C$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$

Ejemplo 3.3

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$

La función $\dfrac{1}{x}$ tiene la primitiva obvia $\ln x$, definida en $(0, +\infty)$.

Sin embargo, veremos que tiene otra primitiva definida en el mismo dominio en que está definida $\dfrac{1}{x}$. Sea:

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, y su derivada viene dada por:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{-1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

3.1.1 Integrales inmediatas

A partir de la tabla de derivadas de las funciones elementales, sin más que consultarla en sentido inverso, podemos deducir cual es la primitiva de unas cuantas funciones sencillas, que se exponen en la tabla de integrales inmediatas que se incluye más abajo. También figuran en la tabla las integrales, consideradas también inmediatas, que se resuelven utilizando en sentido inverso la Regla de la Cadena.

Funciones compuestas Supongamos que F es una primitiva de f, es decir, que $F'(x) = f(x)$. Sea $h(x) = F(g(x))$. Se tiene, por la Regla de la Cadena,

$$h'(x) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

luego

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int h'(x)\, dx = h(x) + C = F(g(x)) + C$$

PROPIEDADES	
Si $k \in \mathbb{R}$, $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$	$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
Cambio de variable	$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \left[\begin{array}{l} t\ = g(x) \\ dt = g'(x)\, dx \end{array} \right] = \int f(t)\, dt$
Integración por partes	$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

Funciones elementales	Funciones compuestas
Si $\alpha \neq -1$, $\int x^\alpha\, dx = \dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + C$	Si $\alpha \neq -1$, $\int g(x)^\alpha\, g'(x)\, dx = \dfrac{1}{\alpha+1}\, g(x)^{\alpha+1} + C$
$\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \dfrac{1}{g(x)}\, g'(x)\, dx = \ln \lvert g(x) \rvert + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int e^{g(x)}\, g'(x)\, dx = e^{g(x)} + C$
$\int a^x\, dx = \dfrac{1}{\ln a}\, a^x + C$	$\int a^{g(x)}\, g'(x)\, dx = \dfrac{1}{\ln a}\, a^{g(x)} + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen}(g(x))\, g'(x)\, dx = -\cos(g(x)) + C$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos(g(x))\, g'(x)\, dx = \operatorname{sen}(g(x)) + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2(g(x))}\, g'(x)\, dx = \operatorname{tg}(g(x)) + C$
$\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(g(x))}\, g'(x)\, dx = -\operatorname{ctg}(g(x)) + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\int \dfrac{1}{1+g(x)^2}\, g'(x)\, dx = \operatorname{arc\,tg}(g(x)) + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\, g'(x)\, dx = \operatorname{arc\,sen}(g(x)) + C$

Ejemplo 3.4
$$\int \left(3x^2 - x + 4\right)\, dx$$

Se trata de una suma de integrales inmediatas, ya que cada sumando es una potencia de x:

$$\int \left(3x^2 - x + 4\right)\, dx = \int 3x^2\, dx - \int x\, dx + 4\int dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

Ejemplo 3.5
$$\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^3}\, dx$$

Desarrollando la fracción, se convierte en una suma de potencias de x:

$$\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^3}\, dx = \int \left(\frac{x^2}{x^3} - \frac{\sqrt{x}}{x^3}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - x^{-5/2}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-5/2}\, dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{\frac{-5}{2}+1}\, x^{\frac{-5}{2}+1} + C = \ln|x| - \frac{1}{-3/2}\, x^{-3/2} + C = \ln|x| + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}} + C$$

Ejemplo 3.6
$$\int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2\sqrt{x}}\right) dx$$

$$\int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(3e^{-2x} + x^{-2} + 4x^{-5/2}\right) dx = 3\int e^{-2x}\, dx + \int x^{-2}\, dx + 4\int x^{-5/2}\, dx$$

El segundo y tercer sumando son integrales de potencias de x. En la primera integral, multiplicando y dividiendo por -2 se tiene la derivada de e^{-2x}:

$$3\int e^{-2x}\, dx = 3\int \frac{-2}{-2}\, e^{-2x}\, dx = \frac{3}{-2}\int -2\, e^{-2x}\, dx = -\frac{3}{2}e^{-2x}$$

Luego se tiene

$$\int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2\sqrt{x}}\right) dx = -\frac{3}{2}\, e^{-2x} + \frac{1}{(-2+1)}\, x^{-2+1} + 4\, \frac{1}{\frac{-5}{2}+1}\, x^{\frac{-5}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{3}{2}\, e^{-2x} - x^{-1} + 4\frac{-2}{3}\, x^{-3/2} + C = -\frac{3}{2}\, e^{-2x} - \frac{1}{x} - \frac{8}{3}\, \frac{1}{\sqrt{x^3}} + C$$

Ejemplo 3.7
$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

Se observa que $\cos x$ es la derivada de $\operatorname{sen} x$ y que se trata de una integral del tipo $\displaystyle\int g(x)^{\alpha}\, g'(x)\, dx$ para $\alpha = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, para la cual se tiene

$$\int g(x)\; g'(x)\, dx = \frac{1}{2}\, g(x)^2 + C$$

En consecuencia,

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\, \operatorname{sen}^2 x + C$$

Ejemplo 3.8
$$\int x\sqrt{1+5x^2}\, dx$$

Se observa que la derivada del radicando $1+5x^2$ es $10x$ y que si en la integral multiplicamos y dividimos por 10 tenemos:

$$\int x\sqrt{1+5x^2}\, dx = \int \frac{10}{10}\, x\sqrt{1+5x^2}\, dx = \frac{1}{10}\int 10\, x\sqrt{1+5x^2}\, dx$$

Es decir, para $g(x) = 1+5x^2$, tenemos:

$$\frac{1}{10}\int g(x)^{1/2}\, g'(x)\, dx = \frac{1}{10}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, g(x)^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{10}\,\frac{2}{3}\, g(x)^{3/2} + C$$

Luego, finalmente

$$\int x\sqrt{1+5x^2}\, dx = \frac{1}{10}\,\frac{2}{3}\,(1+5x^2)^{3/2} + C = \frac{1}{15}\,\sqrt{(1+5x^2)^3} + C$$

Ejemplo 3.9
$$\int \frac{1}{x-1}\, dx$$

Observando que la derivada de $x-1$ es 1 se ve que tenemos una integral del tipo

$$\int \frac{1}{g(x)} g'(x)\, dx = \ln|g(x)| + C$$

luego

$$\int \frac{1}{x-1}\, dx = \ln|x-1| + C$$

3.1.2 Cambio de variable

En muchas ocasiones, para calcular integrales suele ser útil utilizar la técnica del cambio de variable. Esta técnica consiste en elegir como nueva variable una cierta función de la actual y sustituirla en la integral, buscando, naturalmente, encontrar así una integral más fácil de calcular. Para ello, conviene conocer una notación diferente para la derivada de una función:

Observación: notación de la derivada

Sea $y = f(x)$. Todas las notaciones siguientes representan la derivada de f:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

dy se lee «diferencial de y» y dx se lee «diferencial de x». $\dfrac{dy}{dx}$ se lee «derivada de y con respecto de x».

$\dfrac{df}{dx}(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x)$ se leen « derivada de f con respecto de x" y cobran pleno sentido cuando se trata con funciones que dependen de más de una variable, en cuyo caso es necesario especificar respecto de qué variable se está derivando.

Cambio de variable

Si llamamos $t = g(x)$, con la notación $\dfrac{dt}{dx} = g'(x)$, y tratando dx y dt como si fueran cualesquiera variables, se puede escribir $dt = g'(x)\,dx$.

Entonces se tiene, sustituyendo en la integral $g(x)$ por t y $g'(x)dx$ por dt:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

Luego, si F es una primitiva de f, se tendrá $\displaystyle\int f(t)\,dt = F(t) + C$, y por lo tanto

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Ejemplo 3.10

$$\int \frac{3}{2x+1}\,dx$$

Eligiendo $t = 2x + 1$ se tiene $dt = 2\,dx$ o lo que es lo mismo $\dfrac{1}{2}dt = dx$, luego

$$\int \frac{3}{2x+1}\,dx = 3\int \frac{1}{2x+1}\,dx = 3\int \frac{1}{t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{3}{2}\,\ln|t| + C = \ln|t|^{3/2} + C = \ln\sqrt{|t|^3} + C = \boxed{\ln\sqrt{|2x+1|^3} + C}$$

Ejemplo 3.11

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

Eligiendo $t = x - 2$ se tiene $dt = dx$, luego

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = \boxed{\frac{-1}{x-2} + C}$$

Ejemplo 3.12 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)^4}\,dx$

Eligiendo $t = x+3$ se tiene $dt = \,dx$, luego

$$\int \frac{1}{(x+3)^4}\,dx = \int \frac{1}{t^4}\,dt = \int t^{-4}\,dt = \frac{1}{-3}\,t^{-3} + C = \frac{-1}{3t^3} + C = \boxed{\frac{-1}{3(x+3)^3} + C}$$

Ejemplo 3.13 $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^2}\,dx$

Eligiendo $t = 2x+3$ se tiene $dt = 2\,dx$, o bien $\dfrac{1}{2}\,dt = dx$, luego

$$\int \frac{1}{(2x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{t} + C = \boxed{-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2x+3} + C}$$

Ejemplo 3.14 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Eligiendo $t = x^2+1$ se tiene $dt = 2x\,dx$, de donde $\dfrac{1}{2}\,dt = x\,dx$, luego

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \ln|t|^{1/2} + C = \ln\sqrt{|t|} + C$$

$$= \ln\sqrt{|x^2+1|} + C = \boxed{\ln\sqrt{x^2+1} + C}$$

La última igualdad se debe al hecho de que, puesto que x^2+1 es siempre positivo, el valor absoluto en $|x^2+1|$ es superfluo.

Ejemplo 3.15 $\displaystyle\int \frac{3x}{5x^2+3}\,dx$

Eligiendo $t = 5x^2+3$ se tiene $dt = 10x\,dx$, o lo que es lo mismo, $\dfrac{1}{10}dt = x\,dx$, luego

$$\int \frac{3x}{5x^2+3}\,dx = 3\int \frac{1}{5x^2+3}(x\ dx) = 3\int \frac{1}{t}\,\frac{1}{10}\,dt = \frac{3}{10}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{3}{10}\,\ln|t| + C = \boxed{\frac{3}{10}\,\ln(5x^2+3) + C}$$

Ejemplo 3.16
$\displaystyle\int \frac{3}{3x^2+2}\,dx$

Este tipo de integrales se resuelven transformándolas en $\dfrac{1}{t^2+1}$, que es la derivada de un arco tangente. Para ello, en primer lugar se dividen numerador y denominador por 2, para tener en el denominador «algo»+1:

$$\int \frac{3}{3x^2+2}\,dx = \int \frac{3/2}{\dfrac{3x^2+2}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\dfrac{3}{2}x^2+1}\,dx$$

y ahora se hace el cambio $\dfrac{3}{2}x^2 = t^2$, es decir, $t = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,x$, y por tanto $dt = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,dx$, de donde $dx = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,dt$. Sustituyendo en la integral se tiene

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{\dfrac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\operatorname{arc\,tg} t + C = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C}$$

Cuál es el cambio conveniente para calcular una integral concreta suele ser una cuestión ardua para los que se inician en integración. Con un poco de práctica se aprende a identificar un buen número de casos y a dar con el cambio adecuado. En cualquier libro de cálculo se pueden encontrar «recetas» para distintos de tipos de integrales.

Una regla sencilla que funciona en muchas ocasiones es: hacer el cambio que elimine «lo que más molesta». Los siguientes ejemplos ilustran esta regla.

Ejemplo 3.17
$\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx$

En esta integral «lo que más molesta» es, claramente, la raiz cúbica del denominador. Por ello es lógico intentar un cambio que haga que desaparezca, como por ejemplo $\quad$ radicando $=$ (nueva variable)^3.

Lo cual, en este caso, es $1+2x = t^3$, de donde $\quad 2dx = 3t^2dt \quad$ y $\quad x = \dfrac{t^3-1}{2}$.
Sustituyendo resulta

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}2\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(\dfrac{t^3-1}{2}\right)^2}{\sqrt[3]{t^3}}3t^2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{(t^3-1)^2}{4}}{t}3t^2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\left(t^3-1\right)^2}{4t}3t^2dt$$

$$= \frac{3}{8}\int \left(t^3-1\right)^2 t\,dt = \frac{3}{8}\int \left(t^6+1-2t^3\right)t\,dt = \frac{3}{8}\int \left(t^7+t-2t^4\right)\,dt = \frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}+\frac{t^2}{2}-\frac{2t^5}{5}\right)+C$$

Ahora es necesario deshacer el cambio de variable, es decir, sustituir $t = \sqrt[3]{1+2x}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx = \boxed{\frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8 + \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2 - \frac{6}{40}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5 + C}$$

Ejemplo 3.18
$\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

En este caso interesa un cambio que elimine las dos raíces. Se puede conseguir cambiando x por una potencia que sea múltiplo de los índices de ambas raíces, en este caso el mínimo común múltiplo de 2 y 3, que es 6. Por tanto, se hace el cambio $x = t^6$, de donde $dx = 6t^5\,dt$.
Sustituyendo resulta

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}}6t^5\,dt = \int \frac{1-t^{6/2}}{t^{6/3}}6t^5\,dt = \int \frac{1-t^3}{t^2}6t^5\,dt = \int (1-t^3)6t^3\,dt$$

$$= \int (6t^3 - 6t^6)\,dt = \frac{6}{4}t^4 - \frac{6}{7}t^7 + C$$

Ahora hay que deshacer el cambio de variable, sustituyendo $t = \sqrt[6]{x}$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{4}(\sqrt[6]{x})^4 - \frac{6}{7}(\sqrt[6]{x})^7 + C = \frac{6}{4}\sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C = \boxed{\frac{6}{4}\sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C}$$

Ejemplo 3.19
$\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx$

Puede que interese hacer un cambio que elimine la raiz cúbica. El adecuado es $\ln x = t^3$, de donde $\frac{1}{x}\,dx = 3t^2\,dt$ ($t = \sqrt[3]{\ln x}$ para deshacer el cambio). Sustituyendo resulta

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt[3]{\ln x}\,\frac{1}{x}\,dx = \int \sqrt[3]{t^3}\,3t^2\,dt = \int 3t^3\,dt = \frac{3}{4}t^4 + C = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{\ln x})^4 + C = \boxed{\frac{3}{4}(\ln x)^{4/3} + C}$$

(El cambio $t = \ln x$ también serviría).

Más adelante se presentan alguno ejemplos más de cambio de variable.

3.1.3 Integrales de funciones racionales

Se trata de integrales del tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

siendo p y q dos polinomios. En el caso en que grado$(p) \geq$ grado(q), lo primero que hay que hacer es dividir ambos polinomios, para obtener

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

($c(x)$ es el polinomio cociente y $r(x)$ es el polinomio resto de la división). Entonces se tendrá

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \left(c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right)\,dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

Luego basta con saber cómo resolver integrales del tipo $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ con grado$(p) <$ grado(q), ya que el otro sumando es solo la integral de un polinomio.

Reducción a fracciones simples

Para resolver integrales $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ con grado$(p) <$ grado(q):

1. Se factoriza el denominador, es decir, se expresa como producto de polinomios irreducibles.
2. Se escribe $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como una **suma de fracciones simples**, es decir, de fracciones sencillas de una de las dos formas siguientes

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \qquad n \geq 1$$

cuyas integrales se calculan como se muestra en los Ejercicios (3.20) a (3.24), excepto en el caso $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ con $n > 1$, que no se considera en estas notas.

Se van a ver, sobre diversos ejemplos, los distintos casos que pueden darse en la descomposición en suma de fracciones simples.

Ejemplo 3.20
Caso en que $q(x)$ tiene solo raíces simples: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x}\,dx$

1. El polinomio $x^2 - x$ tiene las raíces $x = 0$ y $x = 1$, luego
$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$$
2. La descomposición en suma de fracciones simples, en este caso será de la forma:
$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$
Se trata, pues, de encontrar A y B para que esta igualdad sea cierta.
3. Para encontrar A y B, se multiplican ambos miembros por $x(x-1)$, con lo que queda
$$1 = A(x-1) + Bx$$
y ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A y B:
$$\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \quad 1 = -A \\ x = 1 & \Rightarrow \quad 1 = B \end{cases}$$
Así pues
$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$
4. Por último se tiene, para la integral:
$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1} = -\ln|x| + \ln|x-1| + C = \boxed{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C}$$

Ejemplo 3.21
Caso en que $q(x)$ tiene solo raíces simples: $\displaystyle\int \frac{7x-3}{x^2-1}\,dx$

El polinomio $x^2 - 1$ tiene las raíces $x = 1$ y $x = -1$, luego la descomposición en suma de fracciones simples, en este caso será de la forma:
$$\frac{7x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$
Multiplicando ambos miembros por $(x+1)(x-1)$, queda $\quad 7x - 3 = A(x-1) + B(x+1)$.
Ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A y B:
$$\begin{cases} x = 1 & \Rightarrow \quad 4 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = 2 \\ x = -1 & \Rightarrow \quad -10 = -2A \quad \Rightarrow \quad A = 5 \end{cases}$$
Así pues
$$\int \frac{7x-3}{(x+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{5}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x-1} = \boxed{5\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C}$$

Ejemplo 3.22
Caso en que $q(x)$ tiene alguna raíz doble: $\displaystyle\int \frac{3}{x(x-1)^2}\,dx$

El denominador ya está factorizado.
La descomposición en suma de fracciones simples en este caso será de la forma:

$$\frac{3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Multiplicando ambos miembros por $x(x-1)^2$, queda $\quad 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$.
Ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A, B y C:

$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad 3 = A \\ x=1 & \Rightarrow \quad 3 = C \\ x=2 & \Rightarrow \quad 3 = A + 2B + 2C = 3 + 2B + 6 \quad \Rightarrow \quad B = -3 \end{cases}$$

Así pues

$$\int \frac{3}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{3}{x-1} + \int \frac{3}{(x-1)^2} = 3\left(\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right) + C =$$

$$= \boxed{3\left(\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1}\right) + C}$$

Ejemplo 3.23
Caso en que $q(x)$ tiene alguna raíz doble: $\displaystyle\int \frac{2x}{(3+2x)^2}\,dx$

El denominador ya está factorizado: tiene la raíz doble $x = -\dfrac{3}{2}$. La descomposición en suma de fracciones simples en este caso será de la forma:

$$\frac{2x}{(3+2x)^2} = \frac{A}{3+2x} + \frac{B}{(3+2x)^2}$$

Multiplicando ambos miembros por $(3+2x)^2$, queda $\quad 2x = A(3+2x) + B$.
Ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A y B:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} & \Rightarrow \quad -3 = B \\ x = 0 & \Rightarrow \quad 0 = 3A + B = 3A - 3 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \end{cases}$$

Así pues

$$\int \frac{2x}{(3+2x)^2}\,dx = \int \frac{1}{3+2x}\,dx - \int \frac{3}{(3+2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{3+2x}\,dx + \frac{3}{2}\int -2(3+2x)^{-2}\,dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln|3+2x| + \frac{3}{2}\,\frac{1}{3+2x} + C}$$

Ejemplo 3.24
Caso en que $q(x)$ tiene un factor irreducible cuadrático: $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

El denominador ya está factorizado: el polinomio x^2+1 no se puede factorizar ya que no tiene raíces reales. La descomposición en suma de fracciones simples en este caso será de la forma:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Multiplicando ambos miembros por $x(x^2+1)$, queda $\quad 2x-1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x = A(x^2+1)+Bx^2+Cx$. Ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A, B y C:

$$\begin{cases} x=0 \quad \Rightarrow \quad -1 = A \\ x=1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2A+B+C = -2+B+C \quad \Rightarrow \quad B+C=3 \\ x=-1 \quad \Rightarrow \quad -3 = 2A+B-C = -2+B-C \quad \Rightarrow \quad B-C=-1 \end{cases}$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene, resolviendo el sistema 2×2, $B=1$ y $C=2$. Así pues

$$\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C = \boxed{\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C}$$

Ejemplo 3.25
Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\mathrm{sen}(t)\,\cos(t)}{(2+\mathrm{sen}(t))^2}\,dt$$

Esta integral no es, obviamente, de tipo racional. Sin embargo en una inspección atenta se observa que aparece el factor $\mathrm{sen}(t)$, potencias del mismo $(2+\mathrm{sen}(t))^2$, y su derivada $\cos(t)$. Esto sugiere hacer el cambio de variable $u=\mathrm{sen}(t)$ que, como se ve a continuación, transforma la integral en una racional:

$$\int \frac{\mathrm{sen}(t)\,\cos(t)}{(2+\mathrm{sen}(t))^2}\,dt = \begin{bmatrix} u & = \mathrm{sen}(t) \\ du & = \cos(t)\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{u}{(2+u)^2}\,du \overset{(*)}{=} \int \left(\frac{1}{2+u} + \frac{-2}{(2+u)^2}\right) dt =$$

$$\ln|2+u| + \frac{2}{2+u} + C = \boxed{\ln|2+\mathrm{sen}(t)| + \frac{2}{2+\mathrm{sen}(t)} + C}$$

(*) Reducción a suma de fracciones simples:

$$\frac{u}{(2+u)^2} = \frac{A}{2+u} + \frac{B}{(2+u)^2} \Leftrightarrow u = A(2+u)+B \Leftrightarrow \begin{cases} u=-2 \Rightarrow -2 = B \\ u=0 \Rightarrow 0 = 2A-2 \Rightarrow A=1 \end{cases}$$

es decir,

$$\frac{u}{(2+u)^2} = \frac{1}{2+u} + \frac{-2}{(2+u)^2}$$

3.1.4 Integración por partes

Es una de las reglas de integración más útiles. Está basada en la fórmula de derivación de un producto de dos funciones:

$$h(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

De esta igualdad se tiene:

$$u(x) \cdot v'(x) = h'(x) - u'(x) \cdot v(x)$$

y de aquí, integrando en ambos miembros:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = \int h'(x)\, dx - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx = h(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Fórmula de integración por partes

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Con frecuencia esta fórmula se escribe en la forma:

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

que significa exactamente lo mismo.

Ejemplo 3.26

$\displaystyle\int x\, e^x\, dx$

Eligiendo $\left\{ \begin{array}{lll} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array} \right\}$ se tiene

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C = \boxed{e^x\,(x-1) + C}$$

Ejemplo 3.27

$\displaystyle\int x\, \ln x\, dx$

Eligiendo $\left\{ \begin{array}{lll} u(x) = \ln x & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x & \Rightarrow & v(x) = \dfrac{1}{2}\, x^2 \end{array} \right\}$ se tiene

$$\int x\, \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2\, \ln x - \int \frac{1}{2}\, x^2 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}x^2\, \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2\, \ln x - \frac{1}{4}\, x^2 + C = \boxed{\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C}$$

Ejemplo 3.28

$\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

Eligiendo $\left\{ \begin{array}{lll} u(x) = \operatorname{arc\,tg} x & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow & v(x) = x \end{array} \right\}$ se tiene

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int x\, \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \boxed{x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$$

Ejemplo 3.29
$\displaystyle\int x\,\cos x\,dx$

Eligiendo $\left\{\begin{array}{lcl} u(x)=x & \Rightarrow & u'(x)=1 \\ v'(x)=\cos x & \Rightarrow & v(x)=\operatorname{sen} x \end{array}\right\}$ se tiene

$$\int x\,\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = \boxed{x\operatorname{sen} x + \cos x + C}$$

Ejemplo 3.30
$\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx$

Eligiendo $\left\{\begin{array}{lcl} u(x)=x^2 & \Rightarrow & u'(x)=2x \\ v'(x)=e^x & \Rightarrow & v(x)=e^x \end{array}\right\}$ se tiene $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - \int 2x\,e^x\,dx.$

Para resolver la integral $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$ hay que utilizar de nuevo la fórmula de integración por partes.

Eligiendo ahora $\left\{\begin{array}{lcl} u(x)=x & \Rightarrow & u'(x)=1 \\ v'(x)=e^x & \Rightarrow & v(x)=e^x \end{array}\right\}$ se tiene finalmente

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\int x\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\left(x\,e^x - \int e^x\,dx\right) = x^2\,e^x - 2x\,e^x + 2\,e^x + C = \boxed{(x^2-2x+2)e^x + C}$$

3.2 La integral definida

El concepto de integral definida está íntimamente relacionado con el problema de calcular áreas de regiones planas, concretamente, con el de calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de una curva, $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (véase Figura 3.1).

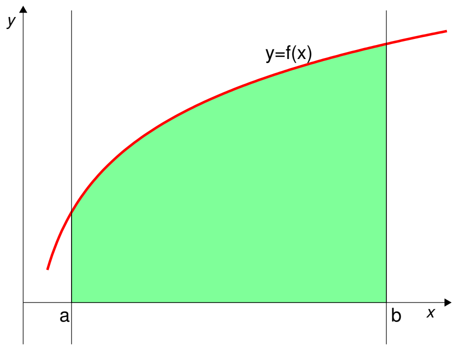


Figura 3.1: Región plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Una manera de aproximar dicha área es dividir el intervalo $[a, b]$ en un número de sub-intervalos (determinados por los puntos x_1, x_2, $x_3, \ldots$, mostrados en la Figura 3.3) de longitud h y alturas respectivas $y_i = f(x_i)$. El área de uno de estos rectángulos es el producto de su base (h) por su altura ($y_i = f(x_i)$). Intuitivamente se ve que la suma de las áreas de todos estos rectángulos será mejor aproximación del área de la Figura 3.1 cuanto más pequeño sea h o, lo que es lo mismo, cuantos más rectángulos se utilicen en la suma.

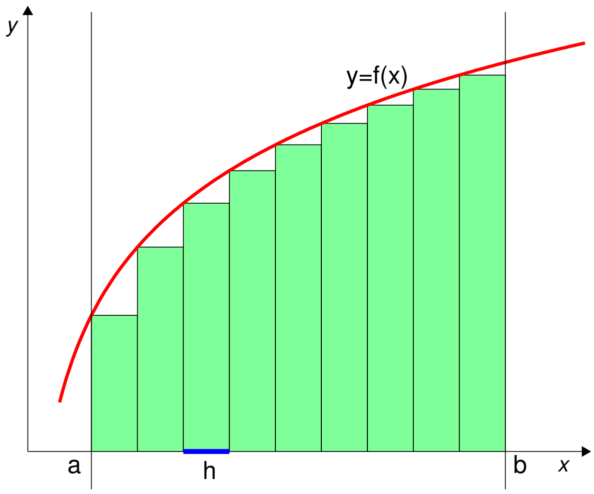


Figura 3.2: Se divide el intervalo $[a, b]$ en partes iguales de longitud h y se considera la suma de las áreas de todos los rectángulos de base h mostrados en la Figura. Cuando h se hace muy pequeño, es decir, cuando hay "muchos" rectángulos, dicha suma aproxima el valor del área de la Figura 3.1.

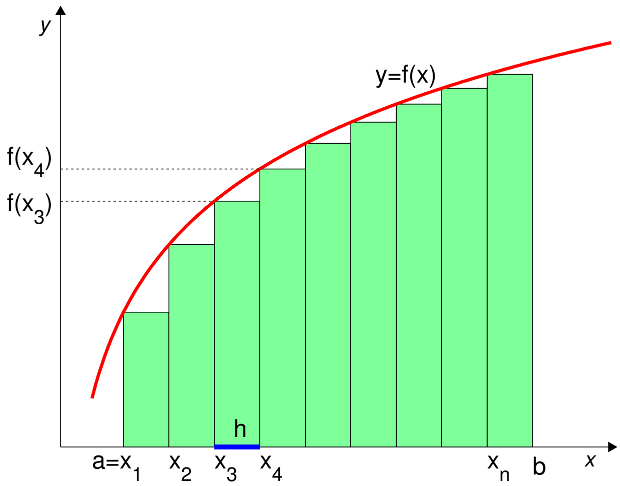


Figura 3.3: El límite cuando $n \to \infty$ de la suma de las áreas mostradas es el área de la región mostrada en la Figura 3.1.

Integral definida
La integral definida de f en $[a, b]$ es, por definición,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} h\,\{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\}$$

(Atención: como se verá luego, este valor solo coincide con el área de la Figura 3.1 si $f > 0$).

Afortunadamente, existe una manera de calcular $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ por una vía distinta a su definición, y que está relacionada con la integral indefinida de f, es decir, con el cálculo de una primitiva de f. De ahí que ambos conceptos, aparentemente tan distintos, compartan el nombre de **integral**.

El resultado que relaciona ambos conceptos es el siguiente Teorema.

Teorema (Regla de Barrow)
Si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una primitiva cualquiera de f, entonces se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Con frecuencia se escribe, de forma abreviada, $[F(x)]_a^b$ en lugar de $F(b) - F(a)$ cuando se aplica la Regla de Barrow.
Para aplicar la Regla de Barrow se puede elegir cualquiera de las primitivas de f, ya que, al restar, $F(b) + C - F(a) - C$, la constante arbitraria se cancela. Por ello se elige normalmente la primitiva correspondiente al valor $C = 0$.

Propiedades de la integral definida

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad \forall c \in (a, b)$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Ejemplo 3.31
$\displaystyle\int_0^5 x^2\,dx$

Una primitiva de x^2 es $\dfrac{x^3}{3}$, luego aplicando la Regla de Barrow se tiene

$$\int_0^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \boxed{\frac{125}{3}}$$

Ejemplo 3.32 $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

Una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$, luego

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos 0 = -(-1) + 1 = \boxed{2}$$

Ejemplo 3.33 $\displaystyle\int_2^{3} \frac{1}{x(x-1)^2}\, dx$

Una primitiva de $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ es $\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right| - \dfrac{1}{x-1}$ (véase el Ejemplo 3.22). Luego

$$\int_2^{3} \frac{1}{x(x-1)^2}\, dx = \left[\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1}\right]_2^3 = \left(\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) - (\ln 2 - 1) = \boxed{\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$$

Ejemplo 3.34
La función $f(t) = \dfrac{680 + 30t - 5t^2}{18}$ representa la temperatura en Sevilla en una tarde de agosto, t horas después del mediodía, es decir, para $t \in [0, 10]$. Calcular la temperatura media en ese periodo.

Se denomina **valor medio** (o promedio) de una función f en un intervalo $[a, b]$ al valor:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

En este caso, la temperatura media será, por tanto:

$$T_{\text{med}} = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(t)\, dt = \frac{1}{10}\int_0^{10} \frac{680 + 30t - 5t^2}{18}\, dt = \frac{1}{180}\int_0^{10} (680 + 30t - 5t^2)\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{180}(680t + 15t^2 - \frac{5}{3}t^3)\right]_0^{10} = \frac{1}{180}(6800 + 1500 - \frac{5}{3}1000) = \frac{100}{180}(68 + 15 - \frac{50}{3}) = \boxed{36.85}$$

3.3 Aplicaciones de las integrales

3.3.1 Cálculo de áreas

Como se ha apuntado antes, **si $\mathbf{f \geq 0}$ en $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$**, entonces $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ es el área de la región plana encerrada entre la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo 3.35

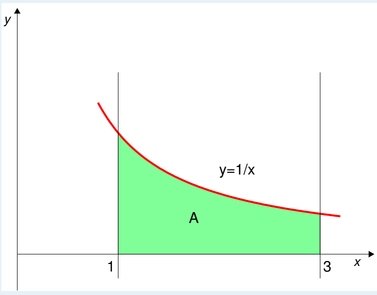
Calcular el área delimitada por $y = \dfrac{1}{x}$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es positiva en $[1, 3]$, por lo tanto el área buscada coincide con la integral definida:

$$A = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$$

Una primitiva de $\dfrac{1}{x}$ es $F(x) = \ln x$. Por lo tanto

$$A = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln x\Big]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \boxed{\ln 3 \approx 1.0986}$$



Si $f < 0$ en $[a, b]$, como en la Figura 3.4, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ es un valor negativo que, lógicamente, no puede ser un área (que es siempre mayor o igual que cero). En este caso, el área es el valor absoluto de la integral definida,

$$A = \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Si f cambia de signo, como en la Figura 3.5, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = A^+ - A^-$, siendo A^+ el área del recinto limitado por la curva y el eje OX que queda por encima del eje OX, y A^- el área del recinto entre la curva y el eje OX que queda por debajo del eje OX.

Si lo que se desea es calcular el área delimitada entre la gráfica y el eje OX, es decir, la suma $A^+ + A^-$ (véase Figura 3.5), entonces hay que calcular

$$A = A^+ + A^- = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx$$

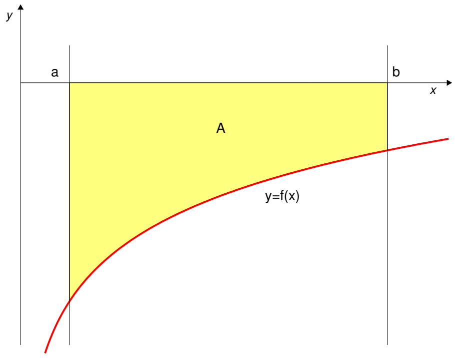


Figura 3.4: Función negativa en $[a,b]$.

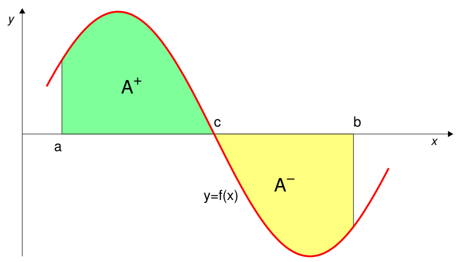


Figura 3.5: Función que cambia de signo en $[a,b]$.

Ejemplo 3.36
Calcular el área delimitada por la gráfica de $y=\ln x-2$, el eje OX y las rectas $x=1/2$ y $x=\pi$

La función $f(x)=\ln x-2$ es negativa en $[1/2,\pi]$. Luego el área será $A=\left|\displaystyle\int_{1/2}^{\pi}(\ln x-2)\,dx\right|$.

Calculamos una primitiva integrando por partes, eligiendo $\left\{\begin{array}{lcl} u(x)=\ln x-2 & \Rightarrow & u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v'(x)=1 & \Rightarrow & v(x)=x \end{array}\right\}$

$$\int(\ln x-2)\,dx=x(\ln x-2)-\int x\frac{1}{x}\,dx=x(\ln x-2)-x+C=x(\ln x-3)+C$$

Por lo tanto

$$\int_{1/2}^{\pi}(\ln x-2)\,dx=\Big[x(\ln x-3)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\pi}=\Big(\pi(\ln\pi-3)\Big)-\left(\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-3\right)\right)\approx-3.9\quad\Rightarrow\quad\boxed{A=3.9}$$

($\ln x-2$ es la función de la Figura 3.5)

Ejemplo 3.37
Calcular el área de las región delimitada por la gráfica de $y=\operatorname{sen}(2x)$, el eje OX y las rectas $x=0.2$ y $x=3$

La función $\operatorname{sen}(2x)$ es mayor o igual que cero en $[0.2,\pi/2]$ y menor o igual que cero en $[\pi/2,3]$ (ver Figura 3.5). La región mencionada se compone, pués, de dos regiones disjuntas: una está situada por encima del eje OX y la otra está por debajo. Por lo tanto hay que calcular por separado las áreas A^+ y A^-.

Una primitiva de $\operatorname{sen}(2x)$ es $-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

Luego,

$$A^+=\int_{0.2}^{\pi/2}\operatorname{sen}(2x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{0.2}^{\pi/2}=-\frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{0.2}^{\pi/2}=-\frac{1}{2}\Big(\cos(\pi)-\cos(0.4)\Big)\approx0.9605$$

$$A^-=\left|\int_{\pi/2}^{3}\operatorname{sen}(2x)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{\pi/2}^{3}\right|=\left|-\frac{1}{2}\Big(\cos(6)-\cos(\pi)\Big)\right|\approx|-0.9801|=0.9801$$

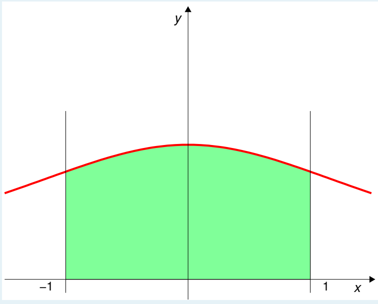
En consecuencia, el área total encerrada entre la gráfica y el eje OX es

$$A=A^+\,+\,A^-\approx0.9605+0.9801=\boxed{1.9406}$$

Ejemplo 3.38
Calcular el área de la región encerrada entre la gráfica de la función $y = \dfrac{8}{x^2+4}$, el eje OX y las rectas verticales $x=-1$ y $x=1$

La función $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ es positiva $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto la región descrita está, al completo, por encima del eje OX y el área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{8}{x^2+4} \right) dx$$



Se comienza por calcular una primitiva:

$$F(X) = \int \frac{8}{x^2+4}\, dx = \int \frac{\frac{8}{4}}{\frac{x^2+4}{4}}\, dx = \frac{8}{4} \int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}\, dx = 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\, dx$$

$$= 4 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \frac{1}{2}\, dx = 4 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ahora se utiliza la Fórmula de Barrow para calcular el valor de la integral definida:

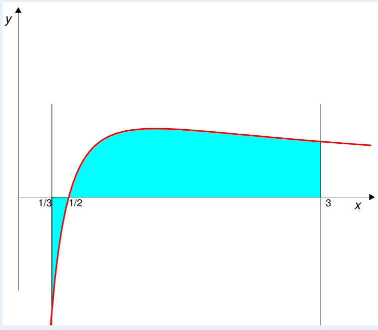
$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{8}{x^2+4} \right) dx = \Big[F(x)\Big]_{-1}^{1} = \left[4 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-1}^{1} = 4\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$$

$$\approx 4(0.4636 - (-0.4636)) = \boxed{3.7088}$$

Ejemplo 3.39
Calcular el área de la región limitada por la curva $y = \dfrac{\ln(2x)}{x}$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = \dfrac{1}{3}$ y $x = 3$.

