Apuntes de la asignatura

Matemáticas Generales
Aplicadas a la Bioquímica

Grado en Bioquímica por las Universidades de Sevilla y Málaga
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

Índice

Versión: 1 de octubre de 2019

Tema 1

Revisión de instrumentos básicos

Versión: 1 de octubre de 2019

1.1 El lenguaje básico de las matemáticas

Las matemáticas se expresan mediante un lenguaje propio, que es una extensión del lenguaje común, en nuestro caso el español. La sintaxis es la misma, con la diferencia de que aparecen nuevos símbolos, además de las letras del abecedario. Tales símbolos pueden ser totalmente diferentes de las letras del abecedario: $+$, $\times$, $\geq$, $\rightarrow$, etc., pero también las propias letras: x, t, m, que toman significados diferentes (normalmente, se trata de "variables" o "incógnitas"). Los símbolos pueden representar números o cantidades físicas, pueden formular operaciones o relaciones del tipo "igual a" ó "mayor que".

Símbolos y álgebra pueden ser usados para expresar magnitudes físicas, químicas, etc.. Por ejemplo, E puede representar la energía total de un trozo de materia, m su masa y c la velocidad de la luz. Combinando estos junto con el símbolo matemático para "igual a", Einstein escribió su famosa fórmula,

$$E = mc^2.$$

En lenguaje común, esta ecuación se expresaría como "La energía total de un cuerpo es igual al producto de su masa por el cuadrado de la velocidad de la luz", lo que resulta, además de más largo, mucho más difícil de manejar conceptualmente. De aquí el gran interés en usar el lenguaje matemático cuando se trata de analizar de forma cuantitativa el comportamiento del mundo real.

Habitualmente, el camino se recorre en sentido contrario: Es necesario expresar en términos matemáticos una relación cuantitativa. Por ejemplo, podemos expresar "Juan es treinta centímetros más alto que Roberto" como

$$J = R + 30$$

siendo J la altura de Juan, y R la altura de Roberto, medidas ambas en centímetros. Observemos que al leer esta ecuación, el verbo está representado por el signo $=$. De forma más sofisticada, podemos usar una notación con subíndices:

$$H_J = H_R + 30$$

donde ahora H_J y H_R denotan, respectivamente, las alturas de Juan y Roberto (en cm). Obviamente, es un esfuerzo excesivo el expresar una frase tan sencilla en términos matemáticos. Sin embargo, cuando las relaciones se vuelven más y más complejas, la expresión de relaciones cuantitativas mediante el lenguaje común es enormemente complicada. Esto condujo de forma natural a introducir la notación matemática, mucho más simplificada y compacta. A cambio, es necesario efectuar un esfuerzo de conceptualización para entender correctamente el significado de los diferentes símbolos y relaciones.

1.2 Cantidades físicas, valores numéricos y unidades

Cuando se usan en ciencias aplicadas, los símbolos matemáticos no representan números, sino magnitudes físicas. Cada símbolo representa la combinación de un valor numérico y de una unidad física. No tiene sentido decir que una línea mide 75, sino que mide 75 cm o 75 m. Este hecho tiene varias consecuencias:

- Las ecuaciones que relacionan magnitudes físicas expresan identidades, tanto de los valores numéricos como de las unidades físicas de los dos términos de la igualdad. Por ejemplo, en la ecuación de Einstein

$$E = mc^2,$$

E es una energía, cuya magnitud es ML^2T^{-2} (o sea, masa $\times$ longitud al cuadrado / tiempo al cuadrado), m es una masa, cuya magnitud es M, y c es una velocidad, cuya magnitud es L^2T^{-2}. Esto se expresa por $[E] = ML^2T^{-2}$, $[m] = M$, $[c] = L^2T^{-2}$. Observamos cómo, efectivamente, las unidades de los dos términos de la ecuación (izquierda y derecha) son iguales a ML^2T^{-2}:

$$[E] = [mc^2] = ML^2T^{-2}.$$

Este principio de que los dos términos de la ecuación deben tener las mismas unidades se extiende a la suma y resta: solo se pueden restar o sumar magnitudes físicas con las mismas unidades.