La función $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x}$ solo está definida para $x > 0$ y solo se anula para $2x = 1$, esto es, para $x = 1/2$:

$$\frac{\ln(2x)}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$$



Está claro que, a la derecha de $x = 1/2$, la función es positiva y que, a su izquierda, la función es negativa.
Por lo tanto, puesto que el intervalo $[1/3, 3]$ contiene al punto $x = 1/2$, la región cuya área se pide calcular está en parte por debajo del eje OX y en parte por encima del mismo.
En consecuencia, su área es:

$$A = A_1 + A_2 = -\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx + \int_{1/2}^{3} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx$$

Calculamos en primer lugar una primitiva de la función:

$$F(x) = \int \frac{\ln(2x)}{x}\,dx$$

Esta integral indefinida se calcula fácilmente haciendo el cambio de variable:

$$u = \ln(2x) \;\Leftrightarrow\; du = \frac{1}{x}dx$$

luego

$$F(x) = \int \frac{\ln(2x)}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln(2x))^2}{2}$$

Calculamos ahora los valores de las dos integrales definidas por separado:

$$A_1 = -\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx = -\Big[F(x)\Big]_{1/3}^{1/2} = -\frac{(\ln(1))^2}{2} + \frac{(\ln(2/3))^2}{2} = \frac{(\ln(2/3))^2}{2} \approx \frac{(-0.4)^2}{2} = \frac{0.16}{2} = 0.08$$

$$A_2 = \int_{1/2}^{3} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx = \Big[F(x)\Big]_{1/2}^{3} = \frac{(\ln(6))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2} = \frac{(\ln(6))^2}{2} \approx \frac{(1.8)^2}{2} = \frac{3.24}{2} = 1.62$$

Luego, finalmente,

$$A = A_1 + A_2 \approx 0.08 + 1.62 \Longrightarrow \boxed{A \approx 1.7}$$

También es posible calcular mediante integrales definidas el área de recintos encerrados entre dos curvas. Si $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, entonces el área encerrada entre ambas curvas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$$

En efecto, se tiene (ver Figuras):

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2 - A_3, \qquad \int_a^b g(x)\,dx = A_1 - A_4 - A_3$$

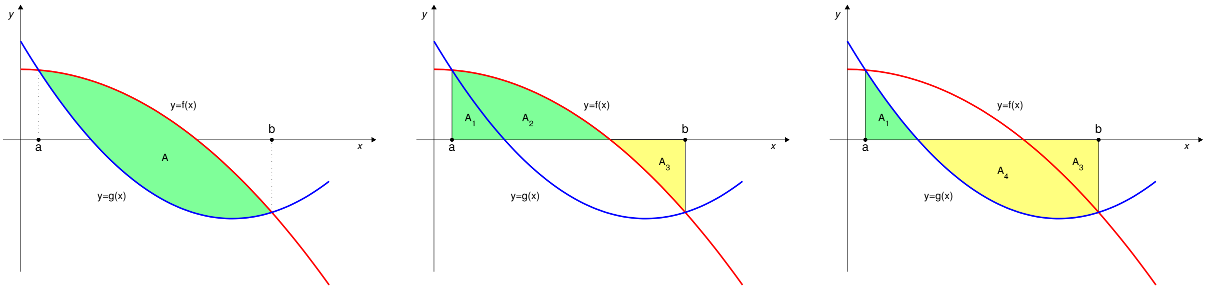


Figura 3.6: Las figuras muestran geométricamente la igualdad $A = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$

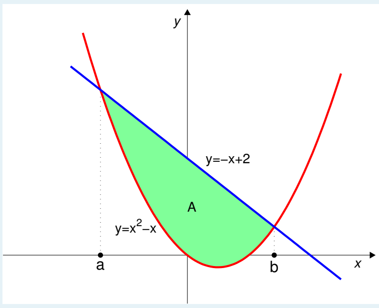
luego

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \Big(A_1 + A_2 - A_3\Big) - \Big(A_1 - A_4 - A_3\Big) = A_2 + A_4 = A$$

Ejemplo 3.40

Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y = x^2 - x$ e $y = -x + 2$

Es casi imprescindible hacer un esbozo gráfico de las funciones, los puntos de corte y de la región cuya área hay que calcular.



$y = x^2 - x$ es una parábola convexa que pasa por el origen y por el punto $(1, 0)$.
$y = -x + 2$ es una recta, que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(2, 0)$.
Para encontrar en qué puntos se cortan hay que igualar ambas expresiones y resolver la ecuación:

$$x^2 - x = -x + 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{2}$$

Luego al área a calcular está entre $x = a = -\sqrt{2}$ y $x = b = \sqrt{2}$.
En este intervalo, $-x + 2 \geq x^2 - x, \quad \forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, por lo tanto el área pedida es

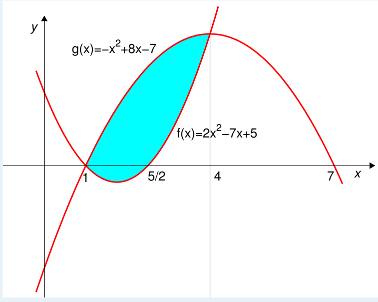
$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Big(-x + 2 - x^2 + x\Big)\, dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Big(2 - x^2\Big)\, dx = \Big[2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \Big[2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2^3}\Big] - \Big[-2\sqrt{2} - \frac{1}{3}(-\sqrt{2})^3\Big] = 2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2^3} + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2^3} = \boxed{\frac{8}{3}\sqrt{2}}$$

Ejemplo 3.41

Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las parábolas $y = 2x^2 - 7x + 5$ e $y = -x^2 + 8x - 7$

$y = 2x^2 - 7x + 5 = f(x)$ es una parábola convexa. Sus puntos de corte con el eje OX son:



$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = 5/2 \end{cases}$$

$y = -x^2 + 8x - 7 = g(x)$ es una parábola cóncava. Sus puntos de corte con el eje OX son:

$$-x^2 + 8x - 7 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Puntos de corte de las dos parábolas:

$$2x^2 - 7x + 5 = -x^2 + 8x - 7 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 15x + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

En consecuencia, al área que se pide será

$$A = \int_1^4 (g(x) - f(x))\, dx$$

Calculamos una primitiva de $g(x) - f(x)$:

$$\int (g(x) - f(x))\, dx = -\int \left(3x^2 - 15x + 12\right) dx = -\left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x\right),$$

luego:

$$A = -\left[x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x\right]_1^4 = -\left[(64 - 120 + 48) - \left(1 - \frac{15}{2} + 12\right)\right] = -\left(-8 - \frac{11}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

Luego, finalmente,

$$\boxed{A = \frac{27}{2}}$$

3.3.2 Volumen de un sólido de revolución

Una figura que se genera por la rotación de una región plana alrededor de un eje se llama sólido de revolución. La rotación de una curva plana genera una superficie. Esta superficie junto con su interior es un sólido de revolución. Por ejemplo, la superficie de un cilindro puede ser obtenida por la rotación de un segmento paralelo al eje, la de un cono, por la rotación de su generatriz alrededor del eje o la de una esfera por la rotación de una semicircunferencia en torno al diámetro. Queremos obtener el volumen de dichas figuras. Por comodidad consideramos que el eje de rotación coincide con el eje X.

Se pretende obtener el volumen de una figura generada por la rotación de una curva, $y = f(x)$, en torno al eje X, entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Para ello, se divide el intervalo $[a, b]$ en partes iguales de longitud Δx. Aproximamos la figura por N discos (cilindros) de anchura Δx y radio $f(x_k)$. Recordando que el volumen de un cilindro se obtiene de multiplicar π por el radio al cuadrado y por la altura del cilindro, el volumen de cada uno de estos discos es $\pi f(x_k)^2 \Delta x$. Sumando para los N discos, el volumen aproximado sería

$$V \approx \sum_{k=1}^{N} \pi f(x_k)^2 \Delta x.$$

Cuanto mayor sea el número de discos que consideramos, mejor será la aproximación. A continuación, tomamos

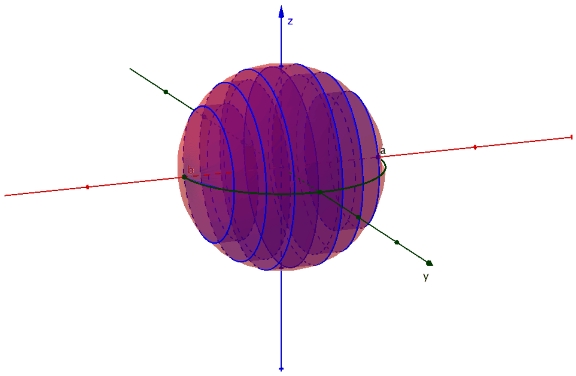


Figura 3.7: Esfera aproximada por discos.
https://www.geogebra.org/m/n3HuEfb7

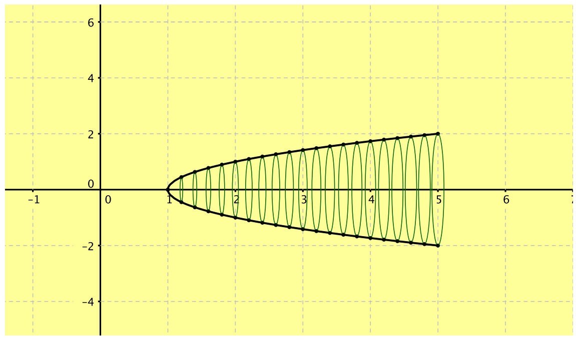


Figura 3.8: Figura generada por la rotación de la curva $y = \sqrt{x-1}$
https://www.geogebra.org/m/j4uH3RY8

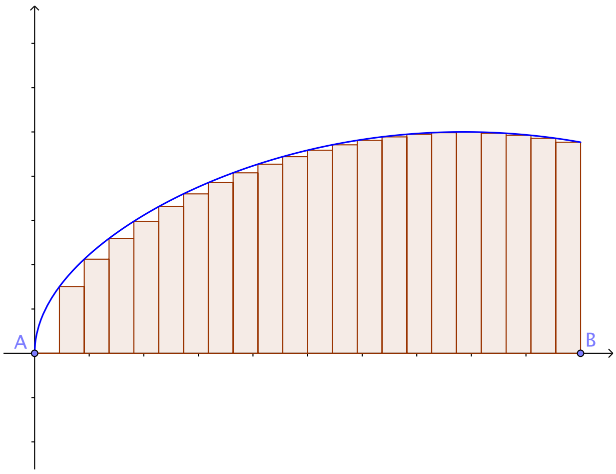


Figura 3.9: Partición del intervalo $[a, b]$.

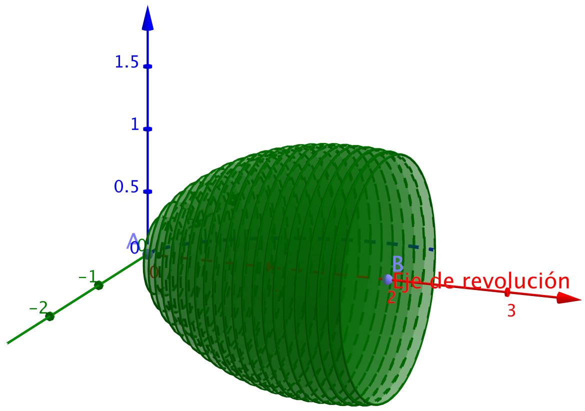


Figura 3.10: Sólido de revolución correspondiente a la función de la Figura 3.9.
https://www.geogebra.org/m/kAMk8Z9H

límite cuando $N \to +\infty$ en la expresión anterior, entonces ΔV tenderá al volumen buscado, Δx tenderá a dx y el sumatorio se convierte en integral, así obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} \pi f(x_k)^2 \Delta x \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Un razonamiento análogo se puede hacer para obtener el volumen de una figura obtenida por la rotación en torno al eje Y.

Volumen de una superficie de revolución

El volumen del sólido generado por la rotación de la región determinada por el arco de curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje X en torno a dicho eje viene dado por

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

El volumen del sólido generado por la rotación de la región determinada por el arco de curva $x = f(y)$, las rectas $y = a$ e $y = b$ y el eje Y en torno a dicho eje viene dado por

$$V = \pi \int_a^b f(y)^2 \, dy.$$

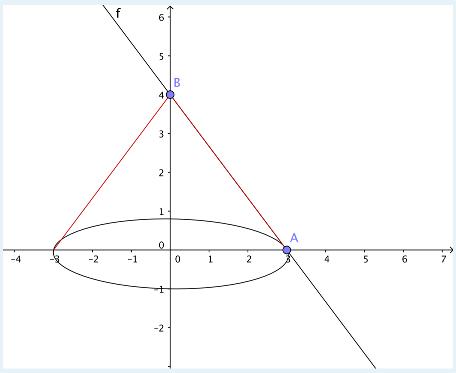
Ejemplo 3.42
Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ de la figura 3.9, en torno al eje X, para $1 \le x \le 5$.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx = \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 \, dx = \pi \int_1^5 (x-1) \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^5 = 8\pi.$$

Ejemplo 3.43
Obtener el volumen de un cono de radio $r = 3$ y altura $h = 4$.

Vamos a considerar el cono generado por la rotación del segmento que une los puntos $A(3, 0)$ y $B(0, 4)$ en torno al eje Y.
La recta que pasa por dichos puntos, considerando x como función de y, es $x = -\frac{3}{4}y + 3$, por tanto

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b f(y)^2 \, dy &= \pi \int_0^4 (-\frac{3}{4}y + 3)^2 \, dy \\ &= \pi \int_0^4 \left(\frac{9}{16}y^2 - \frac{9}{2}y + 9\right) dy \\ &= \pi \left[\frac{9}{16}\frac{y^3}{3} - \frac{9}{2}\frac{y^2}{2} + 9y \right]_0^4 = 12\pi. \end{aligned}$$



3.3.3 Cambio acumulado

En muchas situaciones, es más fácil determinar las variaciones de una cantidad que determinar su valor en un instante de tiempo determinado. Por ejemplo, la población de un país es difícil de evaluar directamente. Aunque existen los censos, estos se realizan solo de tarde en tarde y los ciudadanos, en general, no se ocupan de actualizarlo. Sin embargo, en la mayoría de los países es obligatorio registrar los nacimientos y los fallecimientos, es decir, las variaciones de la población.

Supongamos que la figura siguiente muestra los resultados de un recuento diario del número de nuevos casos durante un brote de fiebre aftosa: cada barra representa un día y la altura de la barra indica el número de casos diagnosticados dicho día.

Para obtener el número de infectados 10 días (por ejemplo) después del comienzo del brote, habría que sumar el número de infectados de los días 1, 2, 3, ... hasta 10:

$$1 + 4 + 1 + 4 + 3 + 3 + 6 + 2 + 11 + 4 = 39$$

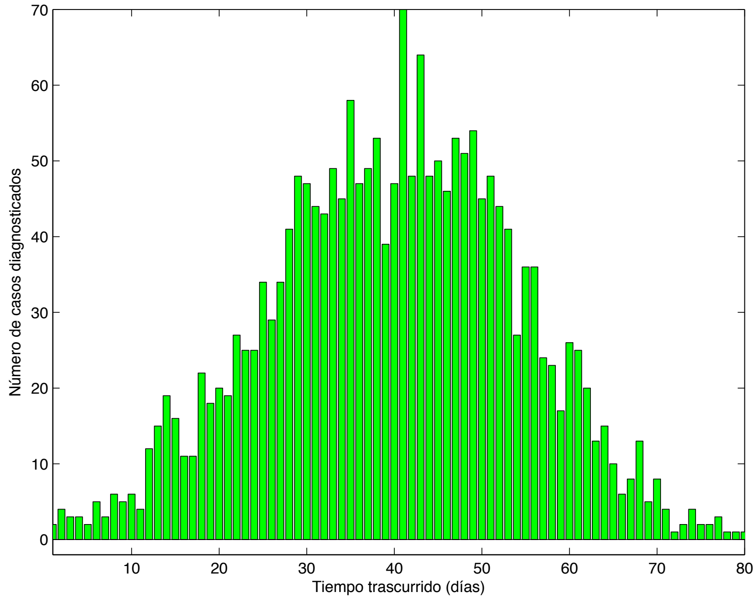


Figura 3.11: Número de nuevos casos diagnosticados cada día durante un brote de fiebre aftosa.

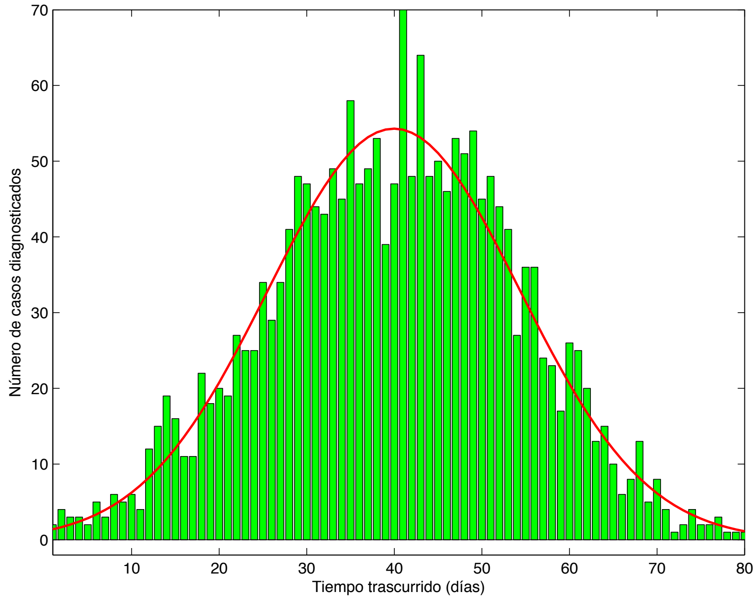


Figura 3.12: Modelo matemático para predecir el número de infectados cada día mediante una función continua.

Supongamos ahora que en vez de disponer de un conjunto discreto de datos sobre el número de infectados por día, hemos desarrollado un modelo matemático que utiliza una función continua $D(t)$ para predecir el número de nuevos casos diagnosticados (ver Figura 3.12).

¿Cómo calcular, en este caso, el número acumulado N de infectados durante los diez primeros días?

La respuesta a esta pregunta es: integrando la función $D(t)$ entre $t = 0$ y $t = 10$:

$$N = \int_0^{10} D(t)\, dt$$

(recuérdese la definición de la integral definida como límite de una suma de áreas de rectángulos de anchura cada vez más pequeña).

Ejemplo 3.44
Una población de insectos, que es inicialmente de 100 individuos, crece a una tasa de

$$q(t) = 2t + 3t^2$$

donde t es el tiempo en días. Determinar el tamaño de la población: (a) pasado un día; (b) pasados diez días.

Si denotamos $p(t)$ a la función que nos da el número de insectos en cada instante t (que es lo que queremos determinar), la función $q(t)$ nos da la *variación instantánea* de dicha función, es decir, $q(t)$ es la derivada de $p(t)$. Por lo tanto,

$$p(t) = \int q(t)\,dt = \int (2t + 3t^2)\,dt = t^2 + t^3 + C \quad \text{para alguna } C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

La constante C se podrá determinar a partir del dato inicial: en $t = 0$ la población esta compuesta por 100 individuos:

$$100 = p(0) = 0^2 + 0^3 + C \ \Leftrightarrow\ C = 100$$

Así pues, la función $p(t)$, que nos da el número de insectos en cada instante t es

$$p(t) = t^2 + t^3 + 100$$

Pasado un día, el número de insectos será:

$$p(1) = 1 + 1 + 100 = 102$$

Pasados 10 días será de

$$p(10) = 10^2 + 10^3 + 100 = 1200$$

Ejemplo 3.45
El área de una herida en curación, medida en cm^2, cambia a una tasa de

$$Q(t) = \frac{-4}{(t+1)^3}$$

siendo t el tiempo medido en días. Suponiendo que el área inicial de la herida era de 2 cm^2, calcular la superficie al cabo de 10 días.

Sea $A(t)$ la superficie de la herida en el instante t. La función $Q(t)$ nos dice cómo cambia la superficie de la herida, es decir, nos da la tasa de variación instantánea de la función $A(t)$:

$$A'(t) = Q(t) = \frac{-4}{(t+1)^3}$$

Integrando aquí tendremos

$$A(t) = \int \frac{-4}{(t+1)^3}\,dt = \int -4(t+1)^{-3}\,dt = -4\,\frac{1}{-2}\,(t+1)^{-2} + C = \frac{2}{(t+1)^2} + C$$

Determinamos el valor de C a partir del dato inicial:

$$2 = A(0) = \frac{2}{(0+1)^2} + C \ \Leftrightarrow\ C = 0. \qquad \text{Luego } \boxed{A(t) = \frac{2}{(t+1)^2}}$$

Al cabo de 10 días la superficie de la herida será: $A(10) = \dfrac{2}{(10+1)^2} = \dfrac{2}{11^2} = \dfrac{2}{121} \approx 0.165\,\text{cm}^2$

Obsérvese que en este último ejemplo, podíamos haber escrito

$$A(10) = A(0) + \int_0^{10} Q(t)\,dt \tag{3.1}$$

es decir: $A(10)$ es igual al área inicial, $A(0)$, más el cambio acumulado de $A(t)$ entre $t = 0$ y $t = 10$.

Esto no es más que una forma diferente de escribir la Regla de Barrow:

$$A(10) - A(0) = \int_0^{10} Q(t)\,dt$$

Si, en vez de escribir la fórmula anterior para el valor particular 10 la escribimos para un tiempo t cualquiera, obtenemos

$$A(t) = A(0) + \int_0^{t} Q(s)\,ds \tag{3.2}$$

que se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo. En la integral definida utilizamos la variable s para indicar la variable con respecto a la cual se integra para distinguirla de la variable t.

Lo mismo es cierto para un límite inferior distinto de 0.

Teorema Fundamental del Cálculo

Si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una primitiva cualquiera de f, entonces se tiene

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(s)\,ds \quad \forall x \in [a, b]$$

3.3.4 Valor medio de una función en un intervalo

Volviendo al ejemplo de la fiebre aftosa, con los datos de la Figura 3.12, supongamos que queremos calcular el promedio de nuevos casos diagnosticados durante los 10 primeros días: habría que sumar el número de casos durante los días 1, 2, 3 ... hasta 10 y dividir por el número de días:

$$\text{Promedio de casos en los 10 primeros días } = \frac{1+4+1+4+3+3+6+2+11+4}{10} = \frac{39}{10} = 3.9 \text{ casos.}$$

Entonces, si lo que tenemos es una función continua $D(t)$ (Figura 3.12), lo que habrá que hacer es integrar entre 0 y 10 y dividir por la longitud del intervalo de integración:

$$\bar{D} = \frac{\displaystyle\int_0^{10} D(t)\,dt}{10-0} = \frac{1}{10}\int_0^{10} D(t)\,dt$$

Valor medio de una función en un intervalo

Si f es una función continua en $[a, b]$, el valor medio o promedio de f en un intervalo (a, b) es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 3.46
El tiempo de supervivencia de náufragos en agua depende de la temperatura del agua y viene dado (aproximadamente) por

$$t(T) = \frac{0.2}{0.1 - 0.004\,T} \quad \textbf{horas}$$

donde la variable independiente T es la temperatura de la superficie del agua (grados Celsius). Determinar el tiempo medio de supervivencia en aguas a temperaturas entre $10°$C y $15°$C.

Lo que tenemos que calcular es el valor promedio de t para T variando entre 10 y 15:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{1}{15-10}\int_{10}^{15}\frac{0.2}{0.1-0.004\,T}\,dT = \frac{1}{5}\int_{10}^{15}\frac{0.2}{0.1-0.004\,T}\,dT \\ &= \frac{0.2}{5}\,\frac{1}{0.004}\int_{10}^{15}\frac{0.004}{0.1-0.004\,T}\,dT = \frac{-0.2}{0.02}\Big[\ln|0.1-0.004T|\Big]_{10}^{15} \\ &-10\Big[\ln|0.1-0.004\times 15| - \ln|0.1-0.04|\Big] \approx 4.05 \text{ horas.}\end{aligned}$$

Obsérvese que de la definición del valor medio se deduce que $\bar{f}$ es el valor que hace que

$$\bar{f}\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

es decir, es el valor que hace que el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX sea igual al área del rectángulo de base el intervalo $[a,b]$ y altura $\bar{f}$.

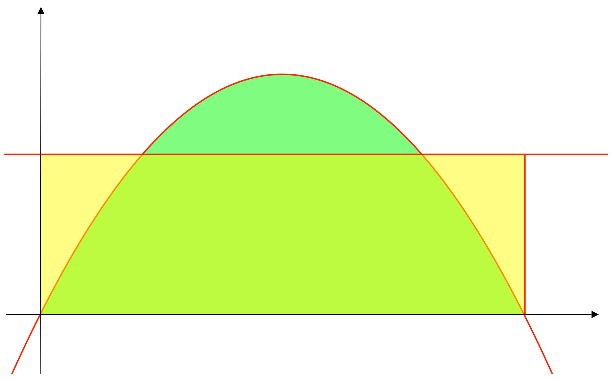


Figura 3.13: El valor medio de una función es el que hace que el área entre la curva y el eje OX coincida con al área del rectángulo de base $[a,b]$ y altura dicho valor medio.

3.3.5 Longitud de un arco de curva

Un *arco* es la parte de una curva que está entre dos puntos dados A y B. Estamos aquí interesados en calcular su longitud.

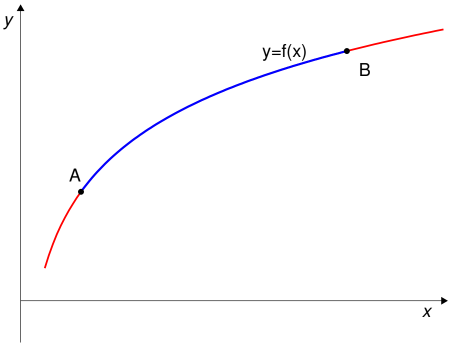


Figura 3.14: Un arco es un trozo de curva, comprendido entre dos puntos A y B.

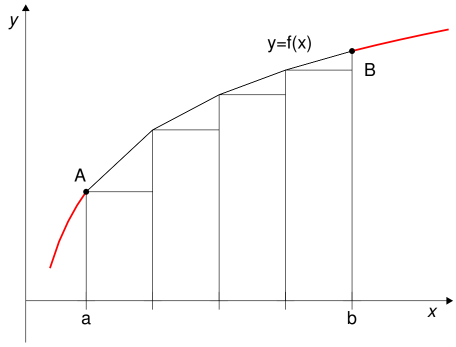


Figura 3.15: Para calcular la longitud del arco de curva, se aproxima este mediante una concatenación de segmentos rectos. La suma de sus longitudes aproxima la longitud del arco.

Para ello, comenzamos aproximando la curva mediante una sucesión de segmentos rectos, como en la Figura 3.15 y sumando sus longitudes. Luego veremos cuál es el límite de esa suma cuando los segmentos se hacen cada vez más pequeños.

En cada uno de los pequeños triángulos que se ven en la Figura 3.15 se puede aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar la longitud de la hipotenusa, y se tiene

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

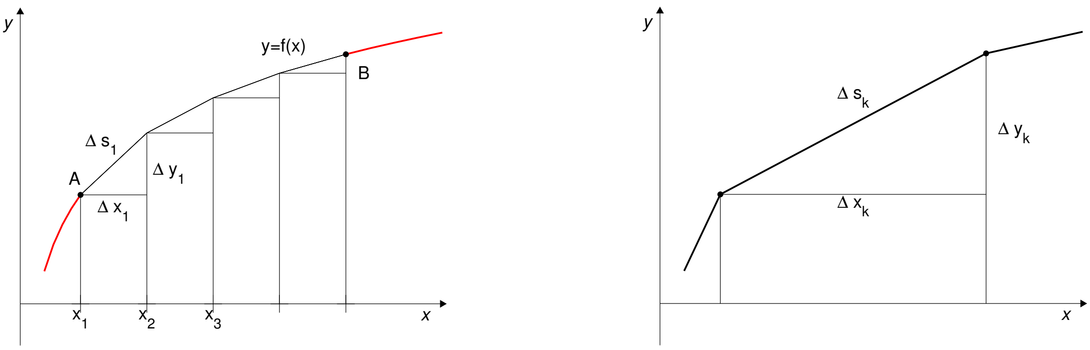


Figura 3.16: En cada triángulo se tiene $(\Delta s_k)^2 = (\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2$.

Sumando Δs para todos los segmentos se obtendría una aproximación de la longitud del arco. Cuanto mayor sea el número de segmentos con que aproximamos el arco de curva, mejor será la aproximación que se obtiene sumando sus longitudes.

Finalmente, al tomar límite cuando el número de subintervalos tiende a infinito, es decir, cuando la longitud de los Δx tiende a cero, se tendrá que los incrementos $(\Delta x, \Delta s)$ se convierten en diferenciales (dx, ds), el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ se convierte en la derivada $f'(x)$, y la suma se convierte en la integral:

$$\sum_{k=1}^{N} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\, \Delta x \overset{N \to \infty}{\to} \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

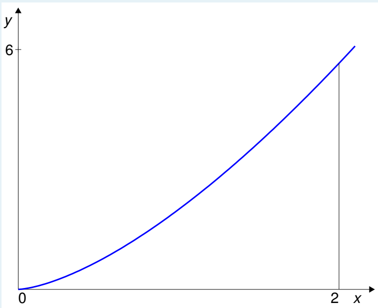
Longitud de un arco de curva

La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ comprendido entre los puntos $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Ejemplo 3.47

Hallar la longitud del arco de la curva $y = 2x^{3/2}$ comprendido entre los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$



Calculamos la derivada de la función $f(x) = 2x^{3/2}$:

$$f'(x) = 2\,\frac{3}{2}\,x^{1/2} = 3\,x^{1/2}$$

Según la fórmula anterior, la longitud del arco de curva mencionado es:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + (3x^{1/2})^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 9x}\, dx \\ &= \frac{1}{9}\int_0^2 9\,(1+9x)^{1/2}\, dx = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{3/2}(1+9x)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2}{27}\left[(1+18)^{3/2} - 1\right] \approx 6.0607 \end{aligned}$$

No todas las curvas pueden ser descritas mediante una relación del tipo $y = f(x)$. En muchas ocasiones, vienen descritas por **ecuaciones paramétricas**:

$$\left\{\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right. \qquad \text{para } t \in [a, b]$$

La variable t es llamada *parámetro*, y para cada valor de t en el intervalo $[a, b]$ se obtiene un valor de x y un valor de y, que son las coordenadas de un punto de la curva. Cuando el parámetro t recorre el intervalo $[a, b]$, el punto (x, y) recorre la curva.

Longitud de un arco de curva descrita mediante ecuaciones paramétricas

La longitud del arco de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right.$ comprendido entre los puntos correspondientes a $t = t_a$ y $t = t_b$ viene dada por:

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

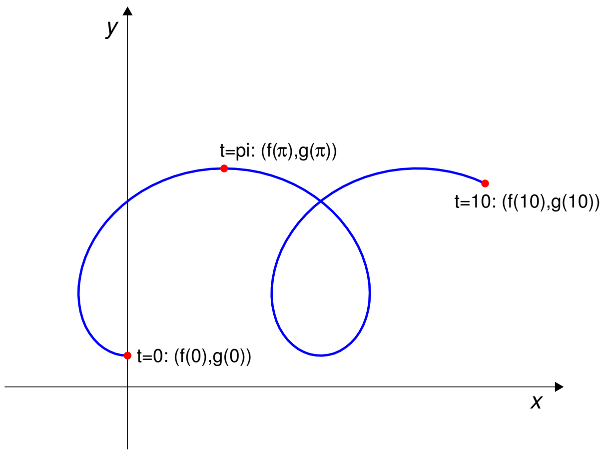
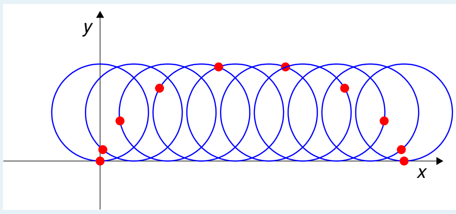


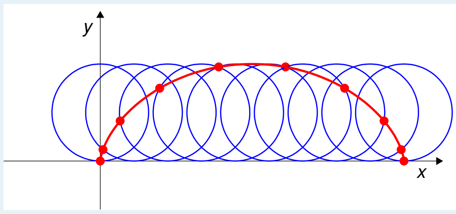
Figura 3.17: Curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t) = t - 3\,\mathrm{sen}(t)$, $y = g(t) = 4 - 3\cos(t)$, para $t \in [0, 10]$.

Ejemplo 3.48
La *cicloide* es la curva trazada por un punto fijo sobre una circunferencia cuando esta rueda sobre una línea recta. Las ecuaciones paramétricas de una cicloide, para una circunferencia de radio 1 son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t - \mathrm{sen}\, t \\ y = 1 - \cos(t) \end{array} \right.$$

Calcular la longitud de un arco de cicloide correspondiente a una vuelta completa de la circunferencia, es decir, para $t \in [0, 2\pi]$.





Calculamos las derivadas de las funciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = f(t) = t - \mathrm{sen}\, t; & f'(t) = 1 - \cos(t) \\ y = g(t) = 1 - cos(t); & g'(t) = \mathrm{sen}(t) \end{array} \right.$$

Según la fórmula anterior, la longitud del arco de curva mencionado es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\mathrm{sen}(t))^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(t) - 2\cos(t) + \mathrm{sen}^2(t)}\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\, \frac{1-\cos(t)}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, \sqrt{\frac{1-\cos(t)}{2}}\, dt \overset{(**)}{=} 2 \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4 \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= -4\left[\cos\frac{2\pi}{2} - \cos 0\right] = -4(-1-1) = 8 \end{aligned}$$

(*) Recuérdese que $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

(**) Se utiliza la identidad trigonométrica $\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

3.3.6 Área de una superficie de revolución

Para obtener el área de la superficie generada por la rotación de una curva, $y = f(x)$, en torno al eje X, entre las rectas $x = a$ y $x = b$, se divide el intervalo $[a, b]$ en partes iguales de longitud Δx, aproximamos la curva por una sucesión de segmentos rectos, Δs_k, obsérvese la figura 3.16, y hacemos girar ese conjunto de segmentos en torno al eje X. Cada Δs_k genera un tronco de cono.

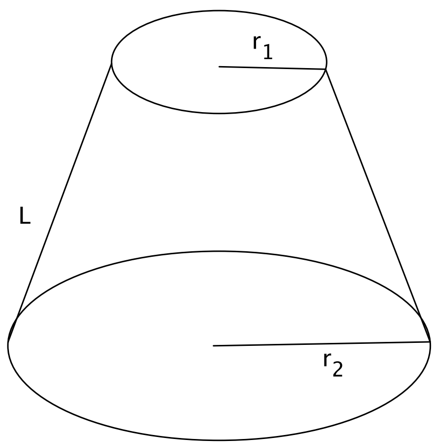


Figura 3.18: Tronco de cono

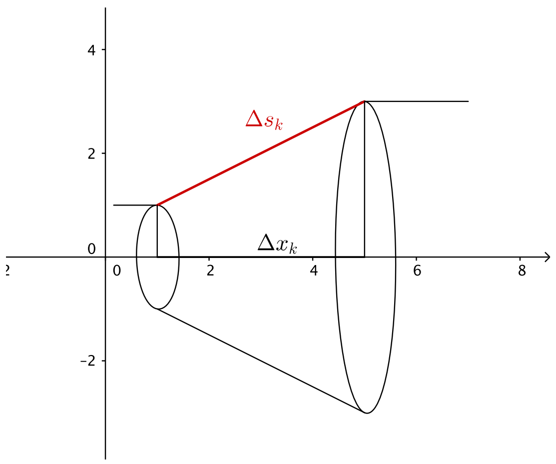


Figura 3.19: Giro de Δs_k en torno al eje X

El área lateral de un tronco de cono de radios r_1 y r_2 y generatriz L es $S = 2\pi r L$, donde $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$. En nuestro caso la medida de la generatriz, como vimos en la subsección 3.3.5, es

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

para cada k y los radios son $f(x_k)$ y $f(x_{k+1})$. Por el teorema del valor medio, existe un d_k en cada intervalo de amplitud Δx_k tal que la media de los radios es $r_k = f(d_k)$. Por tanto, la superficie para cada tronco de cono es

$$\Delta S_k = 2\pi f(d_k) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k.$$

Sumando para todos ellos, obtendremos una aproximación del área buscada, S,

$$S \approx \sum_{k=1}^{N} 2\pi f(d_k) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k.$$

Tomando límite cuando $\Delta x_k \to 0$ obtenemos S,

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

De modo análogo se puede razonar para obtener el área cuando el giro es en torno al eje Y.

Área de una superficie de revolución

El área de la superficie de revolución formada al girar la gráfica de $y = f(x)$ alrededor del eje X entre $x = a$ y $x = b$ viene dada por

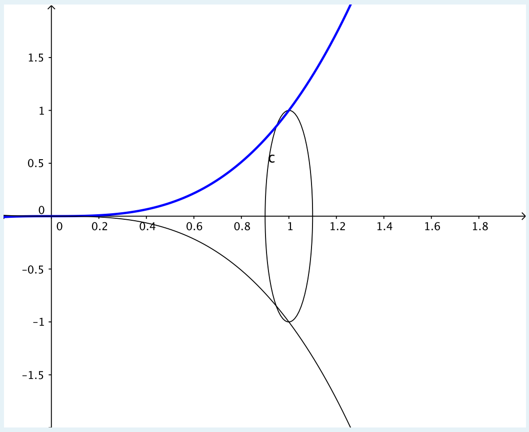
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

El área de la superficie de revolución formada al girar la gráfica de $x = f(y)$ alrededor del eje Y entre $y = a$ y $y = b$ viene dada por

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy.$$

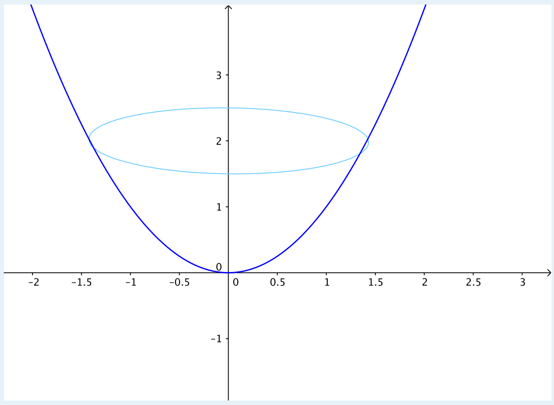
Ejemplo 3.49
Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^3$ alrededor del eje X, en el intervalo $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx \\
&= \frac{2\pi}{36} \int_0^1 (36x^3)(1 + 9x^4)^{1/2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{18} \left[\frac{(1 + 9x^4)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1) = 3.563.
\end{aligned}$$



Ejemplo 3.50
Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^2$ alrededor del eje Y, en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$.

La función (de x) $y = x^2$ puede expresarse en la forma $x = \sqrt{y}$ como función de y. Cuando $x = \sqrt{2}$ entonces $y = 2$. Por tanto, buscamos el área de la superficie generada por la rotación de $x = \sqrt{2}$ en torno al eje Y entre $y = 0$ y $y = 2$.



$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_0^2 \sqrt{y}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_0^2 \sqrt{y}\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy \\
&= \pi \int_0^2 \sqrt{4y + 1}\, dy
\end{aligned}$$

Para obtener una primitiva de $\sqrt{4y+1}$ hacemos el cambio $t^2 = 4y + 1$. Por tanto, $dy = \dfrac{1}{2}\, t\, dt$ y obtenemos

$$\int \sqrt{4y + 1}\, dy = \frac{1}{2} \int t^2\, dy + C = \frac{t^3}{6} + C = \frac{1}{6}(4y + 1)^{3/2} + C.$$

Sustituyendo en la expresión para S,

$$S = \frac{\pi}{6}\left[(4y + 1)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{6}(9^{3/2} - 1) = \frac{13\pi}{3}.$$

3.4 Nociones de integración numérica

Como se ha visto antes, si se conoce una primitiva F de la función f, se puede calcular el valor de la integral definida mediante la *Regla de Barrow*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

En la mayoría de los casos, sin embargo, no se puede utilizar esta fórmula, ya que no se conoce dicha primitiva. Es posible, por ejemplo, que no se conozca la expresión matemática de la función f, sino solo sus valores en determinados puntos, recogidos de un experimento. Pero también hay funciones (de apariencia sencilla) para las que se puede demostrar que no tienen ninguna primitiva que pueda escribirse en términos de funciones elementales (por ejemplo e^{-x^2})

La **integración numérica** es una herramienta de las matemáticas que proporciona **fórmulas** y **técnicas** para calcular aproximaciones de integrales definidas. Gracias a ella se pueden calcular, bien es cierto que de forma aproximada, valores de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente y, sobre todo, se puede realizar ese cálculo en un ordenador.

La idea básica para aproximar el valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sin utilizar una primitiva de f ya se expuso en la sección 3.2: calcular la suma de las áreas de los rectángulos que "recubren" el área.

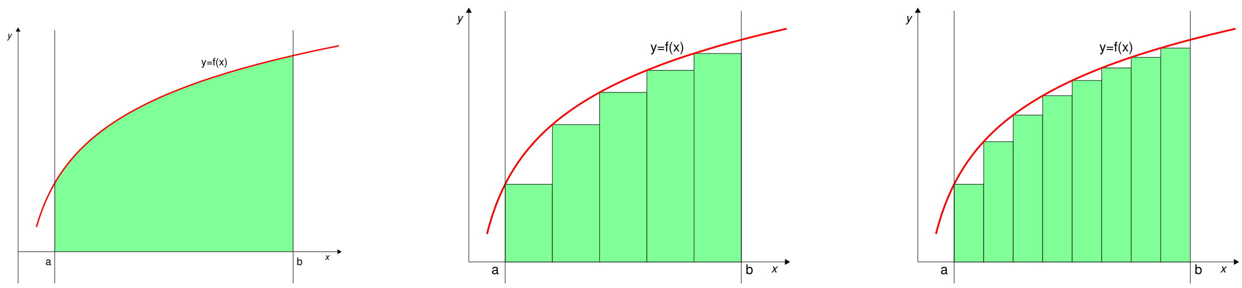


Figura 3.20: La integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, que es el valor del área bajo la curva sombreada en la primera figura, se puede aproximar por el resultado de sumar las áreas de los rectángulos.

Como resulta evidente, se comete un error, ya que se desprecian –en este caso– las áreas de las pequeñas zonas triangulares comprendidas entre la curva y los rectángulos. En el caso particular de la función representada en las figuras, el valor de la aproximación **es menor** que el valor exacto. Pero en otros casos puede ser mayor; véase, por ejemplo, la figura siguiente.

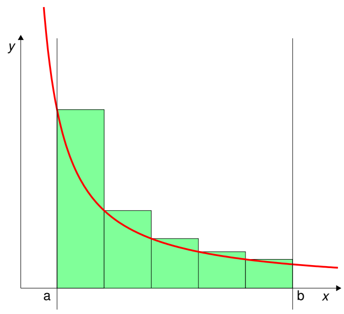


Figura 3.21: En este caso,la suma de las áreas de los rectángulos proporciona un valor **mayor** que el valor exacto, pero igualmente es una aproximación.

Como también resulta evidente, y se puede demostrar matemáticamente, el error que se comete es más pequeño (en valor absoluto, es decir, sin tener en cuenta el signo del mismo) cuanto más "estrechos" sean los rectángulos, es decir, cuanto mayor cantidad de ellos se usen.

¿Cómo se calcula la suma de las áreas de los rectángulos?

Se supone que se usan 5 rectángulos, como en la Figura 3.22 y se denotan $x_1 = a, x_2, x_3, x_4, x_5$ y $x_6 = b$ los puntos que determinan los 5 subintervalos.

Se supone también, para hacer las cosas más fáciles, que estos puntos están regularmente espaciados, es decir, que la distancia entre cada dos puntos consecutivos, que se denota h, es siempre la misma.

El área de los distintos rectángulos es (recordando área = base×altura):

$$\text{Area}(R_1) = \text{Longitud del segmento } [x_1, x_2] \times \text{ Altura del rectángulo} = (x_2 - x_1) \times f(x_1) = h\, f(x_1)$$

$$\text{Area}(R_2) = \text{Longitud del segmento } [x_2, x_3] \times \text{ Altura del rectángulo} = (x_3 - x_2) \times f(x_2) = h\, f(x_2)$$

etc.

Sumando todas se tiene:

$$\begin{aligned}\text{Area}(R_1) + \cdots + \text{Area}(R_5) &= hf(x_1) + hf(x_2) + hf(x_3) + hf(x_4) + hf(x_5)\\ &= h\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\right)\end{aligned}$$

y esta última expresión proporciona una aproximación (es verdad que no muy buena, de momento) del valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\right)$$

Observamos ahora que, puesto que hay 5 subintervalos de igual longitud, debe ser

$$h = \frac{\text{Longitud del intervalo } [a, b]}{5} = \frac{b-a}{5}$$

luego, la fórmula anterior quedaría

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{5}\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\right)$$

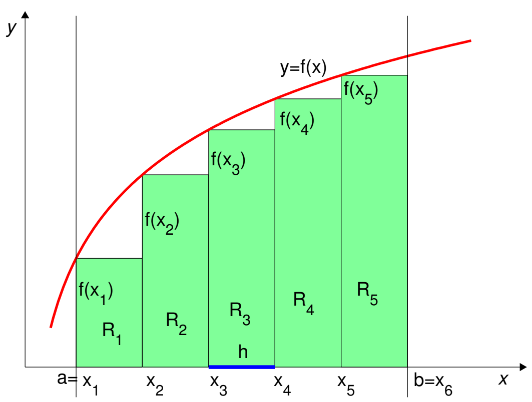


Figura 3.22: La altura del rectángulo de base $[x_1, x_2]$ es $f(x_1)$, el valor de f en x_1; la del rectángulo de base $[x_2, x_3]$ es $f(x_2)$; etc.

Si, en lugar de 5, tuviéramos 6 subintervalos, entonces tendríamos 7 puntos: $x_1 = a, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ y $x_7 = b$ y la aproximación se escribiría:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)\right)$$

(obsérvese que el último punto x_7 no se utiliza en esta expresión). Si el número de subintervalos utilizados fuera muy grande, por ejemplo, 100 (es decir, 101 puntos), se podría escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{100}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{100})\right)$$

Es preferible y más usual, sin embargo, utilizar la expresión siguiente

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{100}\sum_{i=1}^{100} f(x_i)$$

El símbolo $\sum$ (letra griega sigma mayúscula) es muy utilizado en matemáticas: se denomina "sumatorio" y sirve para escribir de forma escueta una suma con un número muy grande o indeterminado de sumandos.

La expresión $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} f(x_i)$ se lee : *suma de* $f(x_i)$ *desde* $i = 1$ *hasta* $i = 100$.

Ya podemos, pues, escribir de forma general la aproximación de la integral para un número indeterminado de subintervalos.

Fórmula de los rectángulos

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sean $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = b$, $n+1$ puntos que definen una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Entonces la integral definida de f entre a y b se puede aproximar por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

En la deducción de esta fórmula se ha aproximado el área bajo la curva en cada subintervalo por el área del rectángulo con la misma base y altura igual al valor de la función en el extremo inferior del subintervalo, como en la Figura 3.23. Pero también se podría haber utilizado el valor de la función en el extremo superior, como se ve en la Figura 3.24.

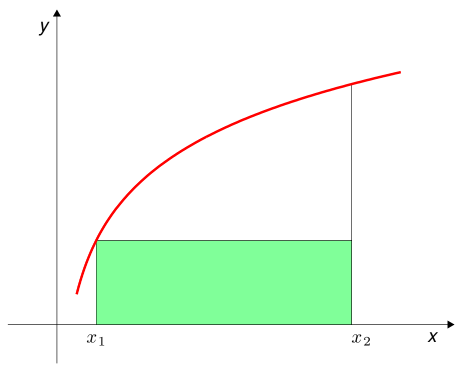


Figura 3.23: Se toma como altura del rectángulo el valor de f en el extremo inferior, x_1.

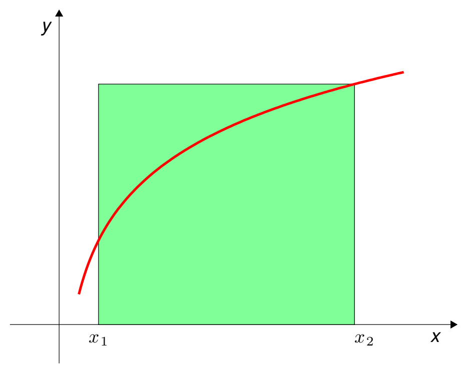


Figura 3.24: Se toma como altura del rectángulo el valor de f en el extremo superior, x_2.

Así se obtendría una variante de la Fórmula de los Rectángulos. Ambas fórmulas dan resultados similares desde el punto de vista del error que se comete en la aproximación.

Fórmula de los rectángulos (variante)

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sean $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = b$, $n+1$ puntos que definen una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Entonces la integral definida de f entre a y b se puede aproximar por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=2}^{n+1} f(x_i)$$

Otra posibilidad, es tomar como altura del rectángulo el valor de la función en el punto medio del subintervalo, como se muestra en la Figura 3.25

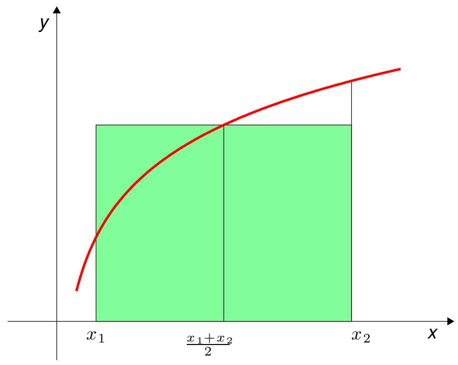


Figura 3.25: En la Fórmula del punto medio, se aproxima el área bajo la curva por el área del rectángulo de altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.

Fórmula del punto medio

Sea f una función continua en $[a,b]$ y sean $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = b$, $n+1$ puntos que definen una partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Entonces la integral definida de f entre a y b se puede aproximar por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Esta fórmula es de **orden 1**.

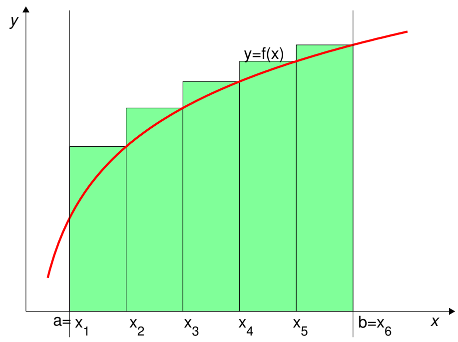


Figura 3.26: Fórmula de los rectángulos tomando como altura el valor de f en el extremos superior de cada subintervalo.

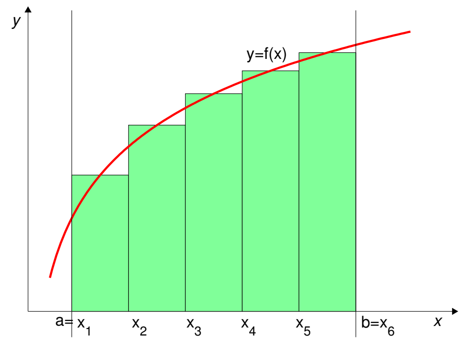


Figura 3.27: En la Fórmula del punto medio elige como altura de los rectángulos en valor de la función los puntos medios de cada subintervalo.

Orden de una fórmula de integración numérica

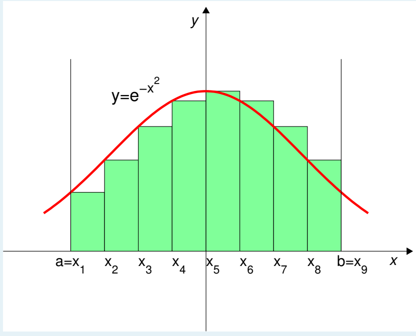
Se dice que una fórmula de integración es de **orden** k cuando es exacta para polinomios de grado k, es decir, que cuando el integrando es un polinomio de grado k, la fórmula proporciona el **valor exacto** de la integral. El **orden** de una fórmula de integración numérica nos da una medida de su bondad.

La Fórmula de los rectángulos es de orden 0.

Ejemplo 3.51
Aproximar el valor de la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ utilizando la fórmula de los rectángulos con 8 subintervalos.

Se construye una partición de $[-1,1]$ en 8 subintervalos, de forma que

$$h = \frac{1-(-1)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$



y los puntos del soporte de la partición son:

$$\begin{array}{ll}
x_1{=}-1 \quad = -1 & x_6{=}-1+5h{=}0.25 \\
x_2{=}-1+h \; = -0.75 & x_7{=}-1+6h{=}0.5 \\
x_3{=}-1+2h{=}-0.5 & x_8{=}-1+7h{=}0.75 \\
x_4{=}-1+3h{=}-0.25 & x_9{=}-1+8h{=}1 \\
x_5{=}-1+4h{=}\;\; 0 &
\end{array}$$

Según la Fórmula de los Rectángulos anterior:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \approx h \sum_{i=1}^{8} \mathrm{e}^{-x_i^2}$$

Con ayuda de una calculadora, se tiene:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \approx 0.25\,\Big(0.3679 + 0.5698 + 0.7788 + 0.9394 + 1 + 0.9394 + 0.7788 + 0.5698\Big) = \boxed{1.4860}$$

Hay que insistir en que el valor calculado es **solo una aproximación** del valor de la integral definida.

Otra posibilidad es aproximar el área bajo la curva en cada subintervalo por el área del trapecio que se muestra en la Figura 3.28.

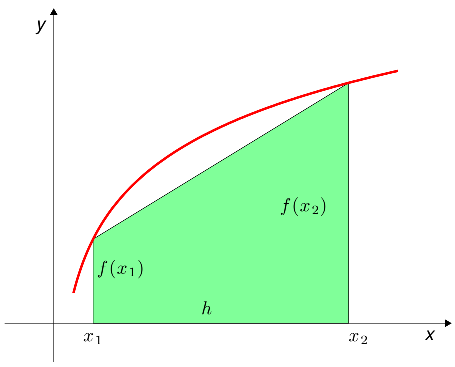


Figura 3.28: En el subintervalo $[x_1, x_2]$, por ejemplo, el área bajo la curva se aproxima por el área del trapecio, que tiene una base de longitud $f(x_1)$, otra base de longitud $f(x_2)$, y altura $h = x_2 - x_1$.

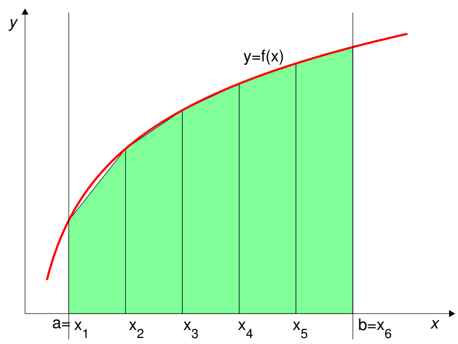


Figura 3.29: En la Fórmula de los trapecios, se aproxima el valor de la integral definida por la suma de las áreas de los trapecios.

Recordando que el área de un trapecio es $= \dfrac{\text{suma de las bases}}{2} \times$ altura, se tiene que el área del trapecio de la Figura 3.28 es

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\, h$$

y que la suma de las áreas de todos los de la Figura 3.29, es decir la aproximación de la integral, es

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}h + \cdots + \frac{f(x_5)+f(x_6)}{2}h \\
&= \frac{h}{2}\Big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_5)+f(x_6)\Big) \\
&= \frac{b-a}{2\times 5}\Big(f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6)\Big)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que, en esta suma, el valor de f en los extremos ($x_1 = a$ y $x_6 = b$) aparece una sola vez, mientras que el valor en los puntos internos (x_2, x_3, x_4 y x_5) aparece dos veces.

Generalizando esto al caso general, con un número indeterminado de subintervalos, se tiene:

Fórmula de los trapecios

Sea f una función continua en $[a,b]$ y sean $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = b$, $n+1$ puntos que definen una partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Entonces la integral definida de f entre a y b se puede aproximar por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{i=2}^{n} f(x_i) + f(b)\right)$$

Esta fórmula es de **orden 1**.

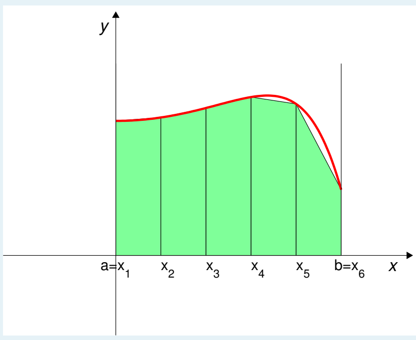
Ejemplo 3.52

Aproximar el valor de la integral definida $\int_0^1 \operatorname{sen}(e^{x^2})\,dx$ utilizando la fórmula de los trapecios con 5 subintervalos.

Se considera una partición de $[0,1]$ en 5 subintervalos, de forma que

$$h = \frac{1}{5} = 0.2$$

y los puntos del soporte de la partición son:



$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 0 & x_1^2 = 0 \\
x_2 = 0.2 & x_2^2 = 0.04 \\
x_3 = 0.4 & x_3^2 = 0.16 \\
x_4 = 0.6 & x_4^2 = 0.36 \\
x_5 = 0.8 & x_5^2 = 0.64 \\
x_6 = 1 & x_6^2 = 1
\end{array}
$$

La Fórmula de los trapecios anterior:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(e^{x^2})\,dx \approx \frac{h}{2}\left[\operatorname{sen}(e^0) + 2\sum_{i=2}^{5}\operatorname{sen}(e^{x_i^2}) + \operatorname{sen}(e^1)\right]$$

$$= 0.1\left[\operatorname{sen}(e^0) + 2\operatorname{sen}(e^{0.04}) + 2\operatorname{sen}(e^{0.16}) + \operatorname{sen}(e^{0.36}) + 2\operatorname{sen}(e^{0.64}) + \operatorname{sen}(e^1)\right]$$

Se tiene:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}\left(e^{x^2}\right)dx &\approx 0.1\Big[0.8415 + 2\big(0.8628 + 0.9221 + 0.9906 + 0.9474\big) + 0.4108\Big] \\
&= \boxed{0.8698}
\end{aligned}
$$

Hay que insistir en que el valor calculado es **solo una aproximación** del valor de la integral definida.

Tema 4

Análisis de Fourier

Versión: 18 de octubre de 2019

4.1 Conceptos Previos

4.1.1 Series numéricas

De un modo informal puede decirse que una serie numérica es la suma de una cantidad infinita de números. Cuando el resultado es un número finito se dice que la serie es convergente. Por ejemplo, si sumamos las potencias de $1/2$ desde $n = 1$ en adelante: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ...$ el resultado es 1. Es un ejemplo de serie convergente. Se suele usar la notación $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Dada una sucesión de números a_1, a_2, a_3,..., para tratar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se consideran las llamadas **sumas parciales**:

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1 & \\ S_2 = a_1 + a_2 & \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 & \\ ... & \\ S_n = a_1 + ... + a_n & \forall n \geq 1 \\ ... & \end{array}$$

Estas sumas parciales forma una sucesión $\{S_n\}$. Una definición formal de serie convergente es la siguiente:

Serie numérica convergente

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente y su suma es S si existe el limite de S_n cuando n tiende a $+\infty$ y

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

A a_n se le llama término general de la serie. En el primer ejemplo, $\frac{1}{2^n}$ sería el término general.

De hecho, la representación decimal de los números reales no es más que una expresión para la suma de una serie. Por ejemplo,

$$\pi = 3'14159.... = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + ...$$

4.1.2 Series de funciones

Dada una sucesión de funciones f_1, f_2, f_3,.... definidas en un intervalo I, para cada $x \in I$ consideramos la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Obsérvese que para cada x fijo, esta expresión es una serie numérica. Diremos que la serie de funciones converge en $x = a$ si la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(a)$ es convergente. Denotamos A al conjunto de puntos a en los que la serie converge.

Función definida por una serie de funciones convergente
Dada la suma parcial $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$ donde $x \in A$, siendo A el conjunto de puntos donde la correspondiente serie numérica converge, la función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$$

es la función suma.

Algunos ejemplos de funciones definidas por series de funciones son:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En estos ejemplos, las series son de tipo Taylor y puede comprobarse que convergen para todo $x \in \mathbb{R}$.

En este tema en cambio, estamos interesados en series de otro tipo llamadas series trigonométricas. En ellas aparecen sumas de senos y cosenos. En general son de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\Big).$$

4.1.3 Integrales impropias de primera especie

Hasta ahora, hemos considerados las integrales definidas sobre intervalos acotados $[a, b]$ para a, b finitos. Veamos el modo de definir integrales en $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, +\infty)$. Es decir vamos a dar sentido a expresiones como

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Integrales en intervalos no acotados

Si existe el límite $\lim\limits_{b\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ y es finito se dice que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente y

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si existe el límite $\lim\limits_{a\to-\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ y es finito se dice que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ es convergente y

$$\int_{-\infty}^{a} (x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dado un número $c\in\mathbb{R}$ cualquiera, si existen los límites $\lim\limits_{a\to-\infty}\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ y $\lim\limits_{b\to+\infty}\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ y son finitos se dice que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 4.1
Obtener $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$.

Calculamos la integral $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1-\frac{1}{b}$. Como $\lim\limits_{b\to+\infty} 1-\dfrac{1}{b} = 0$, se tiene que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

Ejemplo 4.2
Obtener $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Tomamos por ejemplo $c=0$ y calculamos las integrales:

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^b = \arctan b, \qquad \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_a^0 = -\arctan a.$$

Como $\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan b = \dfrac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{a\to-\infty}\arctan a = -\dfrac{\pi}{2}$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

4.2 Series de Fourier

Bajo ciertas condiciones, una función periódica puede expresarse mediante suma infinita (serie) de senos y/o cosenos.

Por ejemplo, veremos que la función $f(x)=\pi^2-x^2$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y definida en todo $\mathbb{R}$ por periodicidad (es decir, definida del mismo modo en $[\pi,2\pi]$, $[2\pi,3\pi]$,... y en $[-2\pi,-\pi]$, $[-3\pi,-2\pi]$,...), puede desarrollarse en serie de la forma

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Las primeras sumas parciales de la serie son:

$$S_1 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos x,$$

$$S_2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos x - \cos(2x),$$

$$S_3 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos x - \cos(2x) + \frac{4}{9}\cos(3x),$$

$$S_4 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos x - \cos(2x) + \frac{4}{9}\cos(3x) - \frac{1}{4}\cos(4x).$$

Cuanto mayor sea la suma parcial considerada, más "se parece" a la función. Obsérvese por ejemplo las gráficas de $y = \pi^2 - x^2$ (en azul) y S_4 (en rojo) en la Figura 4.2.

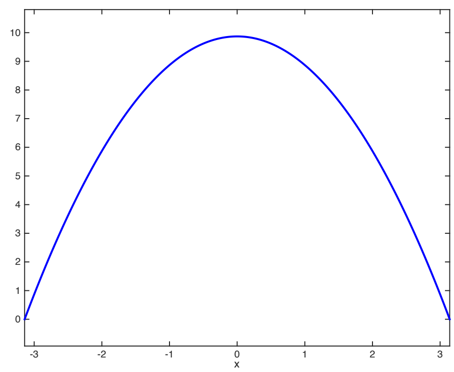


Figura 4.1: $f(x) = \pi^2 - x^2$ en $[-\pi, \pi]$

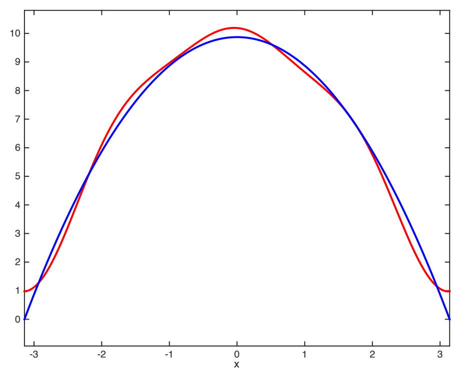


Figura 4.2: $f(x)$ y S_4 en $[-\pi, \pi]$

El significado matemático de decir que "se parecen" es el siguiente: Dada f, se puede probar que, para cada $n \geq 1$, la correspondiente S_n es la función de la forma $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + ... + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ que hace mínima la cantidad

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (a_0 + a_1\cos x + b_1 \operatorname{sen} x + ... + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))|^2\, dx.$$

A lo largo de esta Sección vamos a estudiar cómo y bajo qué condiciones podemos expresar una función periódica de periodo T como una serie cuyos sumandos son combinaciones de senos y cosenos, esto es, como una serie trigonométrica del siguiente tipo:

$$f(x) \stackrel{?}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right).$$

En teoría de la comunicación, la variable independiente es el tiempo t y la función $f(t)$ se dice que es una señal periódica en tiempo continuo. Cuando esta representación es posible, decimos que hemos descompuesto la señal en armónicos o modos de vibración.

4.2.1 La serie de Fourier de una función periódica

Las series de Fourier se suelen definir para un conjunto de funciones más general que el de funciones continuas. Recordemos que una **función continua a trozos** es una función continua salvo quizás en algunos puntos x_i, $i = 1, ..., n$, donde los límites laterales son finitos. Una función continua es un caso particular de esta situación.

Las series de Fourier se definen en primer lugar para funciones periódicas.

Serie de Fourier de f Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función continua a trozos y periódica de periodo T. Se llaman coeficientes de Fourier de f en el intervalo $[-T/2, T/2]$ a los siguientes números:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx, \qquad n = 1, 2, ...$$

Se llama serie de Fourier asociada a f a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right).$$

De manera análoga pueden definirse los coeficientes de Fourier en el intervalo $[0, T]$.

En general, la serie no tiene por qué ser convergente en cualquier x y en caso de que lo sea, no sabemos si la suma en x coincide con $f(x)$.

Ejemplo 4.3

Obtener la serie de Fourier para la función $f(x) = \pi^2 - x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y definida en todo $\mathbb{R}$ por periodicidad.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[(\pi^2 - x^2)\frac{1}{n}\,\text{sen}(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)\,dx.$$

Integrando nuevamente por partes,

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\left[\frac{\text{sen}(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{4}{n^2}\cos(n\pi).$$

Por tanto, $a_n = -\frac{4}{n^2}(-1)^n$. Análogamente, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,\text{sen}(nx)\,dx = 0$. En consecuencia, la serie de Fourier asociada a la función dada es

$$\frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

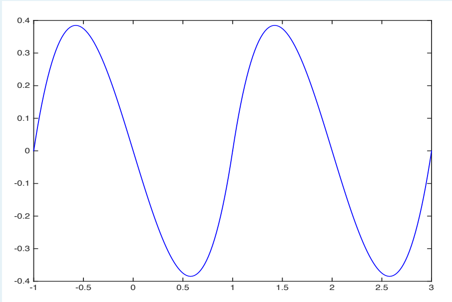
Casos particulares: Funciones pares o impares

Si f es **par**, entonces todos los $b_n = 0$ y la serie de Fourier asociada es $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$,

si f es **impar**, entonces todos los $a_n = 0$ la serie de Fourier asociada es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$,

donde a_n y b_n se definen del mismo modo que en el caso general.

Ejemplo 4.4
Obtener los dos primeros sumandos de la serie de Fourier asociada a la función $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 1]$ y periódica de periodo $T = 2$.



Se ha representado la función en el intervalo $[-1, 3]$. Puesto que es impar, la serie es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\pi n x)$.

Calculamos los primeros coeficientes de Fourier:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_{-1}^{1} (x^3 - x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \left[-(x^3 - x) \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1) \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1) \cos(\pi x)\, dx = \frac{1}{\pi^2} \left[(3x^2 - 1) \operatorname{sen}(\pi x) \right]_{-1}^{1} - \frac{6}{\pi^2} \int_{-1}^{1} x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx \\
&= -\frac{6}{\pi^2} \int_{-1}^{1} x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \frac{6}{\pi^3} \left[x \cos(\pi x) \right]_{-1}^{1} - \frac{6}{\pi^3} \int_{-1}^{1} \cos(\pi x)\, dx = -\frac{12}{\pi^3}
\end{aligned}
$$

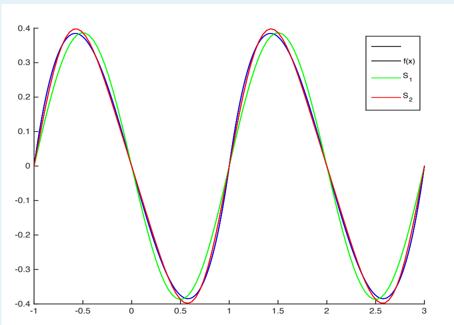
Por tanto,

$$S_1 = -\frac{12}{\pi^3} \operatorname{sen}(\pi x).$$

Análogamente,

$$S_2 = -\frac{12}{\pi^3} \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{3}{2\pi^3} \operatorname{sen}(\pi 2x).$$

En la figura se observa que la suma parcial S_1 y más aún S_2, aproximan la función.



Veamos ahora cuándo la serie de Fourier define una función y bajo qué condiciones es igual a $f(x)$.

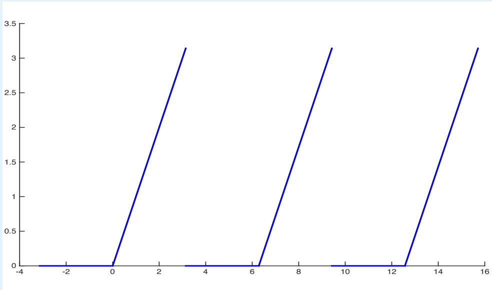
Los ejemplos que hemos visto corresponden a funciones continuas. Estas funciones siempre pueden aproximarse por sumas de senos y/o cosenos.

Cuando la función es periódica de periodo $T > 0$ y continua en todo $\mathbb{R}$ entonces, la serie de Fourier asociada converge en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)$$

Veamos un ejemplo de una función periódica que no es continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.5
Obtener la serie de Fourier asociada a la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \textbf{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ **y que es periódica de periodo** 2π**.**



Calculamos los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx.$$

Integrando por partes,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

Análogamente,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi} 0 f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx.$$

Integrando por partes,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n} + \frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Así pues, la serie de Fourier es

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\,(nx)\,.$$

Calculemos los primeros sumandos de esta serie:

$$S_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \mathrm{sen}\,x,$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2x),$$

$$S_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2x) - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(3x).$$

En las Figuras 4.3-4.6 observamos que las sumas parciales S_1, S_2, S_3 se van pareciendo cada vez más a $f(x)$ salvo en las proximidades de los extremos del intervalo, donde la función es discontinua.

Diremos que una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es **continua a trozos** cuando es continua salvo quizás en algunos puntos

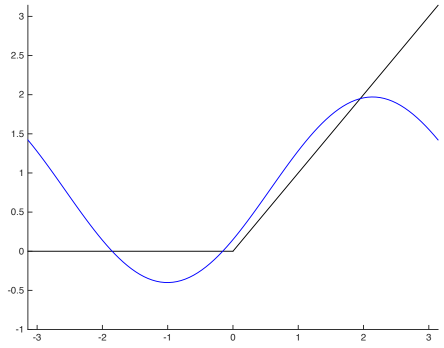


Figura 4.3: S_1 y $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

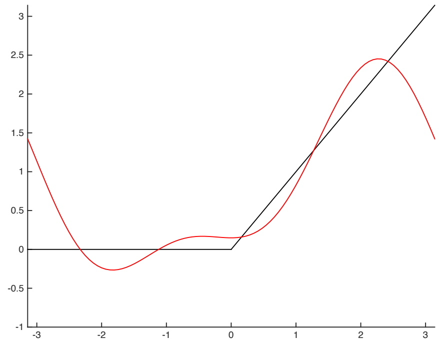


Figura 4.4: S_2 y $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

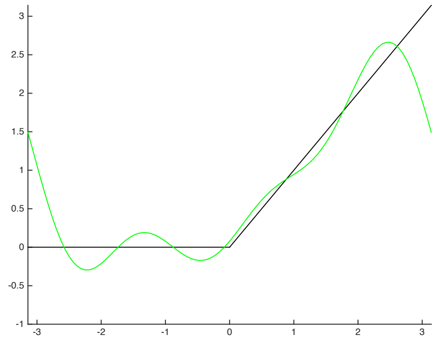


Figura 4.5: S_3 y $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

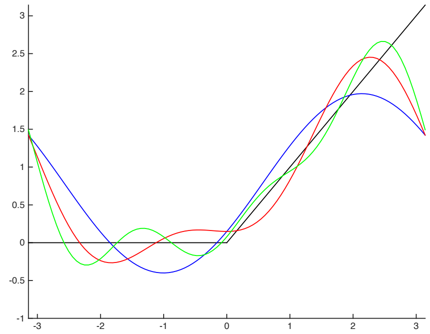


Figura 4.6: S_1, S_2, S_3 y $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

x_i, $i = 1...n$, donde los límites laterales para la función existen y son finitos. El ejemplo anterior es de este tipo. En este caso, la serie de Fourier también converge. En los puntos x en que la función es continua, la serie coincide con $f(x)$ y en los puntos de discontinuidad, la serie toma como valor la media del límite por la derecha y del límite por la izquierda de la función en esos puntos.