Un ejemplo de relevancia en Bioquímica es la ecuación que describe el número de receptores ocupados en una reacción química en la que unas moléculas de una determinada sustancia, disuelta en el medio celular, se enlazan con grandes moléculas (proteínas, por ejemplo), los "receptores". Si denotamos por N_b el número de receptores ocupados por unidad de masa de tejido circundante, este varía en función de la concentración de la sustancia c, del número total de receptores por unidad de masa de tejido N_T y de la constante de afinidad química para el enlace K_a:

$$N_b = \frac{K_a c N_T}{1 + K_a c}.$$

La magnitud más clara aquí es la de la concentración, $[c] = ML^{-3}$ (o sea, masa/volumen). Para que la suma $1 + K_a c$ tenga sentido, las unidades de 1 y de $K_a c$ deben ser iguales, según hemos comentado más arriba. Por tanto, las unidades de K_a deben ser las inversas de las de c: $[K_a] = M^{-1}L^3$. Las unidades de N_b y N_T son $[N_b] = [N_T] = MM^{-1} = 1$ (Masa/Masa, ya que se trata de la masa de los receptores por unidad de masa del tejido circundante).

- El cambio de unidades implica el cambio de los valores numéricos asociados. Para cambiar las unidades, se usa el principio de que si se multiplican los dos términos de una ecuación por un mismo número la identidad sigue siendo cierta. Esto se aplica a realizar el cambio de unidades, si multiplicamos hábilmente por 1. Por ejemplo,

$$108\,\frac{\text{Km}}{\text{h}} = 108\,\frac{1000\text{m}}{1\text{Km}}\,\frac{1\text{h}}{3600\text{s}}\,\frac{\text{Km}}{\text{h}} = 108\,\frac{1000}{3600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- La representación gráfica de una función donde las variables dependiente e independiente son magnitudes físicas requiere incluir las unidades en que estas variables se expresan. De otro modo sería imposible interpretar la gráfica.

1.3 Números, aritmética y resolución de ecuaciones

Repasamos aquí algunas reglas básicas de las operaciones aritméticas con números, y los tipos de estos.

- **Números enteros, suma y resta.** Los números naturales (0, 1, 2, ...) son los que empleamos para contar, y con ellos podemos sumar sin salirnos de los propios números naturales. Si pretendemos restar, es necesario pasar a los números enteros (..., -2, -1, 0, 1, 2, ...): La diferencia de dos números enteros es siempre un número entero, y no siempre es así con los números naturales.

La solución de ecuaciones de la forma

$$a + x = b,$$

siendo a y b números enteros, siempre es un número entero $x = b - a$.

- **Números racionales, producto y división.** Podemos multiplicar números enteros y el resultado será siempre un número entero. Sin embargo, no siempre el cociente de dos números enteros es un número entero. Esta propiedad sí es cierta, sin embargo, en los números racionales ó fraccionarios: El cociente de dos números racionales siempre es un número racional. Para un científico es de enorme importancia realizar con soltura las cuatro operaciones básicas con números racionales: Suma, resta, producto y cociente.

La solución ecuaciones de la forma

$$a + cx = b,$$

siendo a, b y $c \neq 0$ números racionales, siempre es un número racional, $x = b - \dfrac{a}{c}$. Estas ecuaciones se llaman *lineales*, porque su gráfica es una línea recta.

Esta propiedad también es cierta cuando se trata de varias ecuaciones lineales simultáneas con coeficientes racionales: Por ejemplo, la solución (si existe) (x, y, z) del sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 9 \\ -3x + 2y + 3z &= 8 \\ 7x - 3y + 8z &= -4 \end{aligned}$$

pertenece a los números racionales, según la regla de Cramer.