Supongamos que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es periódica de periodo $T > 0$ y continua a trozos. Entonces, la serie de Fourier asociada converge en cada $x \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{\lim\limits_{y \to x^+} f(y) + \lim\limits_{y \to x^-} f(y)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)$$

En particular, en los puntos donde la función es continua se tiene que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right).$$

4.2.2 Variantes en la expresión de las series de Fourier

En algunos campos de la ciencia, por cuestiones de interpretación, interesa escribir las series de Fourier con una expresión distinta a la que hemos presentado aquí. Algunas opciones son las siguientes:

- Como hemos mencionado, los coeficientes de Fourier también se pueden definir en el intervalo $[0, T]$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- El término general de la serie de Fourier se puede escribir como un coseno. En efecto, si consideramos el número complejo $z_n = a_n - ib_n$ y denotamos F_n a su módulo y α_n a su argumento,

$$F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \alpha_n = \mathrm{arc\,tg}(-b_n/a_n),$$

utilizando propiedades de las razones trigonométricas y denotando $F_0 = a_0/2$, se obtiene la siguiente expresión para la serie de Fourier:

$$F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x + \alpha_n\right).$$

- Podemos encontrar la serie de Fourier escrita utilizando la exponencial compleja $e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ del modo siguiente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \qquad \text{donde } c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}\,dx.$$

Los coeficientes c_n se conocen como **coeficientes de Fourier**.

- En teoría de la comunicación se suele escribir $w = 2\pi/T$. Esta variable representa la **frecuencia** y mide el número de repeticiones por unidad de tiempo de un suceso periódico. Entonces la serie de Fourier es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n\,\mathrm{sen}(n\omega x) \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$

4.2.3 Funciones definidas en un intervalo

Supongamos ahora que f no es periódica pero está definida en un intervalo acotado $[0, L]$ y es continua a trozos. Podemos definir una nueva función periódica que coincida con f en $[0, L]$ y obtener la serie de Fourier correspondiente. Esta nueva función puede definirse de forma par, en cuyo caso obtendremos una serie en cosenos, o de forma impar y obtendremos una serie en senos.

Serie de Fourier en senos o en cosenos

Sea $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[0, L]$. Entonces, la serie de Fourier en cosenos es convergente en el intervalo $[0, L]$ y

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \qquad \forall x \in [0, L]$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Asimismo, si f es continua en $[0, L]$ y $f(0) = f(L) = 0$, entonces la serie de Fourier en senos es convergente y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \qquad \forall x \in [0, L]$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 4.6
Obtener la serie de Fourier en cosenos para la función $f(t) = t$ definida en el intervalo $[0, L]$.

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L t\,dt = \frac{2}{L}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^L = L.$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L t\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\cos u\,du = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[u\,\mathrm{sen}\,u + \cos u\right]_0^{n\pi} = \begin{cases} -\dfrac{4L}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia, la serie de Fourier en cosenos asociada a la función dada es

$$t = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi t}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi t}{L} + \ldots\right).$$

4.2.4 Una aplicación de la series de Fourier

Las series de Fourier se utilizan, por ejemplo, para determinar una función denominada **densidad electrónica**, la cual informa sobre la estructura de una molécula cristalina (la posición de sus moléculas) observando la difracción producida por el choque de ondas de rayos x sobre sus átomos, véase la Figura 4.7. La densidad electrónica es la función periódica suma resultante de las contribuciones de los distintos átomos. En la Figura 4.8 se muestra el caso de solo dos átomos. En la práctica, esta función es la suma de una enorme cantidad de funciones sinuosidales (senos y cosenos) de manera que puede ser considerada como una serie de Fourier.

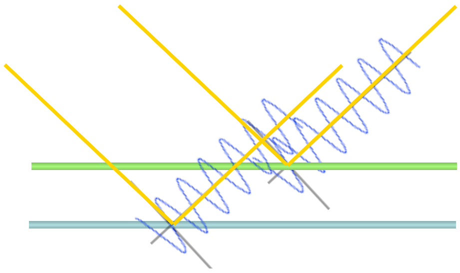
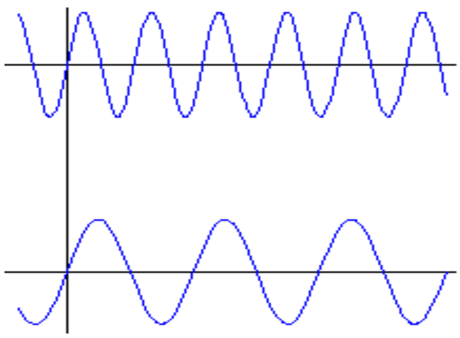


Figura 4.7: Reflexión de los rayos X sobre los átomos



$\Longrightarrow$

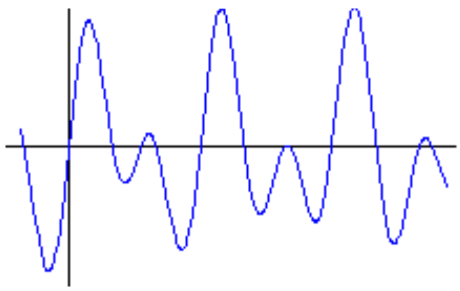


Figura 4.8: Contribución de dos átomos

Figura 4.9: Función periódica resultante

4.3 La transformada de Fourier

La transformada de Fourier se usa para transformar funciones que están definidas sobre una determinada variable, x, en funciones definidas sobre otra variable, α. Lo habitual es que la función resultante sea más fácil de manejar. Después de tratarla, se puede volver al dominio original en x, usando la transformada de Fourier inversa. Generalmente, x es una variable física (espacial o temporal) y α es otra variable que se puede interpretar como una frecuencia.

En este apartado consideramos funciones $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continuas a trozos tal que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ sea finita.

La transformada de Fourier de f se define como

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y}\, dy.$$

Obsérvese que la variable independiente para la función original es x, mientras que para la transformada de Fourier es α. Por ejemplo, si interpretamos x como una variable espacial y f denota una magnitud física, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ la cantidad $\hat{f}(\alpha)$ indica cuánta parte de f está sometida a fluctuaciones con frecuencia α.

Las definiciones de los coeficientes c_n que vimos en las series de Fourier, se pueden mirar como una versión discreta de la definición de $\hat{f}$ (allí, en vez de valores asociados a cada $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos valores asociados a los $n = 0, 1, 2, ...$).

Algunos autores definen la transformada de Fourier sin que aparezca el coeficiente $1/\sqrt{2\pi}$ o con $1/2\pi$ en su lugar. También podemos encontrar $e^{-i2\pi\alpha y}$ en vez de $e^{-i\alpha y}$.

Recordemos que $e^{-i\alpha y} = \cos(-\alpha y) + i \operatorname{sen}(-\alpha y) = \cos(\alpha y) - i \operatorname{sen}(\alpha y)$.

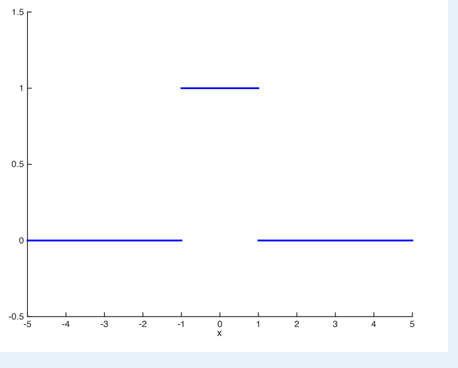
Ejemplo 4.7

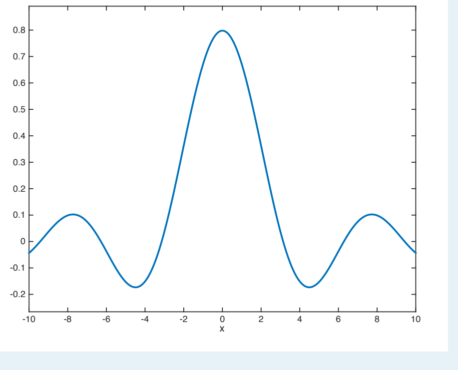
Obtener la transformada de Fourier de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textbf{en otro caso.} \end{cases}$

Obsérvese que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 < +\infty.$

La transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\alpha y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-i\alpha y}}{i\alpha} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}.$$





En la figura de la izquierda podemos ver la función y en la de la derecha su transformada.

Si f es par o impar se pueden obtener expresiones simplificadas de su transformada

Si f es **par**, entonces

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \cos(\alpha y)\, dy.$$

Si f es **impar**, entonces

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \operatorname{sen}(\alpha y)\, dy.$$

Ejemplo 4.8
Obtener la transformada de Fourier de la función definida en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \textbf{si } x \in [-1/2, 0) \\ -2x+1 & \textbf{si } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \textbf{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-1/2}^{0} (2x+1)\, dx + \int_{0}^{1/2} (-2x+1)\, dx = 1/2 < +\infty.$
Como $f(-x) = f(x)$, podemos calcular la transformada de Fourier como

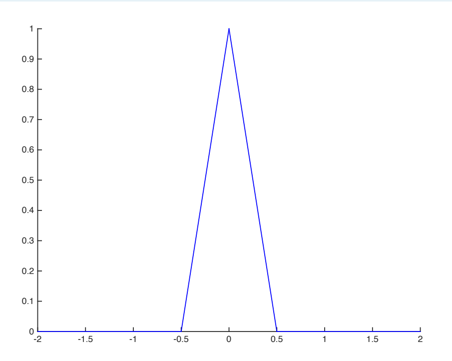
$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \cos(\alpha y)\, dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2} (-2y+1) \cos(\alpha y)\, dy.$$

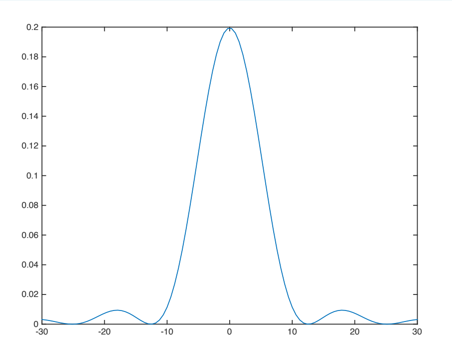
Integrando por partes,

$$\int (-2y+1) \cos(\alpha y)\, dy = (-2y+1) \frac{\operatorname{sen}(\alpha y)}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \int \operatorname{sen}(\alpha y)\, dy = (-2y+1) \frac{\operatorname{sen}(\alpha y)}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} \cos(\alpha y).$$

Por tanto,

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(-2y+1) \frac{\operatorname{sen}(\alpha y)}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} \cos(\alpha y) \right]_0^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\alpha^2} (1 - \cos\frac{\alpha}{2}).$$





En la figura de la izquierda podemos ver la función y en la de la derecha su transformada.

La transformada de Fourier Inversa de $\hat{f}$ se define como

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha.$$

La transformada inversa “deshace” lo que “hace” la transformada de Fourier y pasa de funciones definidas en el espacio de α a funciones definidas en el espacio de x.

La fórmula precedente indica que $f(x)$ es la suma (o integral) de infinitas contribuciones, correspondientes a las distintas frecuencias de $\alpha \in \mathbb{R}$.

La transformada de Fourier es lineal, es decir, si a y b son constantes y f y g son funciones, se cumple que

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

4.3.1 Transformada de Fourier de funciones generalizadas

Para describir algunos fenómenos físicos necesitamos conceptos que se salen del marco establecido. En este apartado vamos a trabajar de un modo informal, realizando algunos cálculos sin justificar. Comenzamos por introducir un ejemplo de función generalizada o distribución, llamada **Delta de Dirac**, denotada $\delta(x)$. Aunque $\delta(x)$ no es una función en el sentido clásico, puede ser aproximada por una sucesión de funciones ordinarias como

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

algunas de las cuales se han representado en la Figura 4.10. Se supone entonces que $\delta(x)$ es el límite (en un sentido adecuado) de las $\delta_n(x)$:

$$\delta(x) = \lim_{n \to +\infty} \delta_n(x).$$

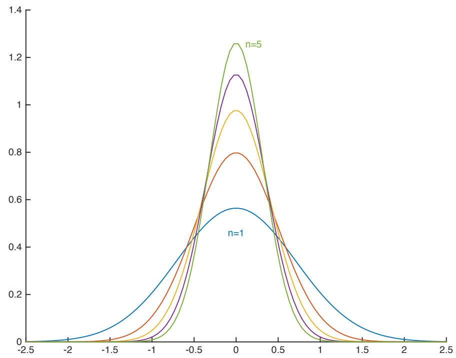


Figura 4.10: Representación de las funciones $\delta_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

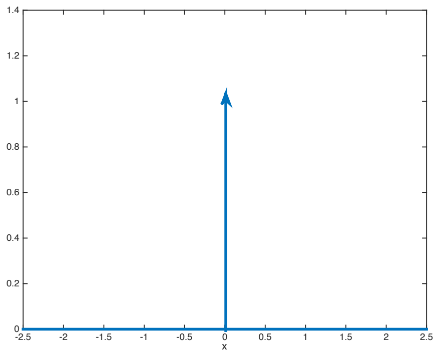


Figura 4.11: Representación figurada de la Delta de Dirac centrada en el origen: $\delta(x)$

Delta de Dirac
Se suele decir que esta función generalizada, también llamada impulso, se caracteriza por las siguientes propiedades:

- $\delta(x) \geq 0$ para todo x.
- $\delta(x) = 0$ para todo $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$

Estas propiedades se pueden justificar teniendo en cuenta que

- $\delta_n(x) \geq 0$ para todo x y todo n.
- $\delta_n(x) \to 0$ cuando $n \to +\infty$ para todo $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\, dx = 1$ para todo n.

De modo análogo, podemos definir la **Delta de Dirac trasladada a** $x = a$:

$$\delta_a(x) = \delta(x-a).$$

De nuevo, $\delta_a(x)$ es siempre positiva, verifica $\delta(x-a) = 0$ para todo $x \neq a$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,dx = 1$.

Propiedades de la Delta de Dirac: Se suelen aceptar las siguientes propiedades:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)\,dx = f(a)$.
- $\mathcal{F}(\delta)(\alpha) = \hat{\delta}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}\,dy = 2\pi\delta(x)$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-a)y}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)y}\,dy = 2\pi\delta(x-a)$.

Veamos cómo justificar, de modo informal, algunas de las propiedades anteriores. Una comprobación más detallada puede verse en la correspondiente hoja de problemas.

- La primera, puede entenderse usando la definición de la delta de Dirac
- $\mathcal{F}(\delta)(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)e^{(-\alpha yi)}\,dy = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\,dy = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
- En tercer lugar, vamos a comprobar únicamente que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}\,dy = 2\pi\delta(x)$.

  Tomando transformada inversa en la igualdad $\hat{\delta}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ del apartado anterior,

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{\delta})(x) = \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x}\,d\alpha.$$

  Por tanto, $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\,d\alpha$.

En este nuevo contexto, el de las distribuciones, podemos obtener la transformada de Fourier de funciones que no cumplen la condición $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.

Ejemplo 4.9
Obtener la transformada de Fourier de la función constante $f(x) = 1$

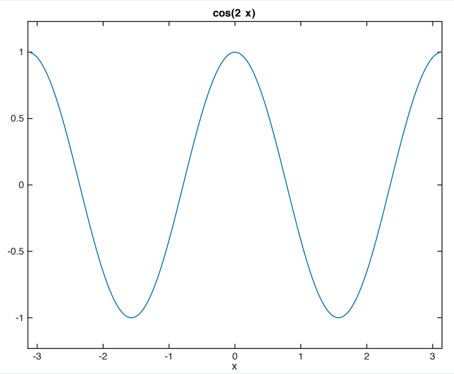
$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{-i\alpha y}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi\delta(\alpha) = \sqrt{2\pi}\,\delta(\alpha).$$

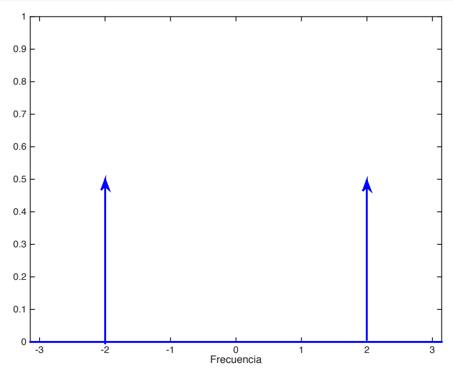
Ejemplo 4.10
Obtener la transformada de Fourier de $f(x) = \cos(ax)$ siendo a una constante positiva.

Para obtener la transformada de Fourier utilizamos la igualdad $\cos(ax) = \dfrac{e^{axi} + e^{-axi}}{2}$ y la cuarta de las propiedades anteriores.

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ayi} + e^{-ayi}}{2} e^{-\alpha yi}\, dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha - a)yi}\, dy$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha + a)yi}\, dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[2\pi\delta(\alpha - a) + 2\pi\delta(\alpha + a)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\delta(\alpha - a) + \delta(\alpha + a)\right]$$





En la figura de la izquierda podemos ver la representación de $y = \cos(2x)$ y en la de la derecha, la representación figurada de su transformada de Fourier que corresponde a dos Deltas de Dirac centradas en $x = -2$ y en $x = 2$, respectivamente.

Análogamente puede probarse que si $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$ entonces $\hat{f}(\alpha) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[-\delta(\alpha - a) + \delta(\alpha + a)\right]$

4.3.2 Transformada de Fourier generalizada de una función periódica

Consideremos una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo $T > 0$. Entonces, la podemos desarrollar en serie de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \tag{4.1}$$

con $\omega = 2\pi/T$. En este caso hemos usado la expresión compleja en términos de la frecuencia. Su transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega x} e^{-i\alpha y}\, dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha - n\omega)y}\, dy = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\alpha - n\omega).$$

La suma de deltas de Dirac obtenidas ocurren en los valores que hacen $\alpha - n\omega = 0$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ es decir, en $\alpha = \ldots, -2\omega, -\omega, 0, \omega, 2\omega, \ldots$ y se llama tren de impulsos o espectro correspondiente a $y = f(x)$.

Obsérvese que la función $y = f(x)$ se representa en el espacio de las x (x suele representar espacio o tiempo) mientras que el tren de impulsos se representa en el espacio de las frecuencias. En la Figura 4.12 se representa un ejemplo de tren de impulsos.

Podemos interpretar que f es una función periódica caracterizada por los coeficientes de Fourier, c_n. La igualdad (4.1) muestra que c_n indica cuánto de $e^{-in\omega x}$ hay en $f(x)$. Análogamente, la igualdad

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\alpha - n\omega)$$

muestra que los valores 'importantes" de $\hat{f}$ son aquellos en que α toma los valores $n\omega$.

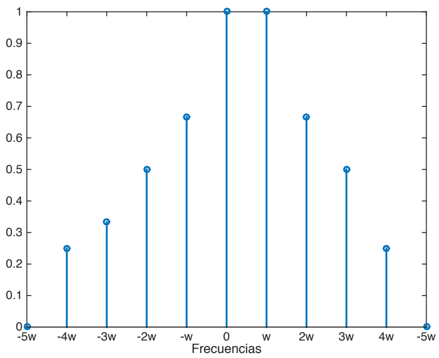


Figura 4.12: Tren de impulsos o espectro

4.3.3 Una aplicación de la transformada de Fourier

Una señal luminosa, acústica o electromagnética puede ser descrita por una función $y = f(t)$ periódica. A veces interesa hacer un tratamiento a estas señales, por ejemplo, filtrar graves o agudos en un sonido o eliminar manchas en una imagen proyectada. La manipulación directa sobre la señal no siempre es posible a causa de su complejidad. Lo que se hace entonces es descomponer la señal compleja obtenida en el dominio del tiempo en señales simples y obtener a continuación el tren de impulsos correspondiente en el espacio de frecuencias como se ha hecho en el apartado anterior. La representación de la frecuencia conlleva una reducción de datos con respecto a la representación del tiempo, aunque la información sea la misma en ambos dominios, en el dominio de frecuencia es más compacta. Utilizando la transformada inversa de Fourier es posible volver nuevamente al dominio del tiempo.

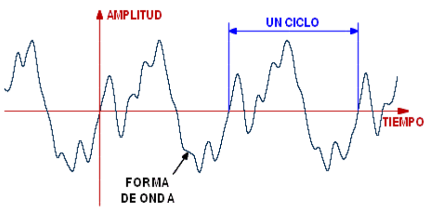


Figura 4.13: Señal que representa un sonido

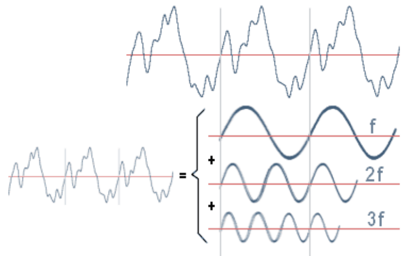


Figura 4.14: Señales simples obtenidas

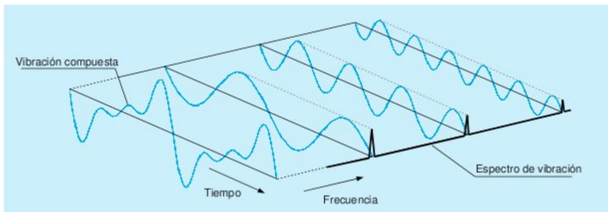


Figura 4.15: Descomposición de $f(x)$ en señales simples y tren de impulsos correspondiente

Un ejemplo de señal compleja aparece en la Figura 4.13. En la Figura 4.14[1] puede verse su descomposición en señales simples, para ello se utilizaría la serie de Fourier. En ambas se ha representado el tiempo como variable independiente. En la Figura 4.15[2] puede verse una señal que representa una vibración, su descomposición en vibraciones simples y el espectro correspondiente, en negro. Para obtener este último se aplica la transformada de Fourier.

[1] http://www.yio.com.ar/curso-sonido.php
[2] http://www.sinais.es/Recursos/Curso-vibraciones/fundamentos/fundamentos_vibraciones.html

Tema 5

Funciones de varias variables

Versión: 18 de octubre de 2019

En este tema introducimos algunos elementos básicos del cálculo diferencial en varias variables. Muchos procesos (físicos, biológicos, ...) dependen de varias variables. Muy frecuentemente, estas son la posición espacial y el tiempo, pero también pueden ser otras. Por ejemplo, la temperatura de un ser vivo puede variar en tiempo (según las horas del día), pero también en espacio (el punto del cuerpo que se considere). También en la concentración de nutrientes en el interior y en torno a una célula, la concentración de una determinada droga en el cuerpo, la velocidad y la presión del viento en el aire, o la intensidad de un campo eléctrico o magnético generado por una corriente eléctrica, entre otros muchos ejemplos.

Al igual que ocurre con las funciones de una variable, las derivadas de una función de varias variables permiten obtener información valiosa sobre ésta: Permiten conocer y estimar cómo varía y permiten obtener aproximaciones mediante polinomios, por ejemplo. Aprender a obtener este tipo de información van a ser el objetivo básico de este capítulo.

5.1 Dominio y recorrido de una función de varias variables

Recordamos la notación que usamos para funciones de una variable. Sea, por ejemplo,

$$f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{definida por} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

Dominio es el conjunto de números x para los cuales la función está bien definida, es decir, se puede calcular.

Recorrido es el conjunto de todos los valores $y = f(x)$ que se obtienen al evaluar f para todos los puntos x de su dominio.

En el caso del ejemplo, el dominio de f es $[0, 4]$ y el recorrido es el intervalo $[0, 2]$.

Consideramos ahora funciones de dos variables, definidas para pares de números reales (x, y), con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Se denomina también a estos pares **puntos** y se suele escribir

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

para indicar que ambas componentes pertenecen a $\mathbb{R}$. Se identifican con los puntos del plano. A cada par (x, y) la función asocia un número real $z = f(x, y)$.

Igual que para funciones de una variable, el dominio de una función

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

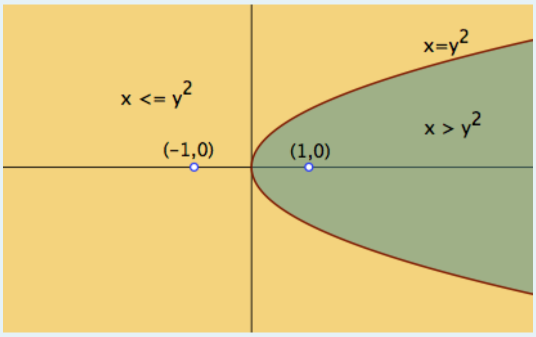
es el subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ sobre el que consideramos la función o sobre el que está bien definida, y el recorrido es el conjunto de valores z que se obtienen al evaluar f en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo 5.1
Determinar el dominio de la función $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x}$.

El dominio de esta función es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales se puede calcular $\sqrt{y^2 - x}$. Para ello tiene que ocurrir

$$y^2 - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 \geq x$$

Trataremos de identificar la región del plano OXY en la cual se verifica $x \leq y^2$. Está claro la región en la que $x \leq y^2$ está separada de la región en la que $x > y^2$ por la curva $x = y^2$. Esta curva divide el plano OXY en dos partes.
Para saber en cuál de ellas se verifica $x \leq y^2$ se puede evaluar la función en algún punto de cada región.
Por ejemplo, en el punto $(-1, 0)$ se tiene $x = -1 < y^2 = 0$ mientras que en el punto $(1, 0)$ se tiene $x = 1 > y^2 = 0$
El dominio de $f(x, y)$ es, por lo tanto, la parte "exterior" a la parábola:

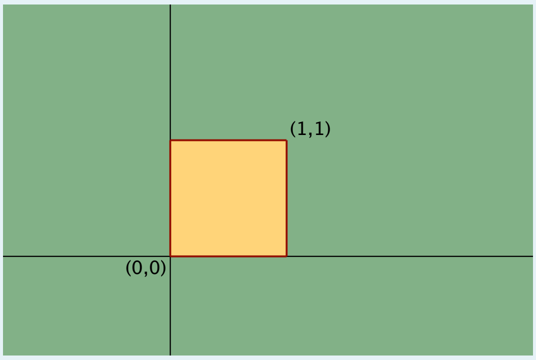


$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \leq y^2\}$$

El recorrido de f es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que cero.

Ejemplo 5.2
Determinar el dominio de la función $f(x, y) = [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$.

La notación $[0, 1] \times [0, 1]$ indica que la primera componente del par (x, y), es decir, x, varía en el primero de los intervalos, $[0, 1]$ y lo mismo la segunda, (ya que en este caso ambos intervalos son iguales).
Es decir, que f está definida en el cuadrado de la figura, que incluye sus fronteras
¿Qué conjunto de valores toma f?
Está claro que el valor mínimo lo toma en el punto $(x, y) = (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, y que el valor máximo lo toma cuando $(x, y) = (1, 1)$, $f(1, 1) = 2$.
Luego el recorrido de f es el intervalo $[0, 2]$.



5.2 Representación gráfica de una función de dos variables

En el caso de las funciones de una variable, el dibujo de su gráfica resulta de enorme ayuda para comprender el comportamiento de una función.
Veamos ahora de qué forma se puede representar gráficamente una función real de dos variables reales.

5.2.1 Representación como una superficie en el espacio tridimensional

Una forma de hacerlo es poner

$$z = f(x, y)$$

e interpretar que, a cada punto (x, y) del plano OXY la función f le hace corresponder una "altura" dada por $z = f(x, y)$. La representación, en el espacio tridimensional, de los puntos

$$\big\{(x, y, z) \;:\; (x, y) \in D,\; z = f(x, y)\big\}$$

constituye *una superficie*.

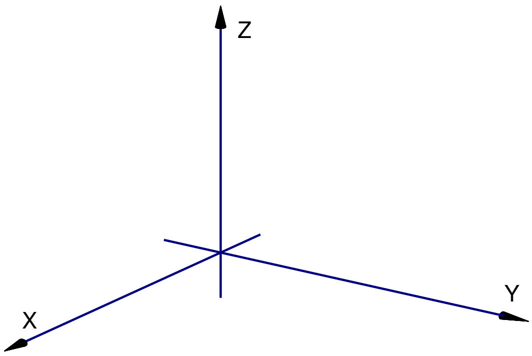


Figura 5.1: Los ejes de coordenadas en el espacio 3D. En la parte de abajo los ejes OX y OY, con la orientación relativa habitual.

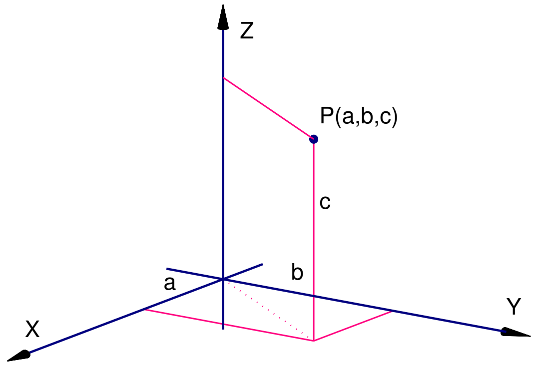
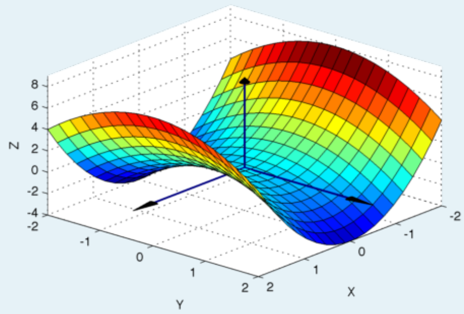


Figura 5.2: Un punto en el espacio 3D viene definido por tres coordenadas.

Ejemplo 5.3

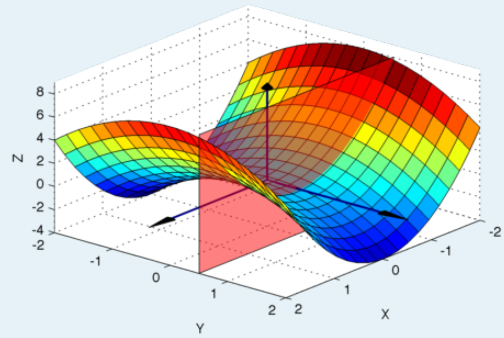
Se considera la función $f(x,y) = 2x^2 - y^2$.
El dominio de esta función es todo el plano $\mathbb{R}^2$. La gráfica adjunta está realizada para $(x,y) \in [-2,2] \times [-2,2]$ (obsérvese la graduacion de los ejes). También se observa que, para estos valores de (x,y), la función toma valores entre -4 y 8 (véase la graduación del eje OZ (eje vertical).



Si se mantiene constante una de las variables, por ejemplo la variable $y = 0.5$, entonces, sobre esta línea recta $y = 0.5$ la función depende sólo de la variable x:

$$f(x,0.5) = 2x^2 - (0.5)^2 = 2x^2 - 0.25$$

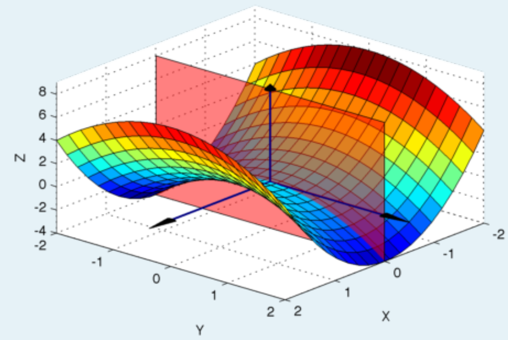
que es la expresión de una parábola convexa, como se puede confirmar en la gráfica adjunta, observando que el corte de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $y = 0.5$ es una parábola «hacia arriba».



Si, en cambio, se mantiene constante la variable x, por ejemplo $x = 0$, entonces sobre esta recta $x = 0$ la función depende sólo de la variable y:

$$f(0,y) = 0 - y^2 = -y^2$$

y su gráfica es una parábola invertida, como puede observarse en la gráfica adjunta.



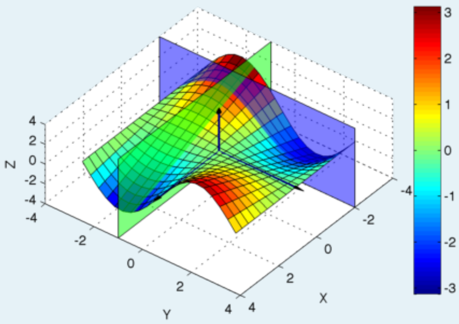
Ejemplo 5.4

Superficie $z = f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.
Cuando la gráfica se puede representar en un medio que admita color, es frecuente acompañarla de una «barra de color» que ayuda a identificar los valores de la función.
Como se puede corroborar con el dibujo adjunto, cuando se mantiene la x constante, por ejemplo $x = 2$, la función se reduce a

$$f(2, y) = 2 \operatorname{sen} y$$

mientras que si se mantiene constante la y, por ejemplo $y = -2$, la función se reduce a una recta

$$f(x, -2) = x \operatorname{sen}(-2) = \text{constante} \times x$$



5.2.2 Representación mediante curvas de nivel

Otra forma habitual de visualizar funciones es representar sus curvas de nivel: curvas que unen los puntos del dominio en los que la función toma el mismo valor.
Es decir, para

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

la **curva de nivel de valor** k es la que forman los puntos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x, y) = k\}$$

Estas curvas se dibujan en el plano OXY. También se llaman **curvas de isovalores**.

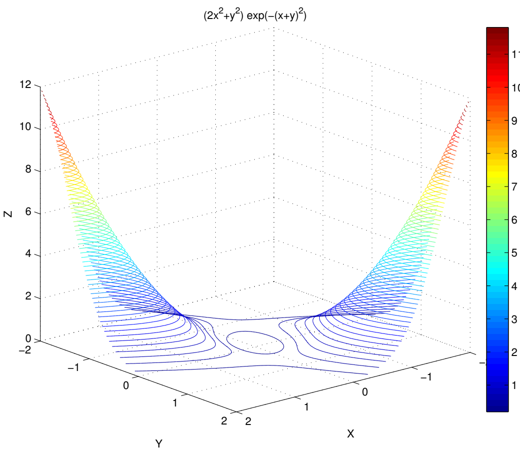


Figura 5.3: En esta figura están dibujadas, sobre la superficie de ecuación $z = (2x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)^2}$, sus curvas de igual.

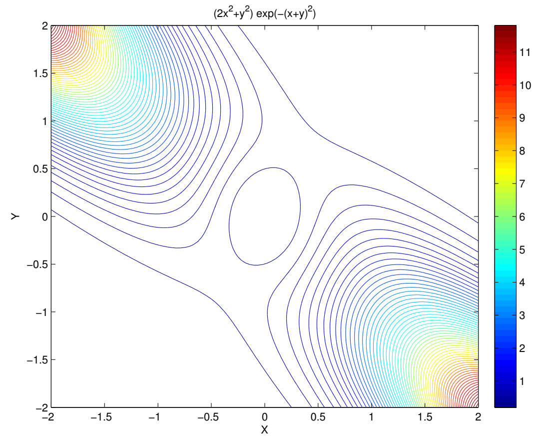


Figura 5.4: Cuando las curvas de la Figura anterior se proyectan sobre el plano OXY se obtienen las curvas de nivel. Si el dibujo es en color, con frecuencia se acompaña de una «barra de color» para identificar los distintos valores.

Con frecuencia se dibujan las curvas de nivel correspondientes a un conjunto de valores regularmente espaciados, como en el caso de la Figura 5.4. En este caso, la separación entre las curvas da una idea de la variación de la función: cuanto más próximas estén las curvas de nivel, más rápidamente crece o decrece la función en esa zona.

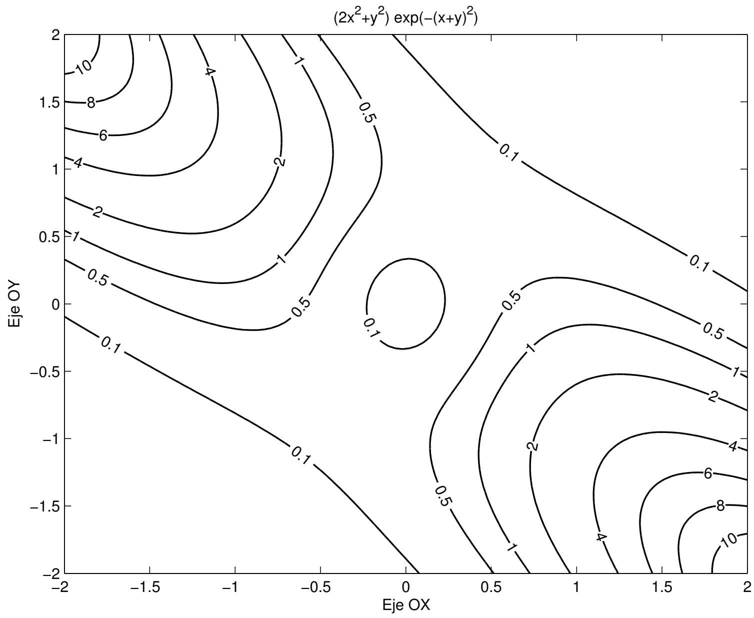


Figura 5.5: Algunas curvas de nivel de la función $z = (2x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)^2}$. Las curvas están marcadas con los valores a los que corresponden. Obsérvese que, en este caso, no todos los valores elegidos están regularmente espaciados: 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10.

Cuando se dibuja sin utilizar color, se suelen marcar las curvas de nivel con los valores correspondientes, como se hace en la Figura 5.5.

Este tipo de gráficas son habituales, por ejemplo, en meteorología y en topografía.

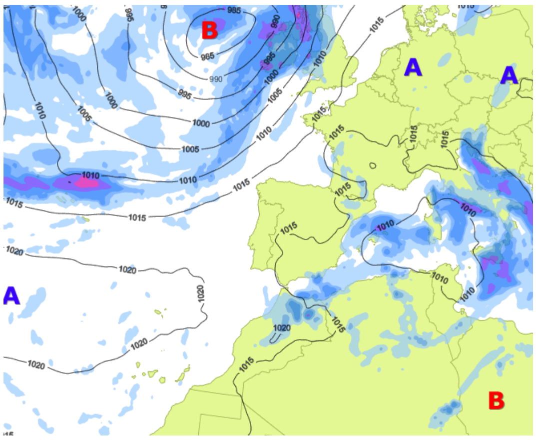


Figura 5.6: En los mapas meteorológicos con frecuencia se dibujan las **isobaras**, curvas de nivel de la presión atmosférica.

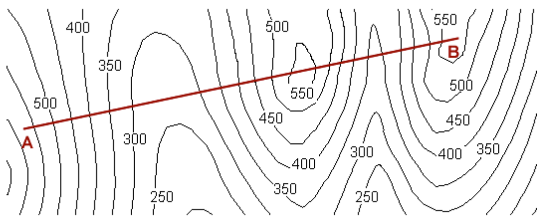
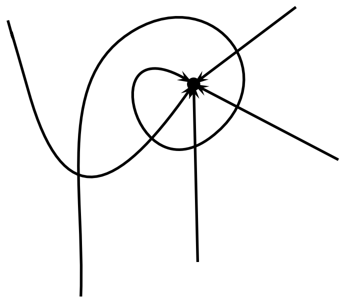


Figura 5.7: Mapa topográfico: se representa la altitud (sobre el nivel del mar) en cada punto. Con ayuda de este mapa se podría representar el «perfil» de una ruta, por ejemplo, entre los puntos A y B.

5.3 Límites y continuidad de funciones de dos variables

El concepto de límite se puede generalizar a funciones de dos o más variables. Informalmente, se dice que el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) es L si $f(x, y)$ toma valores tan próximos a L como se quiera sin más que acercarse lo suficiente a (x_0, y_0) (sin llegar hasta él).

El cálculo de límites en dimensión 2 es, lógicamente, más complicado que en el caso unidimensional. Sin embargo, en algunos casos sencillos, cuando los límites existen, se pueden calcular de manera sencilla.



En el caso unidimensional sólo es posible acercarse a un punto de dos formas: por la izquierda o por la derecha. Sin embargo, en el caso bidimensional hay infinitas maneras de acercarse a un punto: «caminando» sobre cualquier curva que pase por dicho punto.

Llamamos a dichos «caminos» **trayectorias**. Cuando nos acercamos al punto (x_0, y_0) «caminando» sobre una trayectoria, el límite se convierte en realidad en un límite unidimensional.

Ejemplo 5.5
Calcular el límite $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{xy+y^3}$ **sobre la trayectoria** $y = 5x$**.**

Sobre la trayectoria $y = 5x$ las variables x e y no son independientes una de la otra, sino que, para cada x la y viene dada por $y = 5x$. Al sustituir en la expresión del límite encontraremos un límite en una sóla variable:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=5x}} \frac{4xy}{xy+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\cdot 5x}{x\cdot 5x + (5x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{20x^2}{5x^2+125x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{20x^2}{x^2(5+125x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{20}{5+125x} = \frac{20}{5} = 4$$

Para que el límite de una función en un punto exista es necesario que exista el límite sobre todas las trayectorias posibles y que todos coincidan.

Desde luego, para demostrar que un límite existe no se pueden utilizar las trayectorias, ya que no podemos comprobar todas (son infinitas). El límite por trayectorias es útil para probar que un límite **no** existe: basta encontrar una trayectoria sobre la cual no exista el límite o bien encontrar dos trayectorias con dos límites diferentes. En ambos casos la conclusión es que no existe el límite de la función en el punto.

Ejemplo 5.6
Calcular $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{xy+y^3}$ **sobre la trayectoria** $y = \sqrt{x}$**.**

Para calcular el límite sobre la trayectoria $y = \sqrt{x}$, sustituímos y por $\sqrt{x}$, encontrando así un límite en una sóla variable:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\sqrt{x}}} \frac{4xy}{xy+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\cdot\sqrt{x}}{x\cdot\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4}{1+1} = 2$$

Como consecuencia de esto y del resultado del Ejemplo 5.5, se tiene que no existe el límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ de la función $\dfrac{4xy}{xy+y^3}$.

El concepto de continuidad es también análogo al caso unidemensional:

Definición 5.7 (Continuidad de una función de dos variables)
Una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $(x_0, y_0) \in D$ si:

a) *f está definida en (x_0, y_0),*

b) *Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$*

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

5.4 Derivadas parciales de funciones de dos variables

Supongamos que queremos estudiar la asimilación de CO_2 de una cierta planta y, más concretamente, la respuesta a los cambios de temperatura y de luminosidad. ¿Cómo se haría esto experimentalmente?

Denotemos T a la temperatura, L a la lumnosidad y A a la cantidad de CO_2 asimilada, de forma que se tiene

$$A = A(T, L)$$

Lo más natural sería estudiar las variaciones de A en función de la temperatura T, manteniendo constante la intensidad de la luz y haciendo esto para distintas intensidades. Luego, habría que estudiar las variaciones de A en función de la luminosidad manteniendo constante la temperatura.

Esto ilustra la idea en que se basan las derivadas parciales de una función. Para saber cómo varía una función $f(x, y)$ cuando cambian x e y, en vez de hacer variar las dos variables a la vez, se hacen variar sólo una de ellas, manteniendo la otra constante

Definición 5.8 (Derivada parcial)
Sea f una función de dos variables independientes x e y.
Se define la ***derivada parcial de f con respecto a x****:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Análogamente, se define la ***derivada parcial de f con respecto a y****:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Para indicar que se trata de una derivada parcial en lugar de una derivada ordinaria (la de funciones de una variable) se utiliza el símbolo ∂ en lugar de la d habitual. También son usuales las notaciones siguientes, que tienen el mismo significado:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \partial_x f(x,y) \equiv f_x(x,y)$$

(y análogamente para la derivada parcial con respecto de y).

El cálculo de derivadas parciales no presenta ninguna dificultad adicional: para obtener la derivada parcial de f con respecto de x (por ejemplo) sólo hay que derivar de la forma habitual la expresión de $f(x, y)$ considerando la x como variable independiente y tratando la y como si fuera una constante. Recíprocamente, para obtener la derivada parcial de f con respecto de y hay que derivar de la forma habitual la expresión de $f(x, y)$ considerando la y como variable independiente y tratando la x como si fuera una constante.

Ejemplo 5.9
Calcular las derivadas parciales de la función $f(x,y) = y\,e^{xy}$.
Consideramos y como si fuera una constante y derivamos la función con respecto de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\,e^{xy}\Big) = y\,e^{xy}\,y = y^2\,e^{xy}$$

Ahora, para calcular la derivada parcial con respecto de y, consideramos x como si fuera una constante y derivamos la función con respecto de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\,e^{xy}\Big) = e^{xy} + y\,x\,e^{xy} = (1+xy)\,e^{xy}$$

Ejemplo 5.10
Calcular las derivadas parciales de la función $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{\cos(y)}$.
Consideramos y como si fuera una constante y derivamos la función con respecto de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\operatorname{sen}(xy)}{\cos(y)} = \frac{y\cos(xy)\cdot\cos(y) - \operatorname{sen}(xy)\cdot 0}{\cos^2 y} = \frac{y\cos(xy)}{\cos y}$$

Ahora calculamos la derivada parcial con respecto de y, considerando x como si fuera una constante y derivando la función con respecto de y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\operatorname{sen}(xy)}{\cos(y)} = \frac{\cos(xy)\cdot x\cdot\cos(y) - \operatorname{sen}(xy)\cdot(-\operatorname{sen}(y))}{\cos^2(y)} \\ &= \frac{x\cos(y)\cos(xy) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(xy)}{\cos^2(y)}\end{aligned}$$

Las derivadas parciales representan, como en el caso unidimensional, pendientes de rectas tangentes a ciertas curvas.
Por ejemplo, consideremos la función $f(x,y) = 2x^2 - y^2$, representada en la Figura **??**, y sus derivadas parciales en el punto $(x,y) = (0,1/2)$. Si en $z = f(x,y)$ mantenemos constante $y = 1/2$ obtenemos una curva: la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano vertical $y = 1/2$ (plano vertical paralelo al plano OXZ). La ecuación de dicha curva es $z = 2x^2 - 1/4$. El valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x$ en el punto $(x,y) = (0,1/2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1/2) = 0$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $x = 0$.
De forma análoga, si en $z = f(x,y)$ mantenemos constante $x = 0$ obtenemos la curva intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano vertical $x = 0$ (plano vertical paralelo al plano OYZ), de ecuación $z = -y^2$. La pendiente de la tangente a esta curva en el punto $y = 1/2$ es el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$ en el punto $(x,y) = (0,1/2)$, es decir, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1/2) = -1$.

5.5 Derivadas parciales de orden superior

Como en el caso de las funciones de una variable, es posible definir derivadas de orden superior. Por ejemplo, la derivada parcial con respecto de x de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ se escribe:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)$$

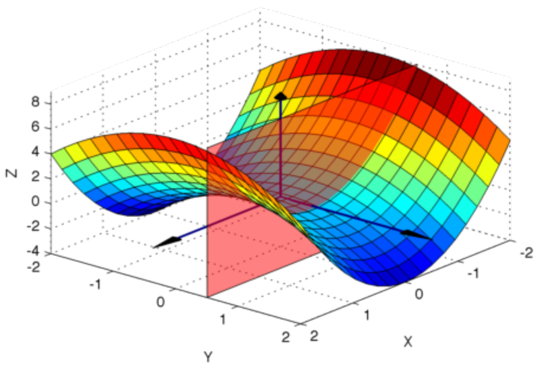


Figura 5.8: Intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $y = 1/2$.

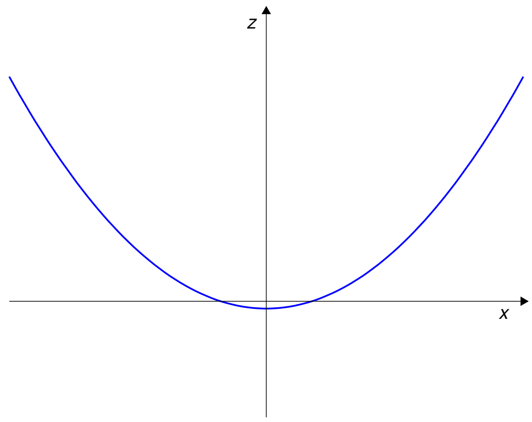


Figura 5.9: Curva $z = 2x^2 - 1/4$, intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $y = 1/2$.

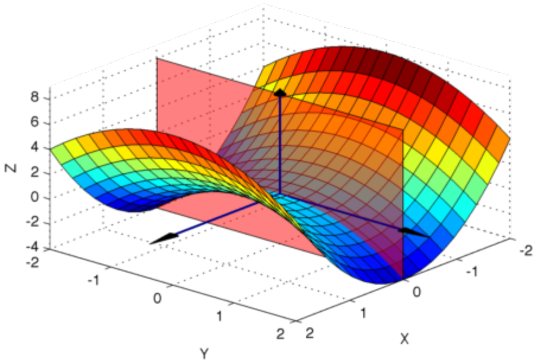


Figura 5.10: Intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $x = 0$.

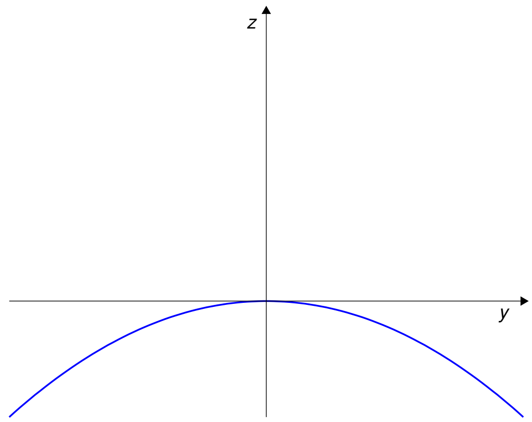


Figura 5.11: Curva $z = -y^2$, intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $x = 0$.

(También se puede escribir f_{xx}). Análogamente,

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big),$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big).$$

Obsérvese en esta última derivada que el subíndice xy en f_{xy} significa que se deriva en primer lugar respecto de x y en segundo lugar respecto de y. Esto implica que, en principio, f_{xy} no es lo mismo que f_{yx}

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Sin embargo, en las condiciones adecuadas sí se puede garantizar que el orden de derivación es irrelevante:

Teorema 5.11 (Igualdad de las derivadas cruzadas)
Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0), entonces las derivadas cruzadas en dicho punto son iguales:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Se pueden definir de forma similar derivadas de orden superior a 2, por ejemplo

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_{yy})$$

Como en el caso de las derivadas de orden 2, el orden de derivación no importa si la función y sus derivadas hasta el orden utilizado existen y son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0).

Ejemplo 5.12
Calcular la derivada $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ para la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(3xy)$ y comprobar la igualdad de todas las derivadas cruzadas del mismo orden.

- $f_x = 3y\cos(3xy)$
- $f_y = 3x\cos(3xy)$
- $f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(3y\cos(3xy)\Big) = 3\cos(3xy) + 3y\cdot\big(-3x\operatorname{sen}(3xy)\big) = 3\cos(3xy) - 9xy\operatorname{sen}(3xy) = f_{yx}$
- $f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(3x\cos(3xy)\Big) = 3x\cdot\big(-3x\operatorname{sen}(3xy)\big) = -9x^2\operatorname{sen}(3xy)$
- $f_{xyy} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}(f_{xy}) = \dfrac{\partial}{\partial y}\big(3\cos(3xy) - 9xy\operatorname{sen}(3xy)\big) = -18x\operatorname{sen}(3xy) - 27x^2y\cos(3xy)$
- $f_{yxy} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(f_{yx}) = \dfrac{\partial}{\partial y}\big(3\cos(3xy) - 9xy\operatorname{sen}(3xy)\big) = -18x\operatorname{sen}(3xy) - 27x^2y\cos(3xy)$
- $f_{yyx} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(f_{yy}) = \dfrac{\partial}{\partial x}\big(-9x^2\operatorname{sen}(3xy)\big) = -18x\operatorname{sen}(3xy) - 27x^2y\cos(3xy)$

Definición 5.13 (Derivadas de funciones de más de dos variables)
Los conceptos anteriores se pueden generalizar para funciones que dependen de tres, cuatro o más variables. Así podríamos definir las derivadas f_x, f_y, f_z, f_{xz}, f_{zyx}, etc. de una función $f = f(x,y,z)$.

5.6 Regla de la cadena para funciones de varias variables

La Regla de la Cadena, que ya se conoce para funciones de una variable, se puede extender a funciones de más de una variable.
Consideremos la función

$$z = f(x,y)$$

Supongamos que x e y son funciones que, a su vez, dependen de una tercera variable t. Entonces, z también dependerá de t:

$$z = f(x(t), y(t))$$

Nos planteamos, pues, calcular la expresión de la derivada de z con respecto de t.

Teorema 5.14 (Regla de la Cadena para funciones de dos variables)
Si la función $f(x,y)$ tiene derivadas pariales y son continuas, y $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son a su vez funciones dependientes de t y derivables, entonces la derivada de

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

viene dada por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.15
Sea $z = f(x,y) = x^2y^3$ y sean

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \\ y(t) = \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Calcular la expresión de la derivada de z con respecto de t en el punto $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Utilizando la fórmula (5.1) se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}$$

Calculamos las derivadas involucradas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2, \qquad \frac{dx}{dt} = \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{e}^t$$

$$\frac{dz}{dt} = 2 \operatorname{sen} t \big(\mathrm{e}^t\big)^3 \cdot \cos t + 3\big(\operatorname{sen} t\big)^2 \big(\mathrm{e}^t\big)^2 \cdot \mathrm{e}^t = 2\,\mathrm{e}^{3t} \operatorname{sen} t \cos t + 3\,\mathrm{e}^{3t} \operatorname{sen}^2 t = \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{3t}\Big(2\cos t + 3 \operatorname{sen} t\Big)$$

$$\frac{dz}{dt}\big(\frac{\pi}{2}\big) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{3\pi/2}\Big(2\cos\frac{\pi}{2} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\Big) = \boxed{3\,\mathrm{e}^{3\pi/2} \approx 333.95}$$

5.7 Plano tangente

Recordamos el concepto de recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$. La generalización al caso de una función de dos variables es el **plano tangente** a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$.

Ecuación del plano tangente a una superficie
Si la función $f(x,y)$ es continua y derivable en el punto (x_0, y_0), y sus derivadas parciales son también continuas en un entorno del punto (x_0, y_0), entonces existe el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) $(z_0 = f(x_0, y_0))$ y su ecuación es

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ (y - y_0)$$

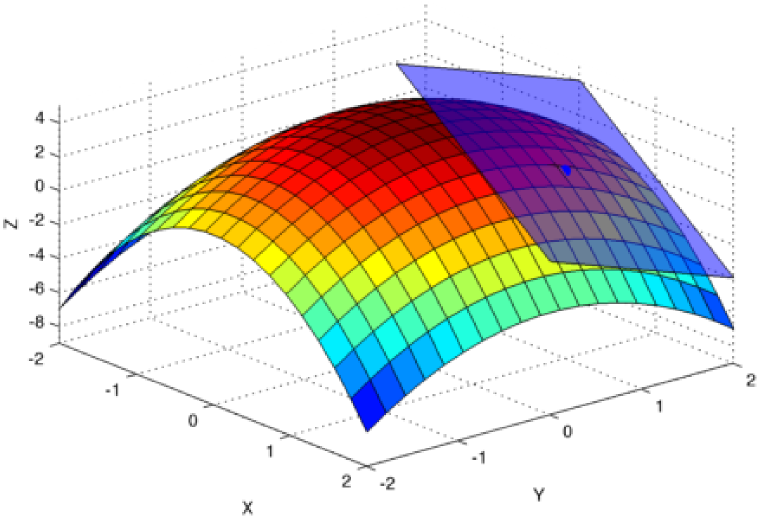


Figura 5.12: Plano tangente a una superficie.

Ejemplo 5.16
Calcular el plano tangente en $(x_0, y_0) = (2, 0)$ a la superficie de ecuación

$$z = f(x, y) = x^2 y + 2x\,\mathrm{e}^y\,.$$

Ejemplo 5.17
Calcular el plano tangente en $(x_0, y_0) = (3, 1)$ a la superficie de ecuación

$$z = f(x, y) = \ln(x - 2y^2)$$

5.8 Aproximación lineal

De la misma manera que en el caso unidimensional era posible aproximar una función $f(x)$, cerca de un punto x_0 dado, por la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en dicho punto, también es posible aproximar una función $f(x, y)$, cerca del punto (x_0, y_0), por el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en dicho punto.

Aproximación lineal de una función de dos variables
Sea $f(x, y)$ una función derivable y con derivadas continuas en un entorno del punto (x_0, y_0). Se llama **aproximación lineal** o **linealización** de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) a la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

La bondad de la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ viene determinada por los valores de las derivadas de segundo orden de f cerca del punto (x_0, y_0).

Ejemplo 5.18
Calcular una aproximación lineal de la función

$$f(x,y) = x^2 y + 2x\,\mathrm{e}^y$$

en el punto $(2,0)$.
La linealización de f en el punto $(2,0)$ viene dada por

$$L(x,y) = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\,(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\,(y-0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2\,\mathrm{e}^y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x\,\mathrm{e}^y$$

$$f(2,0) = 4\,\mathrm{e}^0 = 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 2\,\mathrm{e}^0 = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 4 + 4\,\mathrm{e}^0 = 8$$

Luego la aproximación lineal de $f(x,y)$ cerca de $(2,0)$ es

$$L(x,y) = 4 + 2(x-2) + 8(y-0) = \boxed{2x + 8y}$$

Ejemplo 5.19
Calcular una aproximación lineal de la función

$$f(x,y) = \ln(x - 2y^2)$$

en el punto $(3,1)$. Utilizar esta función para calcular una aproximación del valor de f en el punto $(3.05, 0.95)$, cercano al punto $(3,1)$ y compararlo con el valor exacto (utilizar una calculadora).
La linealización de f en $(3,1)$ es:

$$L(x,y) = f(3,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)\,(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)\,(y-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-2y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y}{x-2y^2}$$

$$f(3,1) = \ln(3-2) = \ln 1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = \frac{1}{3-2} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{-4}{3-2} = -4$$

La aproximación lineal es

$$\boxed{L(x,y) = 0 + (x-3) - 4(y-1) = 1 + x - 4y}$$

En el punto $(3.05, 0.95)$ se tiene

$$L(3.05, 0.95) = 1 + 3.05 - 4 \times 0.95 = 0.25, \qquad f(3.05, 0.95) = \ln\left(3.05 - 2 \times 0.95^2\right) \approx 0.2191$$

El error de aproximación es pues $|f(3.05, 0.95) - L(3.05, 0.95)| = |0.25 - 0.2191| = 0.031$

5.9 Gradiente de una función de dos variables

El vector **gradiente** de una función es de uso muy habitual en ciencias. Se refiere de un modo general a variaciones apreciables de una determinada magnitud física que pueden generar un flujo de ésta de unas zonas a otras. Es frecuente, por ejemplo, hablar de un gradiente de temperaturas, que generará una transmisión de calor de zonas de temperatura más alta a zonas de temperatura más baja; de gradiente de presión, que genera el paso de un fluido de zonas de mucha presión a zonas de menor presión, ...

Gradiente de una función de dos variables

Se define el **gradiente** de una función $f(x, y)$ como el vector

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

siempre que existan ambas derivadas parciales.

Ejemplo 5.20
Calcular el vector gradiente de la función $f(x, y) = 3x^2 - y - 2y^2$ en el punto $(1, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 6$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 - 4y; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1$$

El vector gradiente en $(1, 0)$ es, pues

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.10 Derivadas direccionales

El concepto de derivada direccional se puede explicar fácilmente con el ejemplo siguiente:

Supongamos que nos encontramos sobre una superficie inclinada, por ejemplo, sobre la ladera de una montaña. Dependiendo de la dirección en que caminemos, descenderemos o ascenderemos e incluso nos encontraremos con una mayor o menor pendiente.

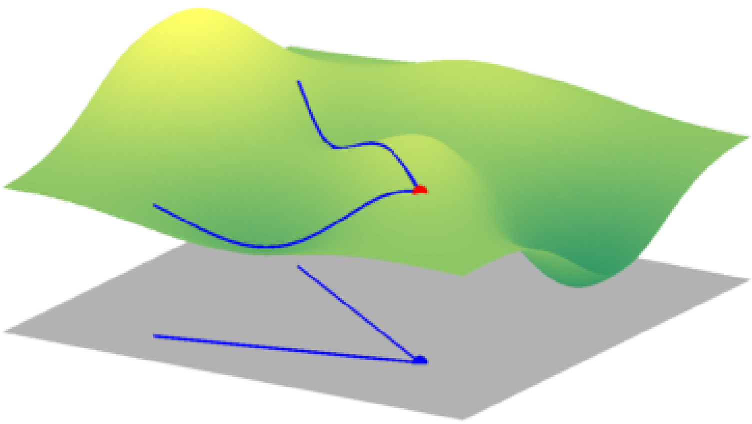


Figura 5.13: Distintos caminos sobre una superficie inclinada partiendo de un mismo punto.

Ahora imaginemos que dicha ladera viene dada por la superficie de ecuación $z = f(x, y)$: (x, y) son las coordenadas a nivel del mar del punto donde nos encontramos y z representa la altitud de dicho punto. Las distintas direcciones que parten de ese punto vienen dadas por los distintos vectores (en el plano OXY) que parten del punto (x, y). La elección de una cierta dirección nos da un cierto control sobre la inclinación del camino a seguir. Dicha inclinación se puede describir mediante la pendiente de la recta tangente al punto de arranque en la dirección del camino. Esto es lo que se llama **derivada direccional**.

Las derivadas parciales de la función $f(x, y)$, f_x y f_y, como ya se ha visto, son las derivadas direccionales en las direcciones de los ejes coordenados, esto es, cuando nos movemos en direcciones paralelas a los eje coordenados OX y OY, y en el sentido positivo de los mismos.

¿Cómo se puede expresar la pendiente cuando elegimos una dirección arbitraria? En primer lugar, dicha dirección se debe expresar mediante un vector **unitario** $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ (unitario significa que su longitud es 1).

Derivada direccional de una función de dos variables

La derivada direccional de la función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ es el **producto escalar**:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\; u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\; u_2 \tag{5.2}$$

Obsérvese que la elección de un vector unitario para definir la dirección hace que la derivada direccional coincida con las derivadas parciales cuando la dirección $\mathbf{u}$ es la de uno de los ejes coordenados en sentido positivo.

En efecto, el vector que designa la dirección del eje OX en sentido positivo es $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y la derivada direccional en esta dirección sería

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Análogamente, para la dirección del eje OY es $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y la derivada direccional en esta dirección sería

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

De la misma manera que las derivadas parciales "miden" la variación de la función en el sentido positivo de los ejes coordenados, la derivada direccional "mide" la variación de la función en la dirección y sentido del vector $\mathbf{u}$. Si, por ejemplo, $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ es un valor positivo, se tendrá que, si nos movemos, a partir del punto (x_0, y_0) en la dirección y sentido de $\mathbf{u}$, la función f crecerá, tanto más rápidamente cuanto mayor sea dicho valor. Si, por el contrario, $D_u f(x_0, y_0)$ toma un valor negativo, esto indicará que la función decrece en dicha dirección.

Ejemplo 5.21
Se consideran la función $f(x,y) = x^2y + y^2$ y el punto $(-1,1)$.

(a) Calcular el gradiente de la función.

(b) Calcular la derivada direccional en la dirección $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. ¿Crece o decrece la función en esa dirección?

(c) Calcular las derivadas direccionales en las direcciones $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ¿En cuál de ellas crece la función más rápidamente?

(a) Calculamos las derivadas parciales y el gradiente

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+2y \end{pmatrix}; \qquad \nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Comenzamos por construir un vector unitario con la misma dirección que el vector $\mathbf{u}$. Para ello sólo hay que dividir $\mathbf{u}$ por su módulo:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}. \quad \text{Así, el vector } \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{u} \text{ es unitario.}$$

Calculamos ahora la derivada direccional en el punto $(-1,1)$ en la dirección $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{u}$:

$$D_u f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\big((-2)\cdot 1 + 3\cdot(-2)\big) = \frac{-8}{\sqrt{5}}$$

Esto significa que en dicha dirección la función f **decrece**, puesto que la derivada es negativa.

(c) Comenzamos también aquí por normalizar los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$D_v f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2+3) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$D_w f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+3) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Es decir, la función crece en ambas direcciones, aunque lo hace más rápidamente en la dirección de $\mathbf{w}$.

5.11 Propiedades del vector gradiente

El vector gradiente de una función en un punto (x_0, y_0) tiene la importante propiedad de que señala la dirección de máximo crecimiento de la función en dicho punto. Es decir, de entre todas las (infinitas) direcciones que parten del punto (x_0, y_0) la dirección definida por el gradiente es aquélla en la que la función f crece (localmente) más rápidamente. Como consecuencia, la dirección opuesta al gradiente es aquélla en la que la función **decrece** más rápidamente.

Esta propiedad es de una importancia primordial en muchas situaciones reales. Por ejemplo, la **quimiotaxis**,

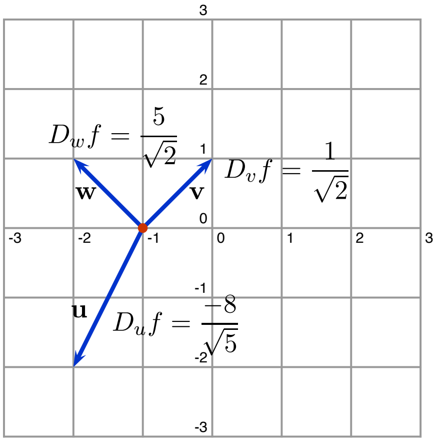


Figura 5.14: Derivadas direccionales del Ejemplo 5.21.

que es el mecanismo por el que algunas células se mueven de acuerdo con la concentración de ciertas sustancias químicas en su medio ambiente, eligiendo para ello la dirección del gradiente de la concentración, si se busca, por ejemplo, alimento, o la opuesta al gradiente, si se busca, por ejemplo, alejarse de un veneno. En los organismos multicelulares es fundamental tanto en las fases tempranas del desarrollo (por ejemplo en el movimiento de los espermatozoides hacia el óvulo) como en las fases más tardías (como la migración de neuronas o linfocitos).

Otra propiedad importante del vector gradiente es que es perpendicular a la curva de nivel de la función f que pasa por el punto (x_0, y_0).

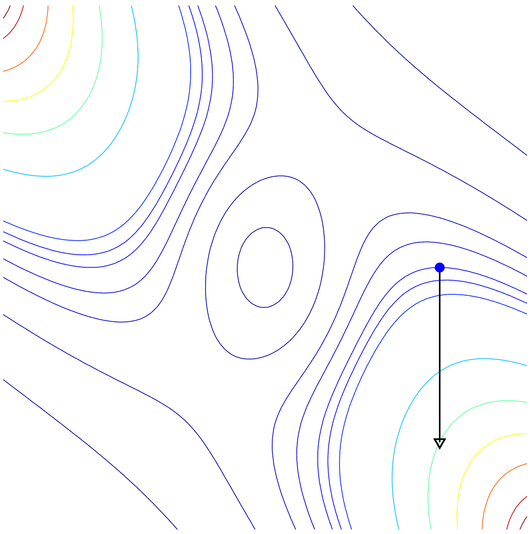


Figura 5.15: El vector gradiente en un punto es perpendicular a la curva de nivel que pasa por ese punto.

Propiedades del vector gradiente

Sea $f(x, y)$ una función derivable. El vector gradiente $\nabla f(x, y)$ tiene las propiedades siguientes:

(a) En cualquier punto (x_0, y_0), el máximo crecimiento de la función f se produce en la dirección del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

(b) El vector gradiente en un punto (x_0, y_0) es perpendicular a la curva de nivel que pasa por ese punto.

5.12 Máximos y mínimos relativos

De modo informal, un máximo local o relativo de una función es un punto es un punto en el que el valor de función es mayor que en todos los puntos "de alrededor".

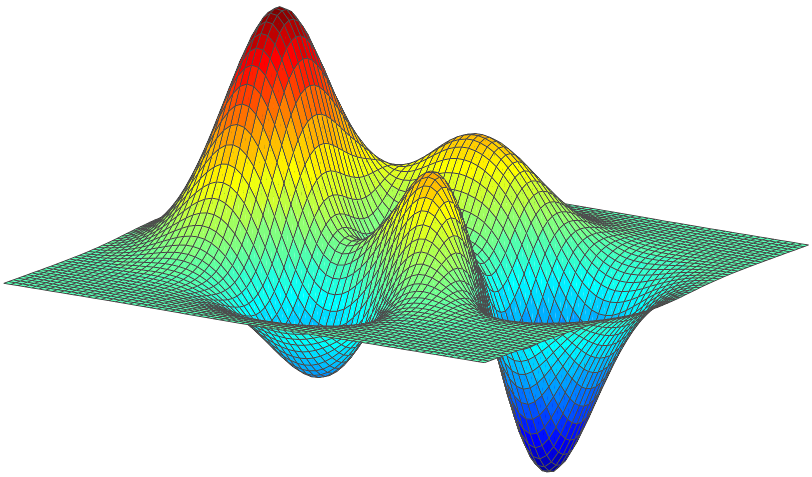
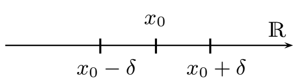
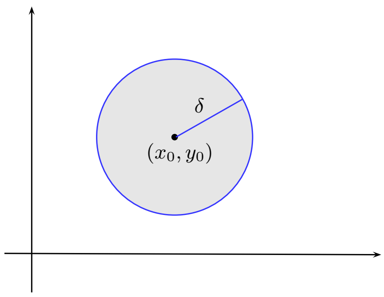


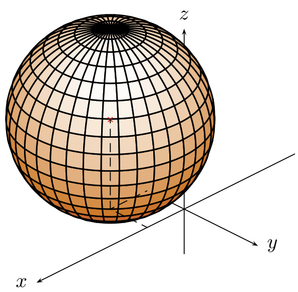
Figura 5.16: Una función con varios máximos y mínimos relativos.

La noción "de alrededor" se puede formalizar escribiendo en todos los puntos de un entorno.

- En dimensión 1 un entorno de un punto x_0 es un intervalo centrado en x_0 y de radio δ
- En dimensión 2, un entorno de radio δ de un punto (x_0, y_0) es un círculo de radio δ centrado en el punto (x_0, y_0).
- En dimensión 3, sería una esfera centrada en el punto y de radio δ







Recordamos que, en dimensión 1, una condición necesaria para que una función derivable tenga un extremo relativo en un punto x_0 era que

$$f'(x_0) = 0$$

lo que significa que la tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0)$ es horizontal. Esta idea se generaliza a funciones de más de una variable:

Teorema 5.22 (Condición necesaria de extremo local de una función de dos variables)
Una condición necesaria para que la función $f(x, y)$ tenga un extremo local en el punto (x_0, y_0) es que sea

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que geométricamente significa que el plano tangente a $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es horizontal.

En efecto, la ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) con $\nabla f = 0$ es:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - x_0) = f(x_0, y_0),$$

es decir $z =$ constante $= f(x_0, y_0)$ que efectivamente, es la ecuación de un plano horizontal (paralelo al plano OXY).

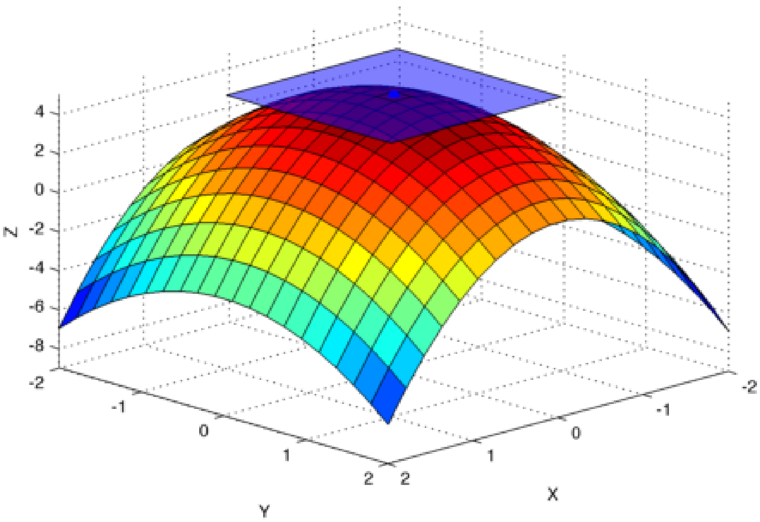


Figura 5.17: Los puntos que verifican $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ son los puntos en los que el plano tangente es horizontal.

A los puntos que verifican $\nabla f = 0$ se les suele denominar **puntos críticos**. También son puntos críticos los puntos en los que f no es derivable.

Ejemplo 5.23
Hallar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$$

La función f está bien definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y es continua y derivable en $\mathbb{R}^2$.
Los únicos puntos críticos serán los que anulen el gradiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3x^2 = 3(y - x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3y^2 = 3(x - y^2) = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos son pues los puntos que verifican el **sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} y = x^2 \\ \\ x = y^2 = (x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1 \end{cases}$$

Este sistema tiene por lo tanto dos soluciones, que son los puntos críticos de la función f:

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (1, 1)$$

De forma análoga a como sucede en dimensión 1, los puntos críticos son sólo **candidatos** a ser extremos relativos: Los extremos relativos, si existen, están entre ellos, pero no todos lo son.

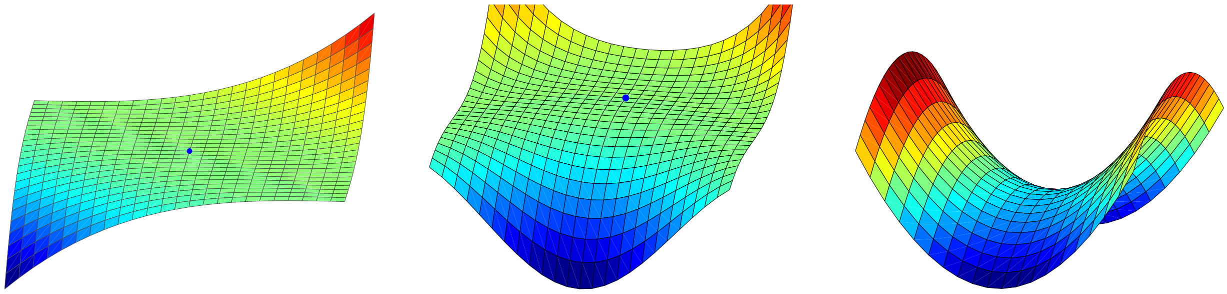


Figura 5.18: Ejemplos de puntos con gradiente nulo que no son máximos ni mínimos. En el primer caso, se trata de un punto de inflexión en ciertas direcciones que pasan por él, mientras que en otra dirección la función es constante. En el segundo caso la función tiene un mínimo en ciertas direcciones mientras que tiene un punto de inflexión en otras. El tercer caso se trata de un **punto de silla**, en el que la función tiene un máximo en unas direcciónes y un mínimo en otras.

5.13 Uso de las derivadas segundas para determinar máximos y mínimos relativos

Recordemos que en dimensión 1 el valor de la derivada de segundo orden de la función en un punto crítico permite, a veces, determinar si dicho punto es un máximo o un mínimo:

- Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
- Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

En dimensión 2 también existen criterios, que involucran las derivadas parciales de segundo orden, que permiten, en ocasiones, decidir si un punto crítico es un máximo o un mínimo.