- **Números reales, completitud.** Podemos representar los números racionales sobre una recta como segmentos (a cada número le asignamos un segmento de origen el cero, cuya longitud es el número). A pesar de existir una infinidad de números racionales entre dos números racionales cualesquiera (por ejemplo, calculando el promedio, repetido sucesivamente), la recta así construida está trufada de "agujeros". O sea, que hay "muchos" segmentos cuya longitud no es un número racional. Uno de tales agujeros es $\sqrt{2}$, un número del que ya en la Grecia clásica se demostró que no es racional[1].

  Una forma intuitiva de construir los números reales es mediante una representación decimal infinita: $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\ldots$ Este número se puede construir de forma aproximada mediante la sucesión de números $r_1 = 1.4$, $r_2 = 1.41$, $r_3 = 1.414$, $r_4 = 1.4142, \ldots$ Se demuestra que esta sucesión *converge* a $\sqrt{2}$, ó que $\sqrt{2}$ es el *límite* de esta sucesión. Esto significa que todos los términos de la sucesión a partir de uno dado están tan cerca de $\sqrt{2}$ como queramos. Se demuestra que la recta así construida es *completa* en el sentido de que no tiene agujeros, o, dicho de otro modo, en el sentido de que el límite de una sucesión de números reales siempre es un número real.

  Los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir, obteniéndose siempre un número real. Por ello, al igual que con los números racionales, la solución ecuaciones de la forma

  $$a + cx = b,$$

  siendo a, b y $c \neq 0$ números reales, siempre es un número real, $x = b - \dfrac{a}{c}$.

  El cálculo diferencial e integral, que son dos de los instrumentos fundamentales de la matemática aplicada, se basan de forma extensiva en el concepto de límite, por lo que el conjunto de números adecuado para construir estos dos tipos de cálculo es el de los reales.

- **Números complejos, solución de ecuaciones polinómicas.** Dentro de los números reales no siempre tienen solución ecuaciones de la forma $a + cx^2 = b$, siendo a, b y c números reales. Por ejemplo, la ecuación

  $$1 + x^2 = 0$$

  no tiene solución, ya que $1 + x^2 \geq 1$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$.

  Podemos, sin embargo, definir la unidad imaginaria i como la solución de esta ecuación $1 + x^2 = 0$. A partir de aquí construimos los números complejos en la forma $a + ib$, siendo a y b números reales cualesquiera.

  Los números complejos se representan en el plano como el par de números reales (a, b). Es una extensión de la representación de los números reales como segmentos en la recta.

  Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Para ello basta considerar que $i^2 = -1$, y que por tanto $i^{-1} = i$. Usando estas propiedades, podemos multiplicar por ejemplo $2 + 3i$ y $5 - 4i$ como sigue:

  $$(2 + 3i)(5 - 4i) = 10 - 12i^2 + 15i - 8i = 22 + 7i,$$

  y también podemos dividir $2 + 3i$ entre $5 - 4i$ racionalizando como sigue:

  $$\frac{2 + 3i}{5 - 4i} = \frac{(2 + 3i)(5 + 4i)}{(5 - 4i)(5 + 4i)} = \frac{-2 + 23i}{36} = -\frac{2}{36} + \frac{23}{36}i.$$

[1] La demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2 está atribuida a Hipaso de Metaponto, un discípulo de Pitágoras que nació en torno al año 500 a.C.

La representación de un número complejo como $z = a + ib$, siendo a y b números reales, es llamada *forma binómica* del número. Existe una forma alternativa, llamada *forma polar*. Para construirla, escribimos

$$z = a + ib = r(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}) = r(\operatorname{sen}\alpha + i\,\cos\alpha),$$

donde

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

es el *módulo* de z, también denotado $|z|$ y

$$\alpha = \arctan(b/a)$$

es el *argumento* de z, también denotado $\arg(z)$. El argumento es el ángulo entre la parte positiva del eje OX y el segmento que une el origen con el número z. El argumento no está definido de forma única, ya que todos los ángulos de la forma

$$\arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

poseen el mismo seno y el mismo coseno.