Definición 5.24 (Matriz hessiana)
*Se denomina **matriz hessiana** de $f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0) a la matriz*

$$\mathrm{Hess}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

(Recuérdese que si la función f es suficientemente regular las derivadas cruzadas son iguales, es decir $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$).

Teorema 5.25
Sea $f(x,y)$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas en un entorno del punto (x_0,y_0), en el que se tiene $\nabla f(x_0,y_0) = 0$, lo que geométricamente significa que el plano tangente a $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es horizontal. Sea D el determinante de la matriz hessiana de f en (x_0,y_0):

$$D = \det \mathrm{Hess}(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - \big(f_{xy}(x_0,y_0)\big)^2$$

*(a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, entonces f tiene un **mínimo local** en (x_0,y_0).*

*(b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, entonces f tiene un **máximo local** en (x_0,y_0).*

*(c) Si $D < 0$, entonces f tiene un **punto de silla** en (x_0,y_0).*

En los demás casos este criterio no permite sacar conclusiones.

Ejemplo 5.26
Clasificar los punto críticos de la función $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.
Los puntos críticos son (véase el Ejemplo 5.23) $(0,0)$ y $(1,1)$

$$f_x = 3y - 3x^2, \qquad f_y = 3x - 3y^2$$

$$f_{xx} = -6x, \quad f_{xy} = 3, \quad f_{yy} = -6y \quad \Rightarrow \quad \text{Hess}(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

1. Punto $(x_0, y_0) = (0,0)$: $\text{Hess}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $\det \text{Hess}(0,0) = -9 < 0$.

   En consecuencia, $(0,0)$ es un **punto de silla** de f.

2. Punto $(x_0, y_0) = (0,0)$: $\text{Hess}(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ y $\det \text{Hess}(0,0) = 27 > 0$.

   Como, además, $f_{xx}(1,1) = -6 < 0$, se tiene que $(1,1)$ es un **máximo** de f.

Ejemplo 5.27
Calcular y clasificar los punto críticos de la función $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^4$.
Esta función está bien definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales son:

$$f_x = 4x - y, \qquad f_y = -x + 4y^3 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - y \\ -x + 4y^3 \end{pmatrix}$$

$$f_{xx} = 4, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = 12y^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Hess}(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

1. Punto críticos son los puntos que verifican el **sistema de ecuaciones**:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 4x \\ \\ 4y^3 - x = 4\,(4x)^3 - x = x(256x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ x^2 = \dfrac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{16} \\ \\ x = \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

   A cada uno de estos valores para la variable x hay que asociar el correspondiente valor de $y = 4x$:

   - A $x = 0$ le corresponde $y = 4 \cdot 0 = 0$
   - A $x = \dfrac{-1}{16}$ le corresponde $y = 4\,\dfrac{-1}{16} = \dfrac{-1}{4}$
   - A $x = \dfrac{1}{16}$ le corresponde $y = 4\,\dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{4}$

   En consecuencia, f tiene tres puntos críticos: $$\boxed{\begin{array}{l} (x_1, y_1) = (0,0) \\ (x_2, y_2) = (\frac{-1}{16}, \frac{-1}{4}) \\ (x_3, y_3) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{4}) \end{array}}$$

2. Tratamos ahora de clasificar los puntos críticos.

- Para $(x_1, y_1) = (0,0)$: $\text{Hess}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \text{Hess}(0,0) = -1 < 0$,

  luego $\boxed{(x_1, y_1) = (0,0) \text{ es un punto de silla}}$.

- Para $(x_2, y_2) = (\frac{-1}{16}, \frac{-1}{4})$: $\text{Hess}(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \text{Hess}(x_2, y_2) = 2 > 0$ y

  $f_{xx}(x_2, y_2) = 4 > 0$, luego $\boxed{(x_2, y_2) = (\frac{-1}{16}, \frac{-1}{4}) \text{ es un mínimo}}$.

- Para $(x_3, y_3) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$: $\text{Hess}(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \text{Hess}(x_3, y_3) = 2 > 0$ y

  $f_{xx}(x_3, y_3) = 4 > 0$, luego $\boxed{(x_3, y_3) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{4}) \text{ es un mínimo}}$.

Tema 6

Ecuaciones diferenciales

Versión: 18 de octubre de 2019

6.1 Introducción

Existen numerosos modelos matemáticos de diversa índole que se utilizan para el estudio de problemas en Biología y otras ciencias experimentales; sus objetivos principales son describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en dichas áreas. Una gran parte de esos modelos se expresan mediante ecuaciones diferenciales.

El objetivo de este tema es describir brevemente algunos de los conceptos básicos relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias, mostrar técnicas elementales de su resolución, así como exponer ejemplos prácticos de aplicaciones.

Ecuación diferencial

Es una ecuación en que la **incógnita** es una función y que, además, involucra también las **derivadas** de la función hasta un cierto orden.

La incógnita no es el valor de la función en uno o varios puntos, sino la función en sí misma.

Cuando la incógnita es una función de una sola variable se dice que la ecuación es **ordinaria**, debido a que la o las derivadas que aparecen son derivadas ordinarias (por contraposición a las derivadas parciales de las funciones de varias variables).

Por ejemplo,

$$y'(t) = -y(t) \tag{6.1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, ya que la máxima derivada que aparece en ella es la de primer orden. Aquí, t es la **variable independiente** e $y = y(t)$, que es una función desconocida que depende de t, es la **incógnita**. Si no resulta confuso se suele escribir también esta ecuación en la forma $y' = -y$, omitiendo la mención expresa a la dependencia de y respecto a la variable independiente t.

Naturalmente, la utilización de las letras t e y, aunque es la que se utiliza en estas notas, es arbitraria. Por ejemplo, la ecuación anterior se podría escribir también $A'(x) = -A(x)$, siendo aquí x la variable independiente y A la incógnita.

Lo que interesa, con respecto a la ecuación (6.1), es encontrar una o varias funciones $y = \varphi(t)$ que verifiquen la igualdad

$$\varphi'(t) = -\varphi(t) \qquad \text{para todo } t \text{ perteneciente a un cierto intervalo } I$$

Una tal función se dice que es una **solución** de la ecuación (6.1) en el intervalo I.

Con carácter general, una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** se escribe:

$$y' = f(t, y) \tag{6.2}$$

y se dice que $y = \varphi(t)$ es **solución en el intervalo I** de esta ecuación si se verifica

$$\varphi'(t) \left(= \frac{d\varphi}{dt}(t) \right) = f(t, \varphi(t)), \quad \forall\, t \in I. \tag{6.3}$$

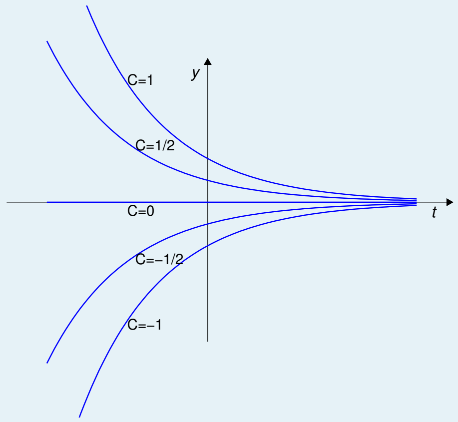
es decir, si cuando se sustituye en la ecuación y por su expresión e y' por la expresión de la derivada, lo que se obtiene es una identidad, algo que es cierto **para todo $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$**.

Ejemplo 6.1
La función $y = e^{-t}$ es solución de la ecuación $y' = -y$ en todo $\mathbb{R}$, ya que

$$y'(t) = -e^{-t} = -y(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Pero también es solución cualquier función de la forma $y = Ce^{-t}$ siendo C una constante arbitraria, puesto que

$$y'(t) = -Ce^{-t} = -y(t), \quad \forall t\ \in \mathbb{R}.$$



Así pues, la ecuación del Ejemplo (6.1) tiene infinitas soluciones, lo que no es una particularidad de esta ecuación concreta. La ecuación diferencial ordinaria (6.2) posee, en general, una «familia» de infinitas soluciones dependientes de una constante arbitraria, a la que se llama **solución general** de (6.2). Para cada valor de dicha constante arbitraria se obtiene una **solución particular**.

Se llama **resolver una ecuación diferencial** a encontrar su solución general. En realidad, esto sólo es posible para unas cuantas (pocas) ecuaciones sencillas. Para la inmensa mayoría de las ecuaciones diferenciales es necesario recurrir a **métodos numéricos** y calcular soluciones aproximadas con ayuda de un ordenador.

Con frecuencia lo que interesa en las aplicaciones es encontrar una solución particular que verifique alguna condición adicional. Por ejemplo, que toma un valor dado para un valor, también dado, de la variable independiente.

Problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0\,, \end{cases}$$

Este problema consiste en:

> Encontrar, de entre todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$, aquella que para $t = t_0$ toma el valor $y = y_0$ o, lo que es lo mismo, aquella que "pasa" por el punto (t_0, y_0).

El nombre proviene del hecho de que, con frecuencia, la variable independiente, t, representa el tiempo, y el valor t_0 es el instante en que comienza un experimento, observación o simulación.

En general, si se verifican ciertas condiciones razonables de regularidad de la función f, un problema de valor inicial tiene solución única.

Ejemplo 6.2
El problema de valor inicial, asociado a la ecuación (6.1),

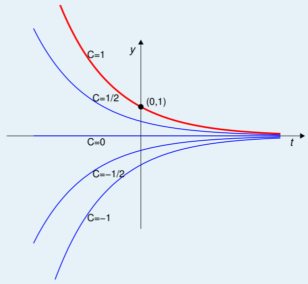
$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1\,, \end{cases} \tag{6.4}$$

tiene una única solución, $y = e^{-t}$, que se puede encontrar imponiendo la condición inicial, $y(0) = 1$, a las funciones de la familia de soluciones, $y = Ce^{-t}$, y deduciendo para qué valor de la constante arbitraria C se cumple la condición inicial. Es decir:

$$y(0) = C \cdot e^0 = C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

La solución del problema de valor inicial es, pues,

$$y = e^{-t}$$



Ejemplo 6.3
Comprobar que, sea cual sea el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$, la función $y = 20 - 3e^{-kt}$ es solución de la ecuación $y' = k(20 - y)$.
Para comprobarlo se han de sustituir y e y' en la ecuación y verificar que el resultado es una **identidad** en t, es decir, que la igualdad es cierta para todos los valores posibles de t.
Se tiene:

$$\begin{cases} y' & = 3ke^{-kt} \\ k(20 - y) & = k\big(20 - (20 - 3e^{-kt})\big) = 3ke^{-kt} \end{cases} \tag{6.5}$$

luego, efectivamente, es solución.

A continuación se explica cómo se pueden resolver varios ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden sencillas.

6.2 Resolución de ecuaciones diferenciales de la forma $\mathbf{y' = a(t)}$

En muchas aplicaciones, la variable independiente t representa el tiempo. Si la velocidad de variación de una magnitud depende sólo del tiempo, la ecuación diferencial que verifica es de la forma

$$y' = a(t), \tag{6.6}$$

donde $a = a(t)$ es una función que depende sólo de la variable independiente t, definida en un intervalo I.

Resolución de $y' = a(t)$

1. Utilizando la notación $\dfrac{dy}{dt}$, se escribe $y' = \dfrac{dy}{dt} = a(t)$, y de aquí
$$dy = a(t)\,dt.$$

2. A continuación, se integra separadamente en ambos miembros de esta ecuación, en el primer miembro respecto de y y en el segundo miembro respecto de t.
$$\int dy = \int a(t)\,dt.$$

3. Denotemos por $A(t)$ una primitiva (cualquiera, pero fija) de $a(t)$. Se tiene entonces, recordando que todas las demás primitivas de $a(t)$ se pueden obtener a partir de ésta sumándole una constante,
$$y = A(t) + C$$
siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria, es la **solución general** de la ecuación.

Resolución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = a(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Ahora lo que se desea es averiguar cuál es la solución de la ecuación diferencial $y' = a(t)$ que verifica $y(t_0) = y_0$. Para ello el procedimiento a seguir es:

1. Calcular la solución general de la ecuación $y' = a(t)$ que, por lo visto antes, es $y = A(t) + C$ siendo $A(t)$ una primitiva de $a(t)$.

2. Para hallar cuál, entre todas las soluciones, es la que verifica $y(t_0) = y_0$, hay que averiguar para qué valor de C se tiene
$$y_0 = y(t_0) = A(t_0) + C \Longleftrightarrow C = y_0 - A(t_0)$$

3. Por lo tanto la solución del problema de valor inicial es
$$y = A(t) + y_0 - A(t_0)$$

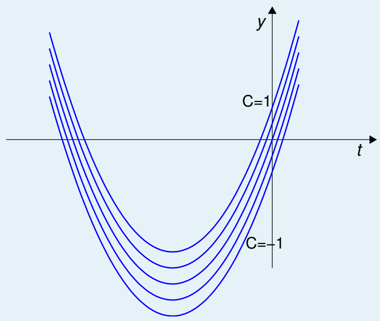
Ejemplo 6.4
Calcular la solución general de $y' = 3 + t$

$$y' = \frac{dy}{dt} = 3 + t \;\Leftrightarrow\; \int dy = \int (3+t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow\; y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$$

La solución general de la ecuación es, pues,

$$y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$$



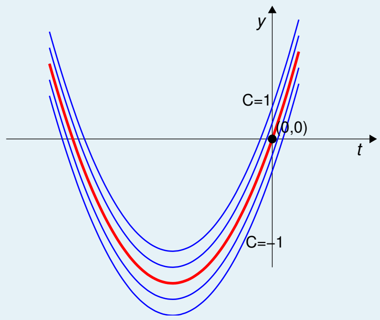
Ejemplo 6.5
Resolver el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 3 + t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Hay que hallar el valor de C que hace que $y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$ verifique $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 = C \;\Leftrightarrow\; C = 0$$

La solución del problema de valor inicial es, por lo tanto

$$y = 3t + \frac{1}{2}t^2$$



Ejemplo 6.6
Resolver el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = t^2 \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$

Se calcula, en primer lugar, la solución general de $y' = t^2$:

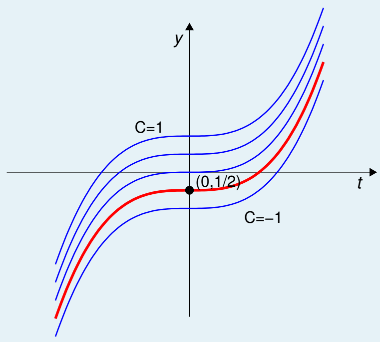
$$y' = \frac{dy}{dt} = t^2 \;\Leftrightarrow\; \int dy = \int t^2\,dt \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}t^3 + C$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = \frac{1}{3}t^3 + C$$

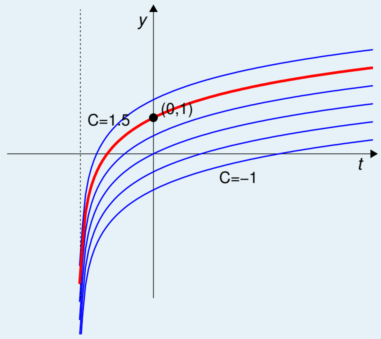
Para obtener la solución particular que verifica $y(0) = 1/2$, se impone esta condición y se despeja C:

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{3}0^3 + C = C \;\Leftrightarrow\; C = \frac{1}{2}$$



Ejemplo 6.7
Resolver el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y' = \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow \int dy = \int \frac{1}{1+t}\,dt$$
$$\Leftrightarrow y = \ln|1+t| + C$$



La solución general de la ecuación es, pues,

$$y = \ln|1+t| + C$$

Se impone ahora la condición inicial:

$$1 = y(0) = \ln(1+0) + C = C \Leftrightarrow C = 1$$

Luego la solución del problema es

$$y = \ln(1+t) + 1 \quad \forall t \in (-1, +\infty)$$

6.3 Ecuaciones diferenciales de variables separables $\mathbf{y' = a(t)\,g(y)}$

Son ecuaciones de la forma

$$y' = a(t)g(y),$$

donde $a(t)$ es una función, definida en un intervalo I, que depende sólo de la variable independiente, t, y $g(y)$ es una función que depende sólo de la variable dependiente, y.

Para resolverla se procede como sigue:

Resolución de $y' = a(t)g(y)$

1. Utilizando la notación $\dfrac{dy}{dt}$, se escribe $y' = \dfrac{dy}{dt} = a(t)\,g(y)$
2. A continuación, se "separan" las variables, de forma que a un lado del signo "=" esté sólo lo que depende de y y al otro lado esté sólo lo que depende de t: si $g(y) \neq 0$ se puede poner (en caso contrario, véase el punto 5):
$$\frac{1}{g(y)}\,dy = a(t)\,dt$$
3. Se integra separadamente en ambos miembros de esta ecuación, en el primer miembro respecto de y y en el segundo miembro respecto de t.
$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int a(t)\,dt$$
4. Sean
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy \qquad A(t) = \int a(t)\,dt$$
dos primitivas de $\dfrac{1}{g(t)}$ y $a(t)$ respectivamente. Entonces la solución general viene dada por
$$G(y) = A(t) + C$$
De esta expresión, si se puede, se despeja y. Si no se puede, se deja como está.
5. Si hay algún valor de y que anule la función g, por ejemplo, $g(\alpha) = 0$, entonces la ecuación $y' = a(t)g(y)$ tiene la solución constante $y = \alpha$, que puede estar, o no, incluida en la solución general $G(y) = A(t) + C$. Se debe comprobar esto.

Ejemplo 6.8
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = yt$.

$$y' = yt \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int t\,dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \frac{1}{2}t^2 + C$$

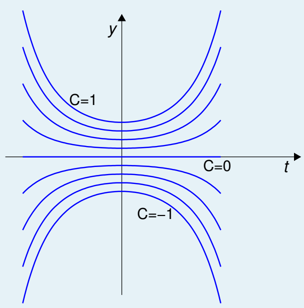
$$\Leftrightarrow\; |y| = e^{t^2/2+C} = e^{t^2/2}\cdot e^C \;\Leftrightarrow\; y = \pm e^{t^2/2}\cdot e^C = e^{t^2/2}\cdot\left(\pm e^C\right)$$

Comentario importante: Puesto que C representa aquí un valor cualquiera, también $\pm e^C$ es un valor cualquiera. Por lo tanto, y con el fin de no complicar inútilmente la notación, seguiremos usando la letra C para designar el valor arbitrario $\pm e^C$.

Queda entonces

$$y = C\,e^{t^2/2}$$

La solución constante $y = 0$ que la ecuación, evidentemente, tiene, está incluida en esta última expresión para el valor de la constante $C = 0$.



La constante arbitraria en la resolución de ecuaciones diferenciales.

En la resolución de ecuaciones diferenciales se aplica de forma sistemática el comentario del Ejercicio 6.8:

Debido a las operaciones que se realizan para expresar adecuadamente la solución, con frecuencia la constante aparece inmersa en alguna expresión.

Sin embargo, para no complicar sin necesidad la notación, se sigue denotando por C a dicha expresión.

Ejemplo 6.9

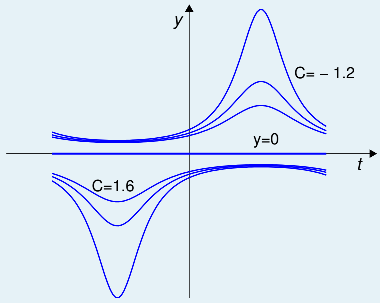
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = y^2 \cos t$.

$$y' = y^2 \cos t \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \cos t\, dt \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \operatorname{sen} t + C$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1}{\operatorname{sen} t + C}$$

La ecuación $y' = y^2 \cos t$ tiene, además, la solución constante $y = 0$, que no está incluida en la familia de funciones anterior : no se obtiene de su expresión para ningún valor de la constante C. Resumiendo, las soluciones de la ecuación son:

$$y = \frac{-1}{\operatorname{sen} t + C} \quad \text{y además } y = 0$$



Ejemplo 6.10

Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2y$.

$$y' = 2y \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int 2\, dt \Leftrightarrow \ln|y| = 2t + C$$

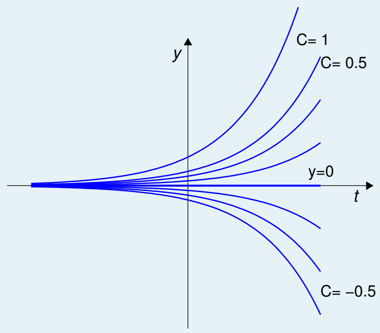
Para despejar la incógnita, y, se toman exponenciales en ambos miembros de la igualdad anterior, y se obtiene

$$y = \pm\, e^{2t+C} = \pm e^{2t} \cdot e^C = e^{2t} \cdot (\pm e^c)$$

Aquí, como en el Ejemplo (6.8), si C es una constante arbitraria, $\pm e^C$ también lo es, y la seguimos llamando C para no complicar la notación. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y = C\, e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{arbitraria}$$

La solución constante $y = 0$ está incluida para el valor $C = 0$.



Ejemplo 6.11
Hallar la solución del problema $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{t} \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$

$$y' = \frac{y^2-1}{t} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt$$

La integral del primer miembro se calcula escribiendo el integrando como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) = \ln|t| + C$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) = 2(\ln|t|+C) = 2\ln|t| + 2C = \ln t^2 + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros:

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{\ln t^2 + C} = e^{\ln t^2}\,e^C = C\,t^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{y-1}{y+1} = (\pm C)\,t^2 = C\,t^2$$

$$\Leftrightarrow\; y - 1 = C\,t^2(y+1) = Ct^2y + Ct^2 \;\Leftrightarrow\; y - Ct^2y = y(1-Ct^2) = 1 + Ct^2$$

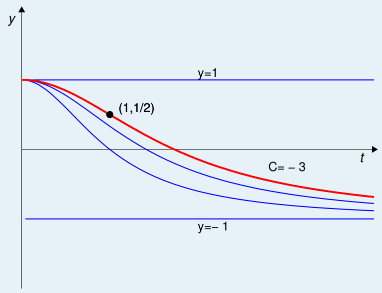
$$y = \frac{1+Ct^2}{1-Ct^2} = 1 + \frac{2Ct^2}{1-Ct^2} = 1 + \frac{2t^2}{C-t^2}$$

La ecuación tiene también las soluciones constantes $y = 1$ e $y = -1$, la segunda incluida para $C = 0$, la primera no.
Para hallar la solución que verifica $y(1) = 0.5$ imponemos esta condición en la solución general y despejamos C:

$$\frac{1}{2} = y(1) = 1 + \frac{2}{C-1} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2} = \frac{2}{C-1} \;\Leftrightarrow\; C = -3$$

Así pues, la solución del problema es

$$y = 1 + \frac{2t^2}{-3-t^2} = 1 - \frac{2t^2}{3+t^2}$$



Ejemplo 6.12
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2 - 3y$**.**

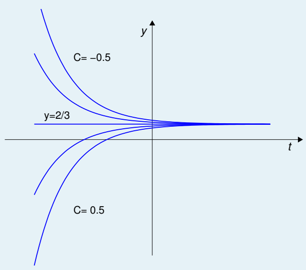
Se comienza dividiendo en ambos miembros por $2-3y$ (se debe recordar que luego hay que comprobar si la solución constante $y = 2/3$ está contenida en la solución general) y se integra en ambos miembros por separado (las integrales son inmediatas):

$$y' = 2 - 3y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{2-3y}\,dy = \int dt \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\ln|2-3y| = t + C \;\Leftrightarrow\; \ln|2-3y| = -3(t+C) = -3t + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros:

$$2 - 3y = e^{-3t+C} = e^{-3t}\,e^C = C\,e^{-3t} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}\left(2 - C\,e^{-3t}\right)$$

La solución constante $y = \dfrac{2}{3}$ está contenida en esta familia de funciones para el valor de $C = 0$.



Ejemplo 6.13
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = y - 2y^2$

El segundo miembro, que se puede factorizar en la forma $y - 2y^2 = y(1-2y)$, se anula claramente para $y = 0$ y para $y = 1/2$ que son soluciones constantes de la ecuación.

Para resolverla se pasa $y(1-2y)$ al primer miembro dividiendo y se integra en ambos lados. La integral del primer miembro se hace por descomposición en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{y(1-2y)}\,y' = 1 \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y(1-2y)}\,dy = \int dt \;\Leftrightarrow\; \int \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{1-2y}\right) dy = \int dt$$

$$\Leftrightarrow\; \ln|y| - \ln|1-2y| = \ln\left|\frac{y}{1-2y}\right| = t + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros de la última igualdad se tiene

$$\frac{y}{1-2y} = C\,e^t \;\Leftrightarrow\; y = C\,e^t(1-2y) = Ce^t - 2Ce^t y \;\Leftrightarrow\; y + 2Ce^t y = y(1+2Ce^t) = Ce^t$$

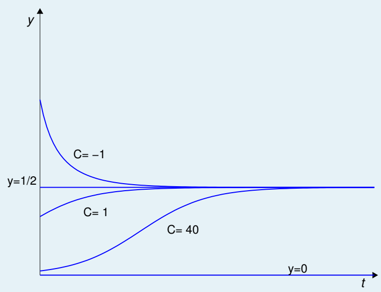
y, finalmente, despejando aquí la incógnita

$$y = \frac{Ce^t}{1+2Ce^t}$$

que es mejor escribir dividiendo numerador y denominador por Ce^t:

$$y = \frac{1}{\dfrac{1}{Ce^t} + 2} = \frac{1}{Ce^{-t} + 2}$$

La solución constante $y = 0$ no está incluida en esta expresión. En cambio, sí lo está la solución $y = 1/2$ (para $C = 0$).



6.4 Ecuaciones diferenciales lineales $\mathbf{y' = a(t)\, y + b(t)}$

Son las ecuaciones de la forma

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{6.7}$$

donde $a = a(t)$ y $b = b(t)$ son funciones que dependen de la variable independiente t.

Cuando $b(t) \equiv 0$ se dice que la ecuación (6.7) es **lineal homogénea**:

Dada la ecuación no homogénea (6.7), se denomina **ecuación homogénea asociada** a la ecuación que se obtiene eliminando el término no homogéneo, es decir

$$y' = a(t)y. \tag{6.8}$$

El método de resolución de estas ecuaciones está basado en la siguiente propiedad fundamental de sus soluciones:

Solución general de una ecuación lineal.
La solución general de la ecuación diferencial lineal (6.7) se puede escribir como la suma de la solución general de su ecuación homogénea asociada, (6.8), y una solución particular cualquiera de la ecuación completa (6.7):

$$y = y_h(t) + y_p(t),$$

donde

$y_h(t)$ es la solución general de $y' = a(t)\,y$

$y_p(t)$ es una solución particular cualquiera de $y' = a(t)\,y + b(t)$

En consecuencia, la resolución de la ecuación (6.7) se lleva a cabo en dos etapas:

1. Se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada (6.8).
2. Se calcula **una** solución particular (cualquiera) de la ecuación completa (6.7).

Se explica a continuación, con más detalle, cómo se ponen en práctica estas etapas.

1. La ecuación homogénea asociada
$$y' = a(t)y$$
es una ecuación de variables separables. Procediendo a separar las variables, e integrando en ambos miembros, se tiene
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int a(t)\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = A(t) + C \;\Leftrightarrow\; y = \pm e^{A(t)+C} = C\,e^{A(t)}$$
donde $A(t)$ es una primitiva de $a(t)$. Así, la solución general de la ecuación homogénea (6.8) es
$$y_h(t) = C\,e^{A(t)}$$
Denotemos $G(t) = e^{A(t)}$.

2. La solución general de la ecuación homogénea asociada siempre es de la forma
$$y_h(t) = C\,G(t), \qquad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$
donde $G(t) = e^{A(t)}$ y por tanto verifica $G'(t) = A'(t)\,e^{A(t)} = a(t)\,e^{A(t)}$, puesto que $A(t)$ es una primitiva de $a(t)$.

El cálculo de **una** solución particular de la ecuación (6.7) se puede llevar a cabo por el **método de Lagrange de variación de la constante**, que consiste en "buscar" dicha solución sabiendo que es de la forma:

$$y_p(t) = K(t)\,G(t). \tag{6.9}$$

Para encontrar la función $K(t)$ adecuada, se sustituye en la ecuación (6.7), y así se encontrará la condición que debe verificar $K(t)$ para que $y_p(t)$ sea solución, es decir, que verifique $y_p'(t) = a(t)\,y_p(t) + b(t)$:

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= K'(t)G(t) + K(t)G'(t) = K'(t)G(t) + K(t)a(t)G(t) \\ a(t)y_p(t) + b(t) &= a(t)K(t)G(t) + b(t) \end{aligned}$$

$$y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t) \iff K'(t)G(t) = b(t) \iff K'(t) = b(t)\,\frac{1}{G(t)}$$

luego, para que (6.9) sea solución de (6.7), tiene que ser

$$K(t) = \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt.$$

de donde la solución particular de (6.7) que se busca es

$$y_p(t) = G(t)\int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt.$$

Finalmente, según la propiedad antes explicada, la solución general de la ecuación lineal es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\,G(t) + G(t)\int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \left(\int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt + C\right)G(t).$$

El resumen de este proceso es, pues, el siguiente

Cálculo de la solución general de la ecuación diferencial lineal $\mathbf{y' = a(t)y + b(t)}$.

1. Calcular y_h, la solución general de la ecuación homogénea asociada $y' = a(t)y$, que será de la forma
$$y_h(t) = C\,G(t)$$
2. Calcular
$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt$$
3. La solución general es
$$y(t) = (\,K(t) + C\,)\;G(t), \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ cualquiera.}$$

Ejemplo 6.14
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2y + t$.

En primer lugar se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada, $y' = 2y$, que es de variables separables:

$$\frac{1}{y}y' = 2 \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = 2\int dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = 2t + C \;\Leftrightarrow\; y = C\,e^{2t}$$

Así pues, la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h(t) = C\,e^{2t}$. Ponemos ahora $G(t) = e^{2t}$ y calculamos

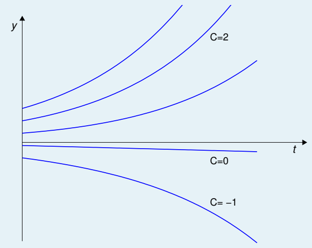
$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int t\frac{1}{e^{2t}}\,dt = \int te^{-2t}\,dt$$

Esta última integral se hace por partes:

$$\int te^{-2t}\,dt = \left[\begin{array}{ll} u=t & u'=1 \\ v'=e^{-2t} & v=-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{array}\right] = -\frac{1}{2}te^{-2t}+\frac{1}{2}\int e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

Con esto ya se tiene la solución particular buscada:

$$y_p(t) = K(t)\,G(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2t} = -\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$



y, por tanto, también la solución general:

$$y(t) = y_h(t)+y_p(t) = C\,e^{2t}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

Ejemplo 6.15
Hallar la solución del problema de valor inicial $\left\{\begin{array}{l} y'=2y+t \\ y(0)=1\end{array}\right.$

La solución general de la ecuación $y'=2y+t$ ya se ha calculado en el Ejemplo anterior y es

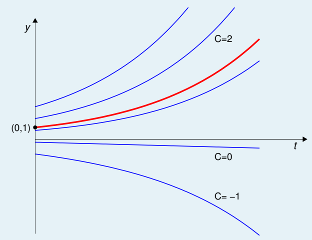
$$y = C\,e^{2t}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

Para hallar la solución del problema de valor inicial, sólo hay que imponer la condición inicial y deducir para qué valor de C se cumple:

$$1 = y(0) = Ce^0-\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) = C-\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; C = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Luego la solución buscada es:

$$y = \frac{5}{4}\,e^{2t}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$



Ejemplo 6.16
Calcular la solución general de $y' = ty+te^{t^2}$**.**

Se calcula en primer lugar la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = ty \;\Leftrightarrow\; \int\frac{1}{y}\,dy = \int t dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \frac{1}{2}\,t^2+C \;\Leftrightarrow\; y = C\,e^{t^2/2}$$

Así pues, la solución general de la homogénea es $y_h(t) = C\,e^{t^2/2}$. Ponemos $G(t) = e^{t^2/2}$.
Ahora, para hallar una solución particular de la ecuación completa, se calcula

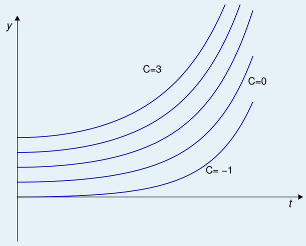
$$K(t) = \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt = \int t\,e^{t^2}\,\frac{1}{e^{t^2/2}}\,dt = \int t\,e^{t^2}\,e^{-t^2/2}\,dt = \int t\,e^{t^2/2}\,dt = e^{t^2/2}$$

En consecuencia, la solución particular buscada es

$$y_p(t) = e^{t^2/2}e^{t^2/2} = e^{t^2}$$

y la solución general de la ecuación completa es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\, e^{t^2/2} + e^{t^2}$$



Ejemplo 6.17
Calcular la solución general de $ty' - y = t$**.**

La ecuación no aparece escrita en la forma normalizada $y' = a(t)y + b(t)$ para la cual está descrito el procedimiento de resolución. Lo primero que hay que hacer, en consecuencia, es escribirla en dicha forma estándar.

Para ello dividimos toda la ecuación por t y pasamos el término en y al segundo miembro:

$$ty' - y = t \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{t}y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{t}y + 1$$

Ahora calculamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{t}y \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|t| + C \;\Leftrightarrow\; y_h = C\,t \Rightarrow G(t) = t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| \Rightarrow y_p(t) = t\,\ln|t|.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,t + t\,\ln|t|, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Ejemplo 6.18
Calcular la solución general de $y' + y\cos(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}$**.**

La ecuación no aparece escrita en la forma normalizada $y' = a(t)y + b(t)$ para la cual está descrito el procedimiento de resolución. Lo primero que hay que hacer, en consecuencia, es escribirla en dicha forma estándar.

Para ello pasamos el término en y al segundo miembro:

$$y' + y\cos(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)} \quad \Rightarrow \quad y' = -y\cos(t) + e^{-\operatorname{sen}(t)}$$

Ahora calculamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = -\cos(t)\,y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \cos(t)\,dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = -\operatorname{sen}(t) + C \;\Leftrightarrow$$

$$y_h = C\,e^{-\operatorname{sen}(t)} \Rightarrow G(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int e^{-\operatorname{sen}(t)}e^{\operatorname{sen}(t)}\,dt = \int dt = t \Rightarrow y_p = t\,e^{-\operatorname{sen}(t)}.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,e^{-\operatorname{sen}(t)} + t\,e^{-\operatorname{sen}(t)} = (C+t)\,e^{-\operatorname{sen}(t)} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Ejemplo 6.19
Calcular la solución general de $y' = \dfrac{1}{t}y + 2t + 1$**.**

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{t}\,y \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|t| + C \;\Leftrightarrow\; y = C\,t \Rightarrow G(t) = t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int \frac{2t+1}{t}\,dt = \int \left(2 + \frac{1}{t}\right)\,dt = 2t + \ln|t|$$

$$\Rightarrow y_p = K(t)G(t) = (2t + \ln|t|)\,t = 2t^2 + t\ln|t|.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,t + 2t^2 + t\ln|t| \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

6.5 Linealización de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria

Supongamos que necesitamos hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

y no sabemos/podemos resolver la ecuación diferencial $y' = f(t,y)$. La aproximación lineal de funciones de dos variables, estudiada en el tema anterior puede servirnos de ayuda.
Recordamos que una función $f(t,y)$, cerca de un punto (t_0,y_0), se puede aproximar por su plano tangente:

$$L(t,y) = f(t_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial t}\,(t-t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(y-y_0)$$

En el ejemplo siguiente se utiliza esta técnica para sustituir un problema de valor inicial por otro más fácil de resolver.

Ejemplo 6.20
Aproximar el siguiente problema de valor inicial mediante un problema lineal y calcular la solución de éste:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{t+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La ecuación $y' = \sqrt{t+y}$ no es de ninguno de los tipos estudiados.
Vamos a aproximar linealmente $f(t,y) = \sqrt{t+y}$ cerca de $(t_0, y_0) = (0,1)$. Se tiene:

$$\left\{\begin{array}{ll} f(t,y) = \sqrt{t+y}, & f(0,1) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+y}}, & \dfrac{\partial f}{\partial t}(0,1) = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+y}}, & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

La aproximación lineal de $f(t,y)$ es: $f(t,y) \approx L(t,y) = 1 + \frac{1}{2}(t-0) + \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{2}y$
Ahora, en lugar del problema inicial (P), consideramos su *aproximación lineal*:

$$(Q) \quad \left\{\begin{array}{l} y' = L(t,y) = \dfrac{1}{2}\,(t+1) + \dfrac{1}{2}\,y \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

que sí sabemos resolver, ya que se trata ahora de una ecuación lineal.

1. Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{2}\,y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\int dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \frac{t}{2} + C \Rightarrow y_h(t) = C\,e^{t/2}$$

2. Solución particular: $y_p(t) = K(t)\,e^{t/2}$, siendo

$$K(t) = \int \frac{t+1}{2}\,\frac{1}{e^{t/2}}\,dt = \frac{1}{2}\int (t+1)\,e^{-t/2}\,dt = [\text{por partes}] = -(t+3)\,e^{-t/2} \Rightarrow y_p(t) = -(t+3)$$

3. La solución general de la ecuación (Q) es, pues, $y(t) = -(t+3) + C\,e^{t/2}$

Imponemos la condición inicial:

$$1 = y(0) = -(0+3) + Ce^0 = -3 + C$$

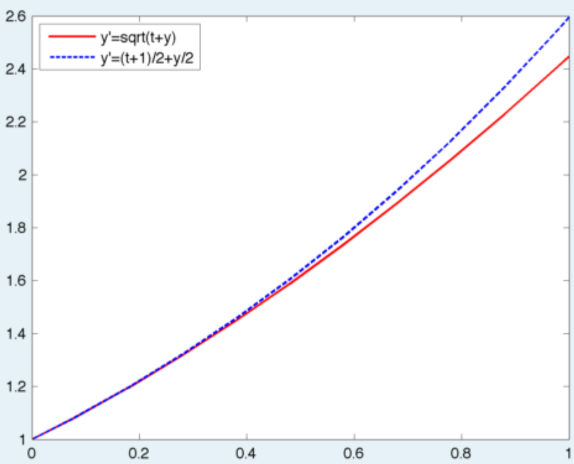
es decir,

$$C = 4$$

Luego, finalmente, la solución del problema aproximado es:

$$\boxed{y = -(t+3) + 4e^{t/2}}$$

En la figura se pueden comparar la solución del problema aproximado (en color azul y línea discontinua) con la solución del problema original calculada por métodos numéricos (en rojo, con línea continua).



6.6 Equilibrio y estabilidad

Ecuaciones diferenciales autónomas

En muchas ocasiones, un sistema (físico, biológico,...), se representa mediante una ecuación de la forma:

$$y' = f(y) \tag{6.10}$$

donde f es una función dada que sólo depende de y, es decir, **en la que no aparece explícitamente la variable independiente t**. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales autónomas**.

Para entender lo que significa que una ecuación sea autónoma, supongamos un modelo simple de crecimiento: supongamos que el número de bacterias en un cultivo viene dado por una solución de la ecuación:

$$y' = 2y \tag{6.11}$$

siendo y una función que depende de la variable independiente t (que no aparece explícitamente), que representa el tiempo medido en horas. La solución general de esta ecuación es

$$y(t) = C\,e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R} \tag{6.12}$$

y la constante C se podrá determinar si se conoce el tamaño de la población de bacterias en algún instante t.

Supongamos que se realiza un experimento comenzando con una población de 100 bacterias en el instante $t = 0$. Entonces la solución que nos interesa es que cumple la condición inicial $y(0) = 100$. Para obtener su expresión, sustituimos en la solución general y hallamos el valor adecuado de la constante arbitraria C:

$$100 = y(0) = Ce^0 \;\Leftrightarrow\; C = 100, \qquad \text{de donde la solución es} \quad y(t) = 100\,e^{2t}$$

Esta solución nos dice que, por ejemplo, 4 horas después de comenzar el experimento, en número de bacterias presentes en el cultivo habrá aumentado hasta

$$y(4) = 100\,e^8 \approx 298100$$

Supongamos ahora que repetimos el mismo experimento, pero 10 horas después, de manera que ahora la condición inicial será $y(10) = 100$. Sustituyendo en la solución general encontraremos:

$$100 = y(10) = Ce^{20} \;\Leftrightarrow\; C = \frac{100}{e^{20}} \approx 0.20612 \times 10^{-6} = 0.00000020612,$$

de donde la solución es

$$y(t) = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{2t}$$

El número de bacterias presentes en el cultivo 4 horas después de empezar este segundo experimento será:

$$y(10+4) = y(14) = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{2\times 14} = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{28} \approx 298100$$

es decir, la misma cantidad que en el caso del primer experimento.

Esto significa que la evolución del sistema que se estudia no depende del momento en que se realiza el experimento. Sólo depende del número de bacterias inicialmente existentes.

Lógicamente, si la forma de evolucionar de un sistema dependiera del tiempo en que se desarrolla, no se podría modelar mediante una ecuación diferencial autónoma. Sería necesaria una dependencia temporal explícita en la ecuación.

Soluciones de equilibrio o puntos fijos

Definición 6.21 (Solución de equilibrio o punto fijo)
*Se llaman **soluciones de equilibrio** o también **puntos fijos** de la ecuación*

$$y' = f(y)$$

*a sus **soluciones constantes**. Son las funciones constantes $y = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(\alpha) = 0$$

Ejemplo 6.22
La ecuación $y' = ky$ tiene la solución de equilibrio $y = 0$.

La ecuación $y = y - 2y^2$ tiene las soluciones de equilibrio $y = 0$ e $y = \dfrac{1}{2}$.

El estudio de las soluciones de equilibrio de una ecuación diferencial tiene interés porque son soluciones "de referencia" para averiguar el comportamiento de las demás soluciones de la ecuación diferencial.

La propiedad básica de las soluciones de equilibrio es que si, inicialmente, el sistema está en un estado de equilibrio, permanecerá en dicho estado en todos los instantes posteriores (a menos que alguna fuerza externa perturbe el sistema). Por ejemplo, si inicialmente $y(0) = K$ y K es una solución de equilibrio, entonces $y(t) = K$ para todo t.

Ejemplo 6.23
Calcular los puntos fijos de la ecuación $y' = 2y - y^3$
Se tiene que $f(y) = 2y - y^3 = y(2 - y^2)$. Luego

$$f(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(2 - y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Luego los puntos fijos o soluciones de equilibrio son $y = 0$, $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$.

Estabilidad de soluciones de equilibrio

Definición 6.24 (Solución estable)
*Se dice que la solución de equilibrio $y = \alpha$ de la ecuación diferencial $y' = f(y)$ es **localmente estable** si las soluciones de la ecuación que parten de condiciones iniciales* ligeramente *distintas del equilibrio tienden a* acercarse *a la solución de equilibrio.*

*En caso contrario se dice que la solución de equilibrio es **localmente inestable**.*

Este concepto se entiende claramente con los dos ejemplos de la Figura 6.1.

El término **localmente** se refiere al comportamiento cuando se producen **pequeñas** perturbaciones, pero no se presupone nada de los que sucede cuando se producen grandes perturbaciones.

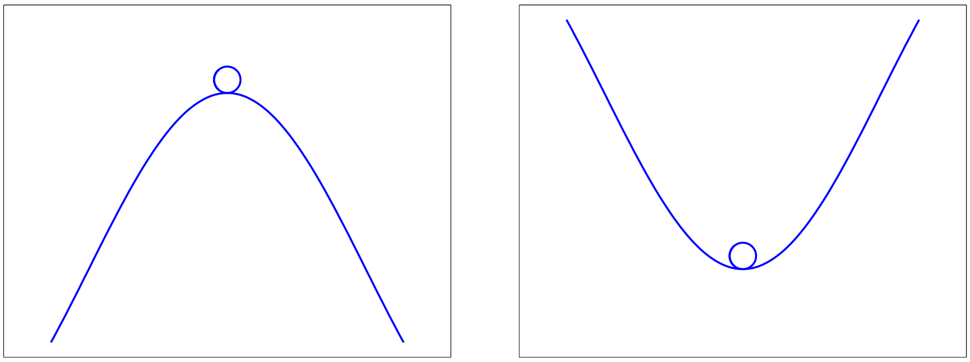


Figura 6.1: Ilustración de los dos tipos de estabilidad mediante el ejemplo de una bola en la cima de una colina y una bola en el fondo de un valle. Ambos son estados de equilibrio: la bola está en reposo. Sin embargo en el caso del valle su situación es estable, ya que una pequeña perturbación de su posición sería momentánea y la bola volvería a su posición inicial. Mientras que en el caso de la colina, la situación de la bola es inestable, ya que una pequeña perturbación de su posición haría que la bola rodase por la ladera de la colina, y sería imposible volver a la cima.

Damos, sin justificación, el siguiente criterio analítico para identificar cuándo una solución de equilibrio es localmente estable o inestable.

Criterio de estabilidad

Se considera la ecuación diferencial autónoma

$$y' = f(y),$$

donde f es una función derivable. Supongamos que $y = \alpha$ es una solución de equilibrio, es decir que $f(\alpha) = 0$. Entonces

- La solución $y = \alpha$ es **localmente estable** si $f'(\alpha) < 0$
- La solución $y = \alpha$ es **localmente inestable** si $f'(\alpha) > 0$

En el caso en que $f'(\alpha) = 0$ no se puede sacar ninguna conclusión.

Ejemplo 6.25

Estudiar la estabilidad de las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial $y' = 2y - y^3$.

Hemos visto en un ejemplo anterior que $y = 0$, $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$ son soluciones de equilibrio de esta ecuación. Para ver si son localmente estables o no aplicamos el criterio de estabilidad. Se tiene que

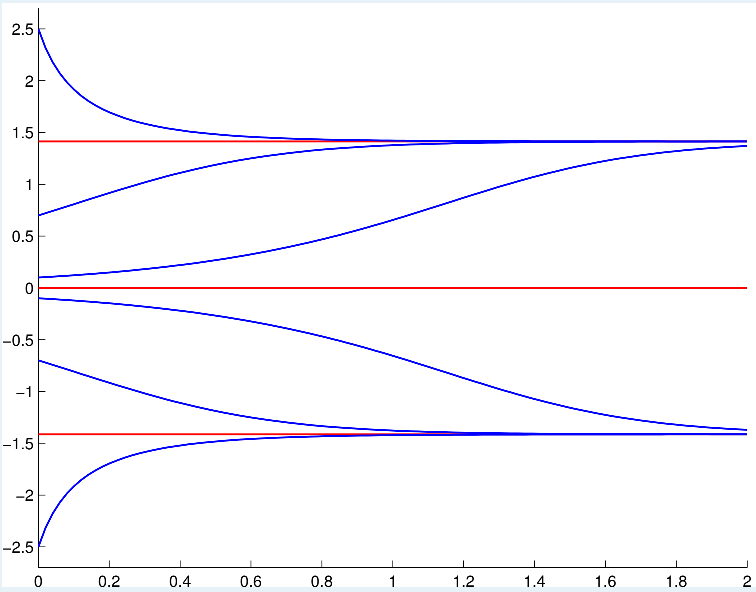
$$f'(y) = 2 - 3y^2.$$

Luego

- $f'(0) = 2 > 0 \Rightarrow y = 0$ es una solución de equilibrio localmente inestable.

- ▷ $f'(\sqrt{2}) = 2 - 3 \times 2 = -4 < 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ es localmente estable.
- ▷ $f'(-\sqrt{2}) = 2 - 3 \times 2 = -4 < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$ es localmente estable.

En la Figura se puede comprobar el comportamiento de las demás soluciones de esta ecuación diferencial con respecto a las soluciones de equilibrio: vemos que las soluciones $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$ (estables) "atraen" a otras soluciones, mientras que la solución $y = 0$ (inestable) "repele" a las otras soluciones.



6.7 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales, debido a que relacionan los valores de una función con los de su(s) derivada(s), son una herramienta fundamental en el tratamiento matemático de cualquier fenómeno dinámico, es decir, que involucre magnitudes que cambian con el tiempo (o con cualquier otra magnitud). Por ello, sus campos de aplicación son numerosos en física, química, biología, economía, ... Se presentan a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 6.26
En 1990 se arrojaron a un lago 1000 ejemplares de cierta especie de peces, de la que previamente no había ninguno. En 1997 se estimó que la cantidad de peces de esa especie que había en el lago en aquel momento era de 3000. Suponiendo que la velocidad de crecimiento de la población de peces es constante, calcular la cantidad de peces en los años 2000 y 2010.

Que la velocidad de crecimiento de la población sea constante significa que, si llamamos

$$p(t) \quad \equiv \quad \text{número de peces en el instante } t$$

se tiene que

$$p'(t) = k \qquad \text{(constante)} \tag{6.13}$$

El valor de esta constante, k, no lo conocemos, de momento, pero veremos cómo se puede deducir utilizando adecuadamente el resto de la información de que disponemos.

La ecuación (6.13) se puede resolver (dejando la constante k como un parámetro) y se tiene

$$p(t) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria} \tag{6.14}$$

Ahora tenemos dos constantes "desconocidas": k y C. Pero también tenemos dos informaciones que utilizar: sabemos que

1. $p(0) = 1000$ (inicialmente había 1000 peces)
2. $p(7) = 3000$ (7 años después había 3000 peces)

Sustituyendo estos valores en (6.14) se tiene:

$$\begin{cases} 1000 = p(0) = k \cdot 0 + C = C \Leftrightarrow C = 1000 \\ 3000 = p(7) = k \cdot 7 + C = 7k + 1000 \Leftrightarrow 7k = 2000 \Leftrightarrow k = \dfrac{2000}{7} \end{cases}$$

Con esto ya se tiene la expresión exacta de la función que nos da el número de peces que hay en el lago en cualquier instante t:

$$p(t) = \frac{2000}{7}\, t + 1000$$

y, con ella, ya se puede calcular lo que nos piden:

$$p(10) = \frac{2000}{7} \cdot 10 + 1000 = \frac{27000}{7} \approx 3857$$

$$p(20) = \frac{2000}{7} \cdot 20 + 1000 = \frac{47000}{7} \approx 6714$$

Así pues, la solución es

$$\boxed{\text{En el año 2000 había 3857 peces.}}$$

$$\boxed{\text{En el año 2010 había 6714 peces.}}$$

Ejemplo 6.27
Si el número de bacterias contenidas en 1 litro de leche se duplica en 4 horas y suponiendo que la tasa de multiplicación es constante, calcular en cuánto tiempo se hará 25 veces mayor.

Sea $y(t)$ el número de bacterias en el instante t.

Suponer que la tasa de multiplicación de la población de bacterias es constante consiste en suponer que

$$y'(t) = k \qquad k = \text{constante} \tag{6.15}$$

El valor de la constante k, que de momento es desconocido, se puede deducir a partir de la información adicional que tenemos.

Comenzamos por resolver la ecuación diferencial (6.15):

$$y(t) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria} \tag{6.16}$$

La información de que disponemos es

$$\begin{cases} y(0) = y_0 & \text{número inicial de bacterias} \\ y(4) = 2y_0 & \text{el número de bacterias se duplica en 4 horas} \end{cases}$$

Sustituimos estos datos en (6.16)

$$y_0 = y(0) = k \cdot 0 + C \Leftrightarrow C = y_0$$

$$2y_0 = y(4) = k \cdot 4 + C = 4k + y_0 \Leftrightarrow y_0 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{y_0}{4}$$

En consecuencia la función que nos da el número de bacterias en cualquier instante t es

$$y(t) = \frac{y_0}{4}\, t + y_0 = \frac{y_0}{4}(t+4)$$

siendo $y_0 =$ número inicial de bacterias.

Lo que se desea saber es en qué instante, t, el número de bacterias será igual a 25 veces el número que había inicialmente.

$$25\, y_0 = y(t) = \frac{y_0}{4}(t+4) \Leftrightarrow 100 = t + 4 \Leftrightarrow t = 100 - 4 = 96$$

Así pues, la solución es $\boxed{96 \text{ horas}}$.

6.7.1 Dinámica de poblaciones: modelo de Malthus o exponencial

El comportamiento de una población de seres vivos cuyo número de individuos varía en el tiempo puede ser matemáticamente modelada mediante ecuaciones diferenciales y constituye, de hecho, uno de los principales campos de aplicación de las Matemáticas a la Biología.

Cuando una población no está sujeta a condicionantes externos (falta de alimentos, competencia por el espacio, por los recursos, ...) su ritmo de crecimiento o decrecimiento es debido únicamente al equilibrio entre su tasa de natalidad y su tasa de mortandad: la velocidad de crecimiento de la población (o de decrecimiento, si nacen menos individuos de los que mueren) es proporcional al número de individuos que la componen.

Para expresar esto matemáticamente, denotemos

$$N = N(t) \quad \text{número de habitantes en el instante } t.$$

Entonces, la velocidad de crecimiento de la población, N'(t), verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$N' = r\,N, \tag{6.17}$$

donde r es una constante, que caracteriza la tasa de crecimiento de la población, y que usualmente se determina experimentalmente.

Si $r > 0$ la población aumentará de tamaño, por ser la velocidad de crecimiento positiva, mientras que si $r < 0$ la población disminuirá de tamaño.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $N(0) = N_0$, entonces $N(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} N' = r\,N \quad t \geq 0 \\ N(0) = N_0\,. \end{cases} \tag{6.18}$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente, ya que es de variables separables (ver la Sección 6.3):

$$\int \frac{1}{N}\,dN = \int r\,dt$$

$$\ln|N| = rt + C$$

$$N = C\,e^{r\,t}$$

e, imponiendo la condición inicial $N(0) = N_0$, se obtiene

$$N = N_0\,e^{r\,t}\,,$$

cuya gráfica, para algunos valores de r, se representa en la Figura 6.2.

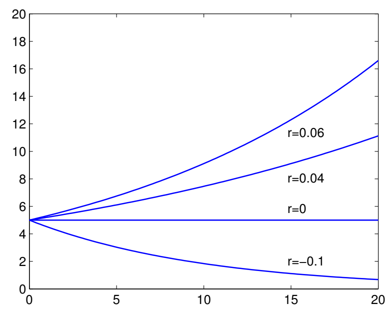


Figura 6.2: Representación gráfica de la función $N = 5\,e^{rt}$, solución de (6.18) con $N_0 = 5$, para varios valores de r.

Obsérvese que cuanto mas grande sea r, mas rápido es el crecimiento de la población, y que cuando $r < 0$ la población decrece. Para $r = 0$ el tamaño de la población permanece constante.

Este modelo de crecimiento de poblaciones recibe su nombre de Thomas Malthus (1766-1843), un clérigo y economista británico considerado el padre de la demografía. Basándose en este modelo, él dedujo que el crecimiento (exponencial) del número de seres humanos sobre la Tierra conduciría a épocas de grandes hambrunas, ya que la cantidad disponible de alimentos no aumentaría en la misma proporción que la población humana.

Este modelo de crecimiento de poblaciones es, como resulta obvio, excesivamente simple para reflejar situaciones tan complejas como la de la población humana sobre la tierra. Sin embargo, resulta útil para modelizar matemáticamente algunos experimentos controlados en laboratorio con determinadas especies de microorganismos, en sus etapas iniciales de desarrollo. Por ejemplo, si se inicia el cultivo de una pequeña colonia de bacterias sobre un sustrato rico en nutrientes, entonces las bacterias pueden crecer y reproducirse sin restricciones, al menos durante un cierto periodo de tiempo. (Un modelo más elaborado de dinámica de poblaciones, en el que se imponen restricciones al crecimiento de la población, teniendo en cuenta otros aspectos vitales, se expone en la Sección 6.7.5).

Ejemplo 6.28 (Cultivo de bacterias en laboratorio)
Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias es directamente proporcional al número de bacterias existentes. Se realiza un cultivo en laboratorio, introduciendo 2.5 millones de bacterias en un recipiente. Se observa que la población se duplica cada 3 horas. Calcular la población existente al cabo de 11 horas.

Denotemos por $P(t)$ al número de bacterias (en millones) que forman la población en el instante de tiempo t. Se comienza a medir el tiempo ($t = 0$) en el instante en que se inicia el cultivo en el laboratorio.

Según se indica en el enunciado, la tasa de crecimiento de la población (velocidad a la que crece), $P'(t)$, es directamente proporcional al número de bacterias de la población, es decir a $P(t)$, lo que significa que es de la forma $kP(t)$ para alguna constante k que, de momento, no conocemos.

Esto significa que la población considerada sigue la ley (de Malthus):

$$P' = kP \quad \text{ecuación diferencial cuyas soluciones son} \quad P(t) = C\, e^{kt}$$

Para determinar las dos constantes C y k hay que utilizar las dos informaciones dadas:

$$\begin{cases} P(0) = 2.5 \text{ (millones de bacterias)} \\ P(3) = 2 \times 2.5 = 5 \text{ (millones de bacterias)} \end{cases}$$

De la primera de ellas se tiene

$$2.5 = P(0) = C \iff P(t) = 2.5\, e^{kt}$$

y de la segunda

$$5 = P(3) = 2.5\, e^{3k} \iff e^{3k} = \frac{5}{2.5} = 2 \iff k = \frac{\ln(2)}{3} \approx 0.231.$$

Luego, finalmente, la ley seguida por la población de bacterias es

$$P(t) = 2.5\, e^{0.231\, t}.$$

El conocimiento de esta función nos permite conocer el número de bacterias que habrá en el cultivo en cualquier instante (siempre y cuando, naturalmente, el modelo siga siendo válido). Por ejemplo, para saber cuántas bacterias habrá 11 horas después de iniciar el experimento, bastará calcular

$$P(11) = 2.5\, e^{0.231 \times 11} \approx 31.75.$$

$$\boxed{\text{Al cabo de 11 horas habrá aproximadamente 31.75 millones de bacterias}}$$

Ejemplo 6.29 (Población mundial)
La población mundial en el año 1985 era de aproximadamente 4830 millones de personas y, en aquel momento, crecía a un ritmo de un 1.73 % por año. Suponiendo que el crecimiento de la población se rigiera por el modelo exponencial, calcular el valor estimado de la población mundial en el año 2010.

La ley de Malthus (o de crecimiento exponencial) dice que el número de individuos de la población en el instante t, $P(t)$, verifica la ecuación diferencial:

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{cuya solución general es} \quad P(t) = C\, e^{kt}$$

En esta expresión hay dos constantes que no se conocen (de momento): k y C. Para determinar su valor utilizaremos el resto de la información:

1. $P(1985) = 4830$ millones.
2. La población crece un 1.73 % cada año, de donde, por ejemplo, en el año 1986, la población se habría incrementado en un 1.73 % de 4830 millones, es decir

$$P(1986) = 4830 + \frac{1.73}{100}\,4830 = \left(1 + \frac{1.73}{100}\right) 4830 = 4913 \text{ millones.}$$

De ambos datos se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 4830 = P(1985) = C\,e^{1985\,k} \\ 4913 = P(1986) = C\,e^{1986\,k} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{4830}{4913} = \frac{C\,e^{1985\,k}}{C\,e^{1986\,k}} = \frac{e^{1985\,k}}{e^{1986\,k}} = e^{1985\,k} \cdot e^{-1986\,k} = e^{-k},$$

y de aquí

$$\ln\left(\frac{4830}{4913}\right) = -k \;\Leftrightarrow\; k = -\ln\left(\frac{4830}{4913}\right) \approx 0.0170$$

Ahora, una vez conocido el valor de k, se tiene:

$$4830 = P(1985) = C\,e^{0.0170\times 1985} = C\,e^{33.7450} \;\Leftrightarrow\; C = \frac{4830}{e^{33.7450}} \approx 1.0683\times 10^{-11}$$

Así, gracias a la información proporcionada se tienen ya los valores de las constantes C y k y por tanto la expresión de $P(t)$:

$$P(t) = 1.0683\times 10^{-11}\,e^{0.0170\,t}$$

Utilizando esta expresión se deduciría que el número de seres humanos en la tierra en el año 2010 sería:

$$P(2010) = 1.0683\times 10^{-11}\,e^{0.0170\times 2010} \approx 7388 \text{ millones de personas}$$

(la población real en el año 2010 era de 6972 millones de personas).

Observación: este ejercicio también se puede hacer (y, de hecho, los cálculos son más fáciles) situando el origen, $t = 0$, de la variable independiente en el año 1985, de modo que el año 1986 correspondería a $t = 1$ y el año 2010 correspondería a $t = 25$. Entonces tendríamos la información $P(0) = 4830$ y $P(1) = 4913$ y lo que se desea es calcular $P(25)$.

6.7.2 Desintegración radiactiva

Los núcleos de determinados elementos químicos (radiactivos) se desintegran, transformándose en otros y emitiendo radiaciones. Se sabe que la velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva (es decir, el número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo) en un instante dado es proporcional al número de átomos de dicha sustancia existentes en ese instante. En consecuencia, si se denota por $A(t)$ el número de átomos de la sustancia original presentes en el instante t, se puede escribir:

$$A'(t) = -\lambda A(t), \tag{6.19}$$

donde el signo menos se debe a que la velocidad es negativa (el número de átomos disminuye) y la constante de proporcionalidad, $\lambda > 0$, se llama constante de descomposición o de decaimiento, y es propia de cada sustancia radiactiva. Esta ecuación se conoce con el nombre de **ley de decaimiento exponencial** porque, como se verá a continuación, sus soluciones son exponenciales decrecientes.

Si se conoce el número de átomos presentes en un instante dado, por ejemplo se sabe que en $t = 0$ es $A(0) = A_0$, y se conoce también la constante de decaimiento, λ, entonces se puede predecir el número de átomos presentes en cualquier instante posterior, ya que $A(t)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = -\lambda A \quad t \geq 0, \\ A(0) = A_0 \, . \end{array} \right. \tag{6.20}$$

La ecuación en (6.20) es de variables separables, como la del ejemplo anterior, y la solución del problema de valor inicial viene dada por la exponencial decreciente:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \, ,$$

cuya gráfica, para algunos valores de λ, se representa en la Figura 6.3. Obsérvese que cuanto mas grande sea λ, mas rápidamente se desintegra la sustancia.

Obsérvese también que, para conocer el valor del coeficiente λ de una sustancia determinada, basta conocer el valor de $A(t)$ en dos instantes distintos.

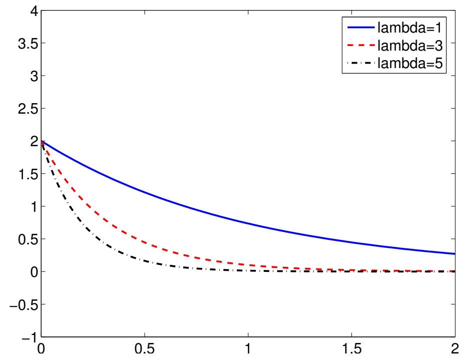


Figura 6.3: Representación gráfica de la función $A = 2e^{-\lambda t}$, solución de (6.20) con $A_0 = 2$, para varios valores de λ.

Por ejemplo, sabiendo que $A(0) = A_0$ y $A(t_1) = A_1$, se tiene, por un lado $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, $\forall \, t \geq 0$, y por el otro:

$$A(t_1) = A_0 e^{-\lambda t_1} = A_1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t_1} = \frac{A_1}{A_0} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t_1 = \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) \, .$$

Vida media

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda una cierta cantidad de dicha sustancia en **desintegrarse a la mitad**. Es distinta para cada sustancia. Por ejemplo, el Carbono-14, C_{14}, tiene una vida media de 5730 años, lo que significa que una cantidad cualquiera se reduce, al cabo de ese tiempo, a la mitad. La otra mitad se habrá convertido en otras sustancias.

La vida media sólo depende de la constante de descomposición λ, y no depende de la cantidad de sustancia presente inicialmente, A_0 .

En efecto, sea V_m la vida media de una sustancia radiactiva. Puesto que

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \, ,$$

y que en el tiempo $t = V_m$ los valores de A serán $A(V_m) = A_0/2$, se deduce que

$$\frac{A_0}{2} = A(V_m) = A_0 e^{-\lambda V_m} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda V_m} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda V_m} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda V_m = \ln(2).$$

Por lo tanto, la vida media para un elemento radiactivo es:

$$V_m = \frac{1}{\lambda}\ln(2). \tag{6.21}$$

Datación por radiocarbono

Es una técnica para determinar la edad de objetos fabricados con sustancias orgánicas que está basada en la ley de decaimiento exponencial (6.20) considerada anteriormente.

El Carbono-14 es producido de forma continua en la atmósfera, como consecuencia del bombardeo de los átomos de nitrógeno, contenidos en el aire, por neutrones cósmicos. Este Carbono-14 se combina con el Oxígeno para formar el dióxido de carbono (CO_2), asimilado por las plantas que, a su vez, son ingeridas por los animales.

Los átomos de Carbono-14 presentes en los seres vivos están constantemente desintegrándose, pero, simultáneamente, son reemplazados por nuevos átomos a un ritmo constante, de modo que el porcentaje de Carbono-14 en la atmósfera y en los animales y plantas se mantiene constante, aunque su cantidad varía de unos seres vivos a otros.

Cuando una planta o animal muere, cesa la asimilación de Carbono-14 del exterior mientras que el que contiene su organismo sigue desintegrándose. Como resultado, la cantidad de Carbono-14 en el organismo comienza a disminuir.

La cantidad de C_{14} que había en un objeto cuando fue fabricado es conocida si se sabe con qué material fue hecho (por ejemplo, madera de pino, tela de lino, papiro, ...).

La técnica llamada del C_{14}, para datar un objeto consiste en medir la cantidad de C_{14} que queda en la actualidad en dicho objeto, y utilizar la forma de las soluciones de la ecuación de decaimiento radiactivo para calcular el tiempo que ha pasado.

Por ejemplo, la técnica de C_{14} se utilizó en el año 1988 para estimar la edad del Sudario de Turín, tela de lino hallada en 1356 que muestra la imagen de un hombre que presenta marcas y traumas físicos (ver la Figura 6.4), y de la que se pensaba que podría ser la tela que cubría a Jesús de Nazaret en el sepulcro, llamada también Sábana Santa.

Se observó que las fibras del tejido contenían entre un 92 % y un 93 % del nivel inicial de C_{14}.

Figura 6.4: Sudario de Turín.

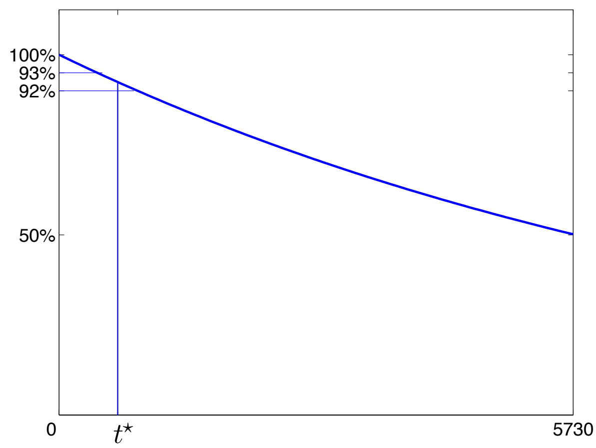


Figura 6.5: Curva de decaimiento del C_{14}.

Teniendo en cuenta que las soluciones de (6.20) son decrecientes, el tiempo transcurrido desde que el Sudario fue confeccionado hasta la fecha de 1988 debería ser un valor $t^\star$ que verifique

$$0.93A_0 \geq A(t^\star) \geq 0.92A_0$$

o, lo que es lo mismo,

$$0.93 \geq \frac{A(t^\star)}{A_0} \geq 0.92.$$

De la expresión de las soluciones se tiene

$$\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0,$$

luego se busca $t^\star$ tal que

$$0.93 \geq e^{-\lambda t^\star} \geq 0.92 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(0.93) \geq -\lambda t^\star \geq \ln(0.92) \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln(0.93) \leq \lambda t^\star \leq -\ln(0.92)$$

es decir, puesto que λ es positiva,

$$-\frac{\ln(0.93)}{\lambda} \leq t^\star \leq -\frac{\ln(0.92)}{\lambda}.$$

La constante de desintegración, λ, del C_{14} vale (ver (6.21))

$$\lambda = \frac{1}{V_m}\ln(2) = \frac{1}{5730} \cdot 0.6931 \approx 0.000121,$$

por consiguiente, se tiene

$$599 \approx -\frac{\ln(0.93)}{\lambda} \leq t^\star \leq -\frac{\ln(0.92)}{\lambda} \approx 689.$$

Este resultado indica que el Sudario fue fabricado entre 689 y 599 años antes del momento en que fueron realizadas las pruebas, en el año de 1988. Es decir, mucho después de la época en que vivió Jesús. Lo que probó que no podía ser la Sábana Santa.

6.7.3 Ley de enfriamiento de Newton

En determinadas condiciones, la velocidad a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del ambiente que lo rodea y su propia temperatura. Si se denota por $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t, la ley anterior se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$T'(t) = k(M - T(t)), \tag{6.22}$$

donde M es la temperatura del medio (que se supone constante) y k es la constante de proporcionalidad, propia del objeto.

Si en el instante inicial, $t = 0$, la temperatura toma el valor T_0, entonces la temperatura del objeto en cualquier instante posterior $T(t)$, viene dada por la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} T' = k(M - T), \\ T(0) = T_0 \,. \end{cases} \tag{6.23}$$

Esta ecuación es de variables separables y su solución general es

$$T(t) = M + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

La solución particular que verifica $T(0) = T_0$ es

$$T(t) = M + (T_0 - M)e^{-kt}.$$

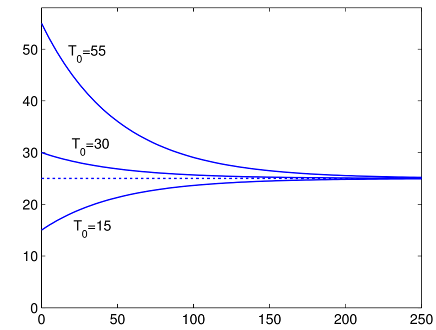


Figura 6.6: Representación gráfica de la solución de (6.23), para $M = 25$, $k = 0.02$ y varios valores del dato inicial T_0.

En la Figura 6.6 están representadas las soluciones del problema (6.23) para diversos valores del dato inicial T_0. Obsérvese que, como es obvio intuitivamente, la temperatura del objeto varía más rápidamente cuanto mayor es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del medio.

Por otro lado, sea cual sea su temperatura inicial, la temperatura del objeto tiende, cuando pasa el tiempo, a igualarse con la temperatura del medio: todas las soluciones tienen una asíntota horizontal en $T = M$.

Ejemplo 6.30 (Ley de enfriamiento de Newton)
Un recipiente con agua hirviendo ($100°$C) se retira del fuego en el instante $t = 0$ y se deja enfriar en una habitación grande que se encuentra a una temperatura constante de $20°$C. Sabiendo que pasados 5 minutos la temperatura del agua se ha enfriado hasta $80°$C:

(a) Determinar la constante de proporcionalidad k.

(b) Determinar el tiempo que tardará el agua del recipiente en descender hasta una temperatura de $30°$C.

(a) Sea $y = y(t)$ la temperatura del agua (en grados Celsius) en el instante de tiempo t (medido en minutos). Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura del objeto sigue la ley

$$y' = k(20 - y),$$

donde k es una constante propia del objeto.

Comenzamos observando que esta ecuación tiene la solución trivial $y = 20$ (constante).

La ecuación es de variables separables y se integra fácilmente:

$$\int \frac{1}{20 - y}\, dy = k \int dt \;\Leftrightarrow\; -\ln|20 - y| = kt + C \;\Leftrightarrow\; y = 20 - C\, e^{-kt}.$$

La solución trivial $y = 0$ está contenida en esta familia para el valor de $C = 0$.

En la expresión de y hay 2 constantes que determinar: k y C. Para determinarlas disponemos de 2 datos:

$$y(0) = 100 \quad \text{e} \quad y(5) = 80$$

▷ De $100 = y(0) = 20 - C$ se tiene que $C = -80$

▷ De $80 = y(5) = 20 + 80\,e^{-5k}$ se tiene

$$\frac{80-20}{80} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} = e^{-5k} \Leftrightarrow -5k = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \boxed{k \approx 0.0575}$$

En consecuencia, la función que da la temperatura del agua es:

$$\boxed{y(t) = 20 + 80\,e^{-0.0575\,t}}$$

(b) Se trata ahora de averiguar para qué valor de t alcanza $y(t)$ (descendiendo) el valor 30°C. Es decir, para qué valor de t se tiene

$$30 = 20 + 80\,e^{-0.0575\,t}$$

Operando en esta ecuación se tiene

$$\frac{30-20}{80} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = e^{-0.0575\,t} \Leftrightarrow -0.0575\,t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow t = \frac{-1}{0.0575}\ln\left(\frac{1}{8}\right) \approx 36.1642$$

Es decir, $\boxed{\text{aproximadamente 36 minutos}}$.

Ejemplo 6.31 (Ley de enfriamiento de Newton)
Un cadáver es encontrado en una nave industrial que está a una temperatura constante de 20°C. En el momento de ser encontrado, la temperatura del cadáver es de 35°C. Al cabo de una hora su temperatura ha descendido a 34°C. Suponiendo que en el momento de la muerte la temperatura del cuerpo era de 37°C, y que se cumple la Ley de Enfriamiento de Newton, calcular a qué hora se produjo la muerte.

Denotamos por $T = T(t)$ la temperatura del cadáver en el instante t, comenzando a contar el tiempo en el momento del crimen. Puesto que sigue la ley de Newton y en el momento inicial ($t = 0$) era de 37°C, la función $T(t)$ es la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\text{(P)} \left\{ \begin{array}{l} T' = k(M - T) = k(20 - T) \\ T(0) = 37 \end{array} \right.$$

La solución general de la anterior ecuación es (véase el Ejemplo 6.30) $T(t) = 20 - C\,e^{-kt}$. La solución trivial $T = 20$ está incluída para $C = 0$.

Lo que queremos saber es el tiempo pasado desde el momento de la muerte hasta que se encontró el cadaver. Si situamos el momento de la muerte en el instante $t = 0$, y denotamos por $\tilde{t}$ al instante (desconocido de momento) en que se encontró el cadaver, la información que tenemos es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0) = 37 \\ T(\tilde{t}) = 35 \\ T(\tilde{t}+1) = 34 \end{array} \right.$$

Con estos 3 datos debemos ser capaces de encontrar los valores de k, de C y de $\tilde{t}$.

$$37 = T(0) = 20 - C \Leftrightarrow C = 20 - 37 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{C = -17}$$

$$35 = T(\tilde{t}) = 20 + 17\,e^{-k\tilde{t}} \Leftrightarrow e^{-k\tilde{t}} = \frac{35-20}{17} = \frac{15}{17}$$

$$34 = T(\tilde{t}+1) = 20 + 17\,e^{-k(\tilde{t}+1)} = 20 + 17\,e^{-k\tilde{t}}\,e^{-k} = 20 + 17\,\frac{15}{17}\,e^{-k} = 20 + 15\,e^{-k} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{34-20}{15} = \frac{14}{15}$$

De la última igualdad se tiene que

$$-k = \ln\left(\frac{14}{15}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k = -\ln\left(\frac{14}{15}\right) \approx 0.0690}$$

Una vez conocido el valor de k, de la igualdad $\quad e^{-k\tilde{t}} = \dfrac{15}{17} \quad$ se puede despejar $\tilde{t}$ tomando logaritmos en ambos miembros:

$$e^{-k\tilde{t}} = \frac{15}{17} \;\Leftrightarrow\; -k\tilde{t} = \ln\left(\frac{15}{17}\right) \;\Leftrightarrow\; \tilde{t} = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{15}{17}\right) \;\Leftrightarrow\; \tilde{t} \approx 1.8141 \text{ horas } \approx \boxed{1 \text{ hora } 49 \text{ minutos}}$$

Así pues, el cadáver fué encontrado 1 hora y 49 minutos después de su muerte.

6.7.4 Dinámica de crecimiento de un individuo: modelo de Bertalanffy.

En los años 50 del siglo XX, el biólogo austriaco L. von Bertalanffy (1901-1972) desarrolló un modelo matemático para la talla de un individuo en función de su edad, que se utiliza con frecuencia para predecir el tamaño de los peces.

Sea $L(t)$ la longitud del individuo en la edad t y sea A la talla máxima de la especie, es decir la talla máxima alcanzable por un pez adulto.

La ley de crecimiento de este modelo dice que la velocidad de crecimiento es proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima:

$$L'(t) = k(A - L(t)),$$

siendo $k > 0$, la constante de proporcionalidad, propia de cada especie.

Si en el instante inicial, $t = 0$, la longitud del individuo es $0 < L_0 < A$, entonces la función $L(t)$, talla en el instante t, será solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} L' = k(A - L) \\ L(0) = L_0 \,. \end{cases} \tag{6.24}$$

Como la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima alcanzable disminuye con el tiempo, la velocidad de crecimiento disminuye también con el tiempo, lo que implica que los ejemplares de menor edad crecen a mayor velocidad que los de mayor edad. En este modelo, la velocidad de crecimiento es siempre positiva. Esto significa que los peces crecen durante toda su vida, que es lo que ocurre en la realidad.

La ecuación diferencial de (6.24) se puede integrar fácilmente, ya que es de variables separables:

$$\int \frac{dL}{A-L} = \int k\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln|A-L| = kt + C \quad \Longleftrightarrow \quad A - L = Ce^{-kt}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$L = A + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ arbitraria.}$$

Imponiendo la condición inicial, $L(0) = L_0$, se tiene finalmente la solución del problema (6.24)

$$L_0 = L(0) = A + Ce^0 = A + C \quad \Longleftrightarrow \quad C = L_0 - A \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L(t) = A + (L_0 - A)e^{-kt}}.$$

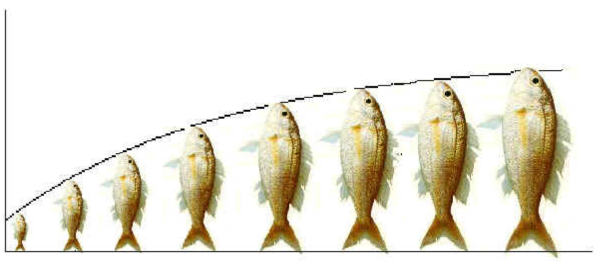


Figura 6.7: Modelo de Bertalanffy.

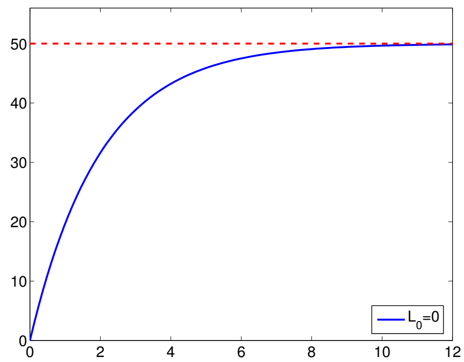


Figura 6.8: Representación gráfica de la solución de (6.24), para $A = 50$, $k = 0.5$ y $L_0 = 0$.

En la Figura 6.8 está representada la solución del problema (6.24) para $A = 50$, $k = 0.5$ y $L_0 = 0$.

Obsérvese que la recta horizontal $L = A$ es una asíntota horizontal de la solución, es decir,

$$\lim_{t \to +\infty} L(t) = A,$$

lo que expresa matemáticamente el hecho de que la talla de los peces tiende, cuando pasa el tiempo, a aproximarse al valor A, pero sin nunca alcanzarlo.

Por ello se puede decir que A es la **longitud asintótica** de la especie.

Ejemplo 6.32 (Modelo de Bertalanffy)
Sea $L(t)$ la longitud (en centímetros) de un pez en el tiempo t, medido en meses. Se supone que el pez crece de acuerdo con la siguiente ley (de von Bertalanffy):

$$\begin{cases} L' = k(34 - L) \\ L(0) = 2. \end{cases}$$

(a) Sabiendo que a la edad de 4 meses, el pez mide 10 centímetros, determinar la constante de crecimiento k.

(b) Calcular la longitud del pez a los 10 meses.

(c) Calcular $\lim_{t\to\infty} L(t)$ y dar una interpretación del resultado en el marco de la dinámica del crecimiento del pez.

La solución del problema de valor inicial se calcula fácilmente por ser la ecuación de variables separables:

$$L' = k(34 - L) \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{34 - L}\, dL = k \int dt \;\Leftrightarrow\; -\ln|34 - L| = kt + C$$

de donde se tiene $L = 34 - Ce^{-kt}$ e, imponiendo la condición inicial $L(0) = 2$, se encuentra el valor de la constante $C = 32$.
Luego la longitud del pez viene dada por

$$L(t) = 34 - 32\, e^{-kt}.$$

Para determinar el valor de k es necesario utilizar más información: $L(4) = 10$. Entonces,

$$10 = L(4) = 34 - 32\, e^{-4k} \;\Leftrightarrow\; e^{-4k} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; k = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0.0719.$$

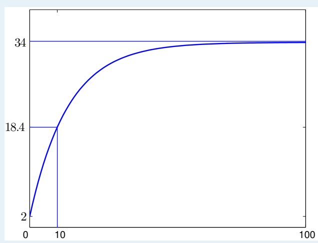
Una vez conocido el valor de k se puede calcular la longitud del pez en cualquier instante $t > 0$:

$$L(10) = 34 - 32\, e^{-10k} \approx 18.4 \text{ cm}.$$

Por último, es obvio que

$$\lim_{t\to+\infty} L(t) = \lim_{t\to+\infty} 34 - 32\, e^{-kt} = 34 - 32 \lim_{t\to+\infty} e^{-kt} = 34,$$

lo cual significa que la curva que representa la longitud del pez tiene una asíntota horizontal en $L = 34$. El pez sigue creciendo, pero cada vez a menor velocidad, y su longitud tiende a acercarse al valor 34, aunque sin nunca llegar a alcanzarlo.



6.7.5 Dinámica de poblaciones: ecuación logística

En la Sección 6.7.1, se ha considerado un modelo simple de la dinámica de poblaciones, en el que se supone que no hay limitaciones de alimentos y, por tanto la población puede crecer de manera exponencial. El modelo que se presenta ahora es un poco más complicado. En él se tiene en cuenta la existencia de circunstancias que limitan el crecimiento exponencial de la población.

En determinadas condiciones, el crecimiento de algunas poblaciones se rige por la siguiente ley, denominada **logística**:

$$p'(t) = r\,p(t) - m\,p^2(t). \tag{6.25}$$

En esta ecuación $p(t)$ representa el número de individuos de la población existentes en el instante t. El primer término de la derecha de esta ecuación $(r\,p(t))$ expresa matemáticamente el crecimiento natural de la población, debido a la reproducción: la población crece de forma proporcional al número de individuos de la misma. El segundo término $(-m\,p^2(t))$ intenta expresar el hecho de que, si los recursos (alimentos) son limitados, entonces los individuos de la población "compiten" por ellos, impidiendo un crecimiento ilimitado. Este término hace disminuir la velocidad a la que crece la población, razón por la que lleva signo menos.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $p(0) = p_0$, entonces $p = p(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} p' = r\,p - m\,p^2, \\ p(0) = p_0\,. \end{cases} \tag{6.26}$$

La ecuación (6.25) es de variables separables, luego:

$$\frac{dp}{dt} = p(r - mp) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{p(r - mp)}\,dp = \int dt.$$

Para calcular la integral de la izquierda hay que escribir el integrando como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{p(r - mp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{r - mp} \;\Leftrightarrow\; 1 = A(r - mp) + Bp \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1/r \\ B = m/r \end{cases}$$

de donde, $A = 1/r$ y $B = m/r$. Por lo tanto:

$$\int \frac{1}{p(r - mp)}\,dp = \int \left(\frac{1/r}{p} + \frac{m/r}{r - mp}\right) dp = \frac{1}{r}\int \left(\frac{1}{p} + \frac{m}{r - mp}\right) dp = \int dt.$$

Integrando, se obtiene

$$\frac{1}{r}\left(\ln|p| - \ln|r - mp|\right) = t + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ln\left|\frac{p}{r - mp}\right| = rt + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Tomando ahora exponenciales en ambos miembros de esta igualdad se tiene:

$$\frac{p}{r - mp} = C\,e^{rt} \quad \Longleftrightarrow \quad p = Cr\,e^{rt} - Cm\,e^{rt}p \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{Cr\,e^{rt}}{1 + Cm\,e^{rt}}.$$

Y de aquí, dividiendo numerador y denominador por Ce^{rt} y renombrando la constante arbitraria C, se tiene, finalmente, la expresión siguiente para la solución general de la ecuación logística:

$$p = \frac{r}{m + C\,e^{-rt}}\,.$$

Por tanto, la solución general de (6.25) es:

$$p(t) = \frac{r}{m + C\, e^{-rt}}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.} \tag{6.27}$$

Esta ecuación tiene, además, las soluciones constantes $p = \beta$, para los valores de β que anulen el segundo miembro de la ecuación diferencial, en este caso:

$$\beta(r - m\beta) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = r/m, \end{cases}$$

La solución constante $p = r/m$ está incluida en la expresión de la solución general, para el valor de $C = 0$. En cambio, la solución constante $p = 0$ no se obtiene de la expresión de la solución general para ningún valor de la constante arbitraria C: la ecuación logística tiene todas las soluciones dadas por (6.27) y, **además**, la solución constante $p = 0$.

La solución particular que verifica la condición inicial $p(0) = p_0$ se obtiene para el valor de la constante arbitraria $C = \dfrac{r - mp_0}{p_0}$ y es:

$$p(t) = \frac{r\, p_0}{mp_0 + (r - mp_0)\, e^{-rt}} .$$

Su comportamiento cualitativo puede observarse en la Figura 6.9 para varios valores de la condición inicial p_0 .

Obsérvese que, sea cual sea el número de individuos de la población inicial, esta tiende, con el tiempo, a estabilizarse en el valor constante $P = \dfrac{r}{m}$ (asíntota horizontal de $p(t)$).

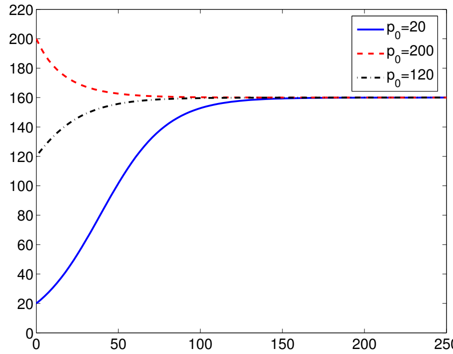


Figura 6.9: Gráfica de la solución del problema (6.26) con $r = 0.05$ y $m = 0.0003125$, para varios valores de p_0.

6.7.6 Dinámica de epidemias

Un modelo simple de propagación de epidemias se obtiene cuando se supone que la rapidez de contagio entre la población es directamente proporcional al número de individuos contagiados multiplicado por el número de individuos no contagiados. Hallar la solución general de esta ecuación.

Denotamos por $I(t)$ el número de infectados por la epidemia en el instante t y por P (constante) el número total de habitantes de la población, de forma que $P - I(t)$ es el número de individuos no infectados. El modelo establece que la velocidad de contagio $I'(t)$ es proporcional al número de infectados $I(t)$ multiplicado por el de no infectados $P - I(t)$. En consecuencia se tiene

$$I' = k\,I\,(P - I) \tag{6.28}$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Esta ecuación es de variables separables y tiene las soluciones triviales $I = 0$ e $I = P$. Para calcular las demás:

$$I' = k\,I\,(P-I) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{I(P-I)}\,\frac{dI}{dt} = k \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{I(P-I)}\,dI = k\int dt = kt + C$$

Para calcular la integral del primer miembro, que es racional, hay que escribir el integrando como una suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{I(P-I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{P-I} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} A = 1/P \\ B = 1/P \end{array}\right.$$

En consecuencia, se tiene:

$$\int \frac{1}{I(P-I)}\,dI = \int \left(\frac{1/P}{I} + \frac{1/P}{P-I}\right) dI = \frac{1}{P}\,(\ln I - \ln(P-I)) = \frac{1}{P}\,\ln\frac{I}{P-I} = kt + C$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\frac{I}{P-I} = P(kt+C) = kPt + PC = kPt + C$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{I}{P-I} = e^{kPt+C} = e^{kPt}\,e^{C} = C\,e^{kPt}$$

Operamos a continuación para despejar I en esta igualdad:

$$I = C\,e^{kPt}\,(P-I) = CPe^{kPt} - Ce^{kPt}\,I$$

$$\Leftrightarrow\; I + Ce^{kPt}\,I = I\,(1 + Ce^{kPt}) = CPe^{kPt} \;\Leftrightarrow\; I = \frac{CPe^{kPt}}{1 + Ce^{kPt}}$$

Con esto ya tenemos la expresión de la solución general de la ecuación (6.28), que es mejor escribir dividiendo numerador y denominador por Ce^{kPt}:

$$I(t) = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}}$$

La solución trivial $I = P$ está contenida en esta familia para $C = 0$. Sin embargo la solución $I = 0$ no lo está: para ningún valor que demos a la constante arbitraria C obtendremos la función $I = 0$. En consecuencia, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación es:

$$I(t) = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}} \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \text{y además } I = 0. \tag{6.29}$$

Ejemplo 6.33
En una granja de 40.000 aves hay un pollo contagiado con la gripe aviar. Si suponemos que la rapidez de contagio es directamente proporcional al número de aves contagiadas multiplicado por el número de no contagiadas, siendo la constante de proporcionalidad $k = 4 \times 10^{-5}$ (midiendo el tiempo en días), determinar en cuánto tiempo quedarían infectados un $75\,\%$ de los pollos de la granja .

Denotando por $I(t)$ el número de pollos contagiados y por P el número total de pollos de la granja (población total) se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$I' = k\,I\,(P - I)$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

En este caso, $P = 40000$ y $k = 4 \times 10^{-5} = 0.00004$ (de donde $kP = 16 \times 10^4 \times 10^{-5} = 1.6$).

Nos dicen, además, que inicialmente hay un pollo infectado, es decir, que se tiene $I(0) = 1$. En consecuencia, el problema que hay que resolver para obtener la expresión de la función que representa el número de individuos infectados en cualquier instante t es:

$$\begin{cases} I' = k\,I\,(P - I) \\ I(0) = 1 \end{cases} \tag{6.30}$$

La solución general de esta ecuación diferencial es (véase Ejemplo **??**):

$$I = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}} \quad \text{(y además } I = 0\text{)}.$$

Buscamos ahora la solución que verifica la condición inicial, $I(0) = 1$.

$$1 = I(0) = \frac{P}{1 + C} \Leftrightarrow C = P - 1 = 39999 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{la solución del problema (6.30) es } I(t) = \frac{40000}{1 + 39999\,e^{-1.6t}}}$$

Buscamos ahora el valor del tiempo $t^\star$ para el cual $I(t^\star) = 0.75\,P = 30000$. Para este $t^\star$ se tendrá

$$30000 = I(t^\star) = \frac{40000}{1 + 39999\,e^{-1.6t^\star}} \Leftrightarrow 1 + 39999\,e^{-1.6t^\star} = \frac{40000}{30000} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{-1.6t^\star} = \frac{1}{39999}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{119997} \Leftrightarrow -1.6t^\star = \ln\left(\frac{1}{119997}\right) \Leftrightarrow t^\star = -\frac{1}{1.6}\ln\left(\frac{1}{119997}\right)$$

de donde se deduce que

$$\boxed{\text{El tiempo que tarda en estar contagiados el } 75\,\% \text{ de los pollos es } t^\star \approx 7.3}$$

Ejemplo 6.34
Se sabe que la velocidad de propagación de una epidemia es proporcional al número de personas infectadas multiplicado por el número de personas no infectadas. Si denotamos por $I(t)$ el número de personas infectadas en el tiempo t, medido en días, y por P la población total, la dinámica de la infección viene dada por

$$I' = k\,I(P - I),$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de proporcionalidad. En una población de 10000 habitantes se detecta una enfermedad que afecta inicialmente a 50 personas. Al cabo de tres días, se observa que son 250 las personas afectadas. Averiguar el número de enfermos que habrá pasados 12 días.

La ecuación $I' = k\,I(P - I)$ es de variables separables y su solución es (véase (6.29)):

$$I(t) = \frac{P}{C\,e^{-kPt} + 1} \quad \text{(y además } I = 0\text{)}.$$

donde $P = 10000$. Para determinar las constantes C y k disponemos de la siguiente información:

$$I(0) = 50 \quad \text{e} \quad I(3) = 250.$$

En primer lugar,

$$50 = I(0) = \frac{P}{C+1} \Leftrightarrow C = \frac{P}{50} - 1 = 199.$$

En segundo lugar,

$$250 = I(3) = \frac{P}{199\, e^{-3kP} + 1} \Leftrightarrow 199\, e^{-3kP} + 1 = \frac{P}{250} \Leftrightarrow e^{-3kP} = \frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)$$

de donde, tomando logaritmos en ambos miembros de la igualdad se tiene

$$-3kP = \ln\left[\frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)\right] \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3P}\ln\left[\frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)\right] = \frac{0.5432}{P}.$$

En consecuencia, el número de infectados en cualquier instante $t > 0$ viene dado por

$$I(t) = \frac{P}{199 \cdot e^{-0.5432t} + 1} = \frac{10^4}{199 \cdot e^{-0.5432t} + 1}$$

y se tiene

$$I(12) = \frac{10^4}{199 \cdot e^{-0.5432 \times 12} + 1} \approx 7730$$

$$\boxed{\text{Pasados 12 días habrá 7730 enfermos.}}$$

Ejemplo 6.35

En un campus universitario que tiene 1000 estudiantes hay un único estudiante portador del virus de la gripe. Sea $y(t)$ el número de estudiantes contagiados en el día t. Si la velocidad con la que el virus se propaga es proporcional al producto entre el número de estudiantes contagiados y el número de estudiantes no contagiados, se pide:

(a) Determinar el número de personas enfermas en el día t si se sabe que pasados 4 días hay 50 enfermos.

(b) Calcular cuándo habrá 500 estudiantes enfermos.

(c) Si los estudiantes enfermos no se tratan con medicamentos, ¿qué número de enfermos habrá cuando pase mucho tiempo? ¿Llegará a desaparecer la enfermedad?

Por lo que se indica, la función $y(t)$ = número de estudiantes contagiados en el día t es solución de la ecuación diferencial

$$y' = ky(P - y)$$

donde $P = 1000$ es el número de individuos de la población. La solución general de esta ecuación es (véase (6.29)):

$$y(t) = \frac{P}{C\, e^{-kPt} + 1} \quad (\text{y además } y = 0).$$

en cuya expresión hay dos constantes desconocidas (de momento) : k y C. Para determinarlas debemos usar el resto de la información:

De $y(0) = 1$ se tiene

$$1 = y(0) = \frac{1000}{C+1} \Leftrightarrow C + 1 = P = 1000 \Leftrightarrow C = 999$$

Por otra parte, de $y(4) = 50$ se tiene:

$$50 = y(4) = \frac{P}{C\,e^{-4kP} + 1} \;\Leftrightarrow\; 50\left(Ce^{-4kP} + 1\right) = 50\,C\,e^{-4kP} + 50 = P$$

Despejando de aquí e^{-4kP} y tomando luego logaritmos en ambos miembros:

$$e^{-4kP} = \frac{P-50}{50C} \;\Leftrightarrow\; \ln e^{-4kP} = -4kP = \ln\frac{P-50}{50C}$$

$$\Leftrightarrow\; -kP = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{P-50}{50C}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{950}{49950}\right) \approx -0.9906$$

Así pues,

$$\boxed{\text{El número de personas enfermas el día } t \text{ es } y(t) = \frac{1000}{999\,e^{-0.9906\,t} + 1}}$$

Para saber cuándo habrá 500 estudiantes enfermos tenemos que calcular para qué valor de t se tiene

$$\frac{1000}{999\,e^{-0.9906\,t}+1} = 500 \;\Leftrightarrow\; 2 = 999\,e^{-0.9906\,t} + 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-0.9906\,t} = \frac{1}{999} \;\Leftrightarrow\; -0.9906\,t = \ln\left(\frac{1}{999}\right)$$

$$\Leftrightarrow\; t = -\frac{1}{0.9906}\ln\left(\frac{1}{999}\right) \approx 6.9723$$

Por último, puesto que

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{P}{C\,e^{-kPt}+1} = P$$

resulta obvio que esta ley conduce a que, a la larga, la población entera resulta infectada.

6.7.7 Problemas de mezclas

En esta sección se estudian ciertas ecuaciones diferenciales que aparecen en problemas en los que se mezclan dos fluidos.

Más concretamente, se considera un recipiente que contiene una cantidad de V litros de cierto fluido, en el que se encuentra disuelta una cantidad, x_0, de cierta sustancia. En el recipiente entra constantemente fluido con una concentración de c_e gramos por litro y a una velocidad de v_e litros por minuto. Se supone que los fluidos en el recipiente se mezclan de forma instantánea y que la mezcla sale del recipiente a una velocidad de v_s litros por minuto.

Lo que se desea es determinar una función que indique la cantidad de sustancia que hay en el interior del recipiente en cada instante, t.

Llamemos $v(t)$ a la cantidad de fluido (litros) presente en el recipiente en el instante t, y $x(t)$ a la cantidad de sustancia disuelta (gramos) en el instante t, de forma que la concentración de sustancia disuelta en el instante t es $x(t)/v(t)$ gramos por litro.

La variación de la magnitud $x(t)$ por unidad de tiempo es $x'(t)$ y viene dada por la diferencia entre la cantidad de sustancia que entra (por unidad de tiempo) y la cantidad de sustancia que sale (por unidad de tiempo):

$$x'(t) = \boxed{\begin{array}{c}\text{Variación de } x(t)\\ \text{por unidad de tiempo}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Cantidad de sustancia que}\\ \text{entra por unidad de tiempo}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Cantidad de sustancia que}\\ \text{sale por unidad de tiempo}\end{array}}$$

Puesto que entran v_e litros por minuto, que contienen una concentración c_e gramos de sustancia por litro, se tiene que entran $c_e \cdot v_e$ gramos por minuto de sustancia.

La concentración de sustancia en el fluido que sale es la del fluido en el interior del recipiente, es decir $x(t)/v(t)$ gramos por litro. Puesto que salen v_s litros por minuto, se tiene que salen $x(t)v_s/v(t)$ gramos por minuto de la sustancia disuelta.
Así pues, la variación de la concentración, $x'(t)$, verifica:

$$x'(t) = c_e\, v_e - \frac{x(t)}{v(t)}\, v_s$$

La expresión de $v(t)$, cantidad de fluido en el recipiente en el instante t, deberá ser determinada en cada caso, ya que depende de la cantidad inicial y de las velocidades de entrada y salida del fluido en el recipiente. Si, por ejemplo, la velocidad de entrada de fluido es igual a la velocidad de salida, entonces el volumen en el interior del recipiente permanecerá constante.

Ejemplo 6.36
Un depósito contiene 100 litros de una disolución salina cuya concentración es de 2.5 gramos de sal por litro. Una disolución conteniendo 2 gramos de sal por litro entra en el depósito a razón de 5 litros por minuto y la mezcla (que se supone uniforme de forma instantánea) sale del depósito a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito.

Puesto que la velocidad a la que entra el líquido en el depósito es la misma a la que sale, en el depósito siempre hay la misma cantidad de líquido: 100 litros.

Sea $x(t)$ la cantidad de sal en el depósito en el instante t.

La variación por unidad de tiempo de la cantidad de sal en el depósito es:

$$x'(t) = \text{cantidad que entra por unidad de tiempo} - \text{cantidad que sale por unidad de tiempo}$$

En el depósito entran 5l. por minuto de una disolución con 2gr. por litro, luego entran 10gr. de sal por minuto.

Puesto que la cantidad de sal en el depósito es $x(t)$ y la cantidad de líquido que hay es 100l., la concentración de la disolución en el depósito es de $x(t)/100$ gramos por litro. Esta disolución sale a una velocidad de 5 litros por minuto, por lo tanto la sal sale a una velocidad de $5x(t)/100$ gramos por minuto.

Así pues, se tiene:

$$x' = 10 - \frac{5x}{100}$$

Esta ecuación es de variables separables:

$$x' = 10 - \frac{5x}{100} = \frac{1000 - 5x}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{1000 - 5x}\, x' = \frac{1}{100}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1000 - 5x}\, dx = \int \frac{1}{100}\, dt \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \ln|1000 - 5x| = \frac{1}{100}\, t + C$$
$$\Leftrightarrow \ln|1000 - 5x| = -\frac{5}{100}\, t + C = -\frac{1}{20}\, t + C = -0.05t + C \Leftrightarrow 1000 - 5x = C\, e^{-0.05t}$$
$$\Leftrightarrow 5x = 1000 - C\, e^{-0.05t} \Leftrightarrow x = \frac{1000 - C\, e^{-0.05t}}{5} = 200 - Ce^{-0.05t}$$

Así pues, la solución general de la ecuación diferencial es

$$x = 200 - Ce^{-0.05t}$$

Puesto que, inicialmente, la concentración de sal en el depósito era de 2.5 gramos por litro, la cantidad de sal inicial era de

$$x(0) = 2.5 \times 100 = 250$$

Sustituyendo esta condición inicial en la expresión de la solución general se tiene

$$250 = x(0) = 200 - C \Leftrightarrow C = -50$$

Luego la función que nos da la cantidad de sal en cualquier instante t es:

$$\boxed{x(t) = 200 + 50e^{-0.05t}}$$

Ejemplo 6.37
La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 cm^3/sg y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0.2 g/cm^3, se pide:

(a) ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en cada instante si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento?

(b) ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de 0.1 g/cm^3?

La cantidad de medicamento que entra en el órgano por segundo es:

$$0.2 \times 3 = 0.6 \text{ gramos}$$

Si denotamos por $x(t)$ la cantidad de medicamento presente en el órgano en el instante t se tendrá, puesto que la sangre abandona el órgano a la misma velocidad a la que entra ($3\,\text{cm}^3/\text{sg}$), que la cantidad de medicamento que abandona el órgano por segundo será de

$$3\,\frac{x(t)}{125} = \frac{3}{125}\, x(t)$$

En consecuencia, puesto que la variación por unidad de tiempo (i.e., por segundo) de la cantidad de medicamento viene dada por:

$$x'(t) = \text{cantidad que entra por segundo} - \text{cantidad que sale por segundo}$$

se tiene

$$x' = 0.6 - \frac{3}{125}\,x = \frac{75-3x}{125}$$

Esta ecuación es de variables separables:

$$\int \frac{1}{75-3x}\,dx = \frac{1}{125}\int dt \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\ln|75-3x| = \frac{t}{125}+C \;\Leftrightarrow\; \ln|75-3x| = -\frac{3t}{125}+C \;\Leftrightarrow\; 75-3x = C\,e^{-3t/125}$$

Despejando aquí x se obtiene la solución general de la ecuación:

$$x = 25 - C\,e^{-3t/125}$$

Puesto que, inicialmente, no había ninguna cantidad de medicamento en el órgano, la condición inicial para $x(t)$ es $x(0) = 0$, lo que conduce, sustituyendo, a:

$$0 = x(0) = 25 - C \;\Leftrightarrow\; C = 25$$

En consecuencia la función que nos da la cantidad de medicamento en el órgano en cada instante es

$$x(t) = 25(1 - e^{-3t/125})$$

La concentración es la cantidad de medicamento dividido por el volumen del órgano, es decir

$$x(t)/125 = \frac{25}{125}(1 - e^{-3t/125}) = \frac{1}{5}(1 - e^{-3t/125})$$

Por lo tanto, la contestación a la primera pregunta es que

$$\boxed{\text{La concentración en el instante } t \text{ es } \frac{1}{5}(1 - e^{-3t/125})}$$

Para contestar a la segunda pregunta hay que calcular para qué valor de t se verifica

$$0.1 = \frac{1}{5}(1 - e^{-3t/125}) \;\Leftrightarrow\; 0.5 - 1 = -0.5 = -e^{-3t/125} \;\Leftrightarrow\; e^{-3t/125} = 0.5 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3t}{125} = \ln 0.5$$

$$\Leftrightarrow\; \boxed{t = -\frac{125}{3}\,\ln 0.5 \approx 28.88 \text{ segundos}}$$

6.7.8 Dinámica de poblaciones: modelo presa-depredador

El caso, mucho más complicado desde el punto de vista matemático, en que hay dos especies diferentes que interaccionan, también se puede representar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por ejemplo, se considera el caso de un sistema presa-predador, es decir, de un eco-sistema con dos poblaciones de dos especies distintas, en donde una de ellas es el alimento de la otra. Se denota por $p_1(t)$ el número de individuos de la población de presas y por $p_2(t)$ el número de individuos de la población de predadores.

En determinadas condiciones, un tal sistema se comporta según la ley siguiente, llamada **sistema de Lotka-Volterra**:

$$\begin{cases} p_1'(t) = r_1 p_1(t) - d_1 p_1(t) p_2(t), \\ p_2'(t) = -r_2 p_2(t) + d_2 p_1(t) p_2(t). \end{cases}$$

Este modelo es distinto de los anteriores, ya que aquí se tiene un **sistema diferencial**, es decir un sistema, con dos incógnitas $p_1(t)$ y $p_2(t)$, de dos ecuaciones diferenciales que relacionan las incógnitas con sus derivadas y con las otras incógnitas.

El término $r_1 p_1(t)$ de la primera ecuación representa el crecimiento natural (positivo) de la población de presas, en ausencia de predadores. El correspondiente término $-r_2 p_2(t)$ de la segunda ecuación representa el crecimiento de la población de predadores en ausencia de presas, que es negativo por falta de alimento.

Los términos $-d_1 p_1(t) p_2(t)$ y $d_2 p_1(t) p_2(t)$, por su parte, tienen en cuenta la iteracción entre ambas especies, que resulta en un decrecimiento de la población de presas y un crecimiento de la población de predadores (todos los coeficientes se suponen positivos).

Si se conocen el número de presas y el de predadores en un instante dado, $t = 0$, entonces se puede predecir el número de individuos de cada especie en cualquier instante posterior, mediante la solución del correspondiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} p_1'(t) = r_1 p_1(t) - d_1 p_1(t) p_2(t), \\ p_2'(t) = -r_2 p_2(t) + d_2 p_1(t) p_2(t)). \\ p_1(0) = A \\ p_2(0) = B. \end{cases}$$

Obsérvese que se impone una condición inicial para cada incógnita, p_1 y p_2.

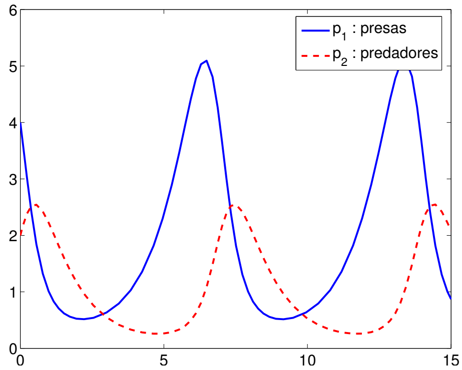


Figura 6.10: Representación de la solución del sistema de presa-predador, p_1 y p_2, sobre el intervalo temporal $[0, 10]$, para los valores de los coeficientes $r_1 = r_2 = d_1 = 1$, $d_2 = 0.5$ y de los datos iniciales $A = 4$ y $B = 2$.

6.8 Aproximación numérica de soluciones de ecuaciones diferenciales

Sólo para algunos (pocos) tipos muy especiales de ecuaciones diferenciales se dispone de fórmulas explícitas para calcular la expresión matemática de sus soluciones. Por ello, en la inmensa mayoría de los casos prácticos sólo es posible **aproximarlas**.

Los **algoritmos numéricos** de aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales proporcionan métodos para calcular **aproximaciones numéricas de los valores de dichas soluciones en algunos puntos**.

A modo simplemente orientativo, se expone aquí el más sencillo de dichos algoritmos: el **método de Euler**.

Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{6.31}$$

y se denota por $y = \varphi(t)$ su solución exacta, definida en un intervalo $I = [t_0, t_f]$.

Por ser solución de la ecuación, la función $\varphi(t)$ verifica:

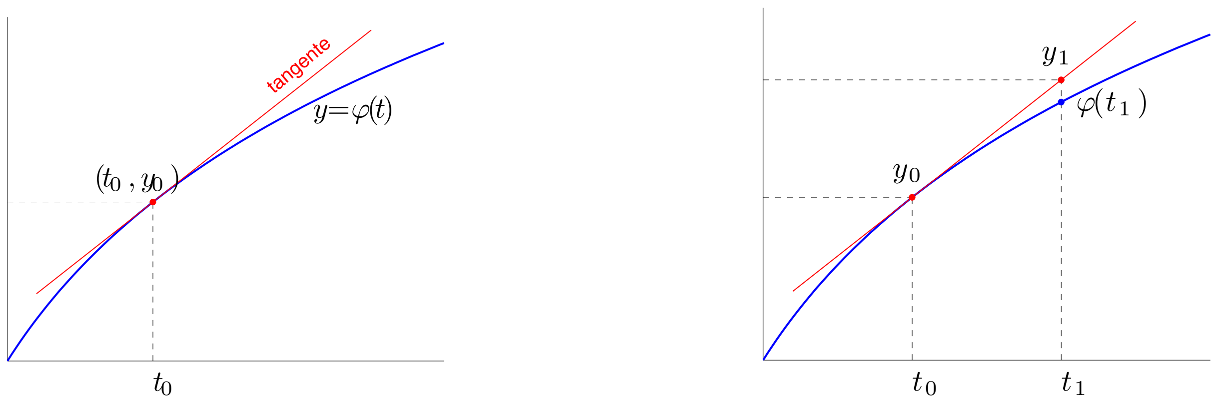
$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall\, t \in I = [t_0, t_f],$$

y, por la condición inicial, también verifica $\varphi(t_0) = y_0$ de donde se tiene:

$$\varphi'(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)) = f(t_0, y_0),$$

es decir, la pendiente a la curva $y = \varphi(t)$ en el punto (t_0, y_0) es $f(t_0, y_0)$ y por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (t_0, y_0) es

$$y = y_0 + \varphi'(t_0)\,(t - t_0) = y_0 + f(t_0, y_0)\,(t - t_0).$$



Entonces, si la distancia $t_1 - t_0$ es pequeña, se puede "asimilar" la curva $y = \varphi(t)$ con su tangente en el punto (t_0, y_0) y por lo tanto aproximar el valor $y(t_1)$ por el valor que tome, en t_1, dicha tangente, que es:

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\,(t_1 - t_0).$$

Una vez calculada una aproximación, y_1, del valor exacto $\varphi(t_1)$, para calcular una aproximación del valor de la solución $\varphi(t)$ en un punto $t_2 > t_1$, con $t_2 - t_1$ "pequeño", se reitera este procedimiento, tomando:

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\,(t_2 - t_1)$$

como aproximación del valor exacto $\varphi(t_2)$ y así sucesivamente.

Así, se pueden aproximar los valores de la solución de (6.31) en $n+1$ puntos regularmente espaciados del intervalo $[t_0, t_f]$:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_f, \quad \text{con } t_{k+1} - t_k = h = \frac{t_f - t_0}{n}, \;\; \forall\, k = 0, 1, \ldots, n-1$$

calculando los valores $\{y_k,\ \ k = 0, \ldots, n\}$ mediante la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Bajo adecuadas hipótesis de regularidad, se puede demostrar que, si h es suficientemente pequeño, este método proporciona aproximaciones razonables de los valores de la solución exacta $\varphi(t)$ en los puntos t_k de la partición.