Es acostumbrado representar z como $z = r_\alpha$ (forma polar del número z). Por ejemplo, la forma polar del número 1 es $1 = 1_0 = 1_{2\pi}$, y la de la unidad imaginaria es $i = 1_{\pi/2}$.

El producto y cociente de números complejos en forma polar es muy simple: Si las formas polares de los números complejos z y z' son $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'}$, entonces las formas polares de su producto y su cociente son:

$$zz' = (rr')_{\alpha+\alpha'}, \quad \frac{z}{z'} = (\frac{r}{r'})_{\alpha-\alpha'}.$$

O sea,

$$|zz'| = |z||z'|, \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z'), \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad \arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z').$$

De aquí se puede calcular con comodidad la potencia n-ésima de un número complejo:

$$z^n = r^n_{n\alpha}.$$

También se pueden calcular las n raíces n-simas de un número complejo:

$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{r})_{(\alpha+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Por ejemplo, las raíces cuartas de $-1 = 1_\pi$ son

$$\sqrt[4]{-1} = 1_{\pi/4+k\pi/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Un relevante número complejo asociado a $z = a + ib$ es su *conjugado*: $\bar{z} = a - ib$. Cumple algunas propiedades interesantes:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Además, la forma polar del conjugado viene dada por

$$\bar{z} = r_{-\alpha}.$$

Un gran interés de los numéros complejos es que toda ecuación polinómica (de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$) tiene exactamente n raíces (contando la multiplicidad) en los números complejos.

Hay, sin embargo, una propiedad de los demás tipos de números (sean naturales, enteros, racionales o reales) que no poseen los números complejos: La ordenación. No se puede decidir de forma coherente cuál es el mayor de dos números complejos distintos.

En general, si estamos interesados en resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ (algo que ocurre con cierta frecuencia en las ciencias aplicadas y también en bioquímica) será necesario utilizar números complejos, aunque en muchas situaciones podemos usar solamente números reales.

1.4 Errores. Truncamiento y redondeo. Sistemas de numeración

Podemos efectuar cálculos teóricos con números reales y complejos, pero en los cálculos efectivos únicamente se usan números racionales. De este modo se introducen errores, que es necesario reconocer y limitar en la medida de lo posible.

Un error habitual es el de *truncamiento*: Los dos números $a = 3.3456$ y $b = 3.3412$ resultan ser $c = 3.34$ si los truncamos a la segunda cifra decimal. Los errores cometidos son $a - c = 0.0056$ y $b - c = 0.0012$. Sin embargo, si aproximamos a por $d = 3.35$, el error cometido es $a - d = -0.0044$, que es menor (en valor absoluto) que $a - c$. Por tanto, aproximar a por d resulta una mejor aproximación que aproximarlo por c. Esto sugiere la técnica de aproximación llamada "redondeo": La última cifra decimal retenida se deja igual si la primera cifra despreciada es menor o igual que 5, y por la siguiente si la primera cifra despreciada es mayor que 5.

La necesidad de redondeo ocurre en particular con el manejo de números por los ordenadores, que debido a su capacidad limitada trabajan solamente con un número finito de cifras decimales.

Los ordenadores, sin embargo, almacenan la información en sistema binario. Recordemos que en sistema decimal la expresión 123 representa al número $3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$, donde utilizamos las sucesivas potencias de 10. En sistema binario únicamente se usan las sucesivas potencias de 2 para representar un número. Por ejemplo, el número 123 en base 2 se representará por 1111011, ya que

$$123 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 = 1 + 2 + 8 + 16 + 32 + 64.$$

El ordenador almacena solamente ceros y unos.

Las cifras de la representación binaria (resp., decimal) de un número se obtienen dividiendo sucesivamente por 2 (resp., por 10) y reteniendo los restos, que se escriben en orden inverso para construir la representación. Por ello, solo aparecen ceros y unos (resp., los 10 dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9). El valor de cada cifra en la representación depende de la posición que ocupa, ya que la última cifra se multiplica por 1, la penúltima por 2 (resp., por 10), la antepenúltima por $2^2 = 4$ (resp., por $10^2 = 100$), etc.

Análogamente, para representar un número menor que 1 en sistema binario, es necesario multiplicarlo sucesivamente por 2 y retener las cifras a a izquierda de la coma (que serán solamente ceros o unos). Si una de estas cifras es un 1, se resta y retiene el resto para continuar el proceso. Por ejemplo, para escribir 0.8125 en sistema binario, consideramos que

$$\begin{array}{rl}
0.8125 \times 2 = 1.625 & : \text{restamos 1 y lo retenemos} \\
0.625 \times 2 = 1.25 & : \text{restamos 1 y lo retenemos} \\
0.25 \times 2 = 0.5 & : \text{retenemos el cero} \\
0.5 \times 2 = 1 & : \text{retenemos el 1 y terminamos}
\end{array}$$

De este modo, en sistema binario, 0.8125 se representa por 0.1101, lo que significa que

$$0.8125 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

Este proceso puede no tener fin, en el sentido de que la representación binaria (o decimal) de un número puede tener infinitas cifras no nulas. Más aún, puede ocurrir que la representación decimal contenga un número finito de cifras y la binaria un número infinito (pero no al revés, ya que 10 es divisible por 2). Por ejemplo, la representación binaria de $1/5 = 0.2$ es 0.000101000101000101000101.... (formada por la concatenación indefinida del grupo "000101").

Otros sistemas de numeración de cierta relevancia por sus conexiones con el código genético son el cuaternario (con base 4, utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3), el octodecimal (con base 8, utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) y el hexadecimal (con base 16, utiliza 16 dígitos, para lo que son necesarios símbolos especiales a partir del 9).

Recordemos que el valor de cada dígito en la representación de un número depende de la posición que ocupa. Es una situación análoga a la descripción del ADN mediante las letras A, T,C y G, que corresponden a las bases nitrogenadas Adenina, Tiamina, Citosina y Guanina, respectivamente. La disposición secuencial de estas cuatro bases a lo largo de la cadena es la que codifica la información genética: por ejemplo, una secuencia de ADN puede ser ATGCTAGATCGC. En este sentido, cada cadena de ADN se corresponde con un único número en sistema cuaternario.

1.5 Resolución de ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, en la que alguna de las cantidades no es conocida. Las cantidades desconocidas se llaman *incógnitas*. Cada una de las dos expresiones que se igualan se llama *miembro*. Una ecuación proporciona información sobre la o las incógnitas. Resolver la ecuación es calcular la incógnita en función de cantidades conocidas, de forma que se satisfaga la ecuación si la incógnita se reemplaza por el valor calculado. Si se trata de varias ecuaciones que deben satisfacerse al mismo tiempo, el conjunto de todas ellas se llama *sistema de ecuaciones*. Resolver el sistema de ecuaciones es calcular las incógnitas en función de cantidades conocidas, de forma que se satisfaga cada ecuación del sistema si las incógnitas se reemplazan por los valores calculados. La solución de una ecuación (o sistema de ecuaciones) puede no existir, puede existir solo una, o varias, o una infinidad. Por ejemplo,

$$3x - 2 = 7$$

es una ecuación lineal, siendo x la incógnita. Su solución es $x = 3$, ya que $3 \times 3 - 2 = 7$. También

$$x^2 - x - 6 = 0$$

es una ecuación cuadrática ó de segundo orden, que admite dos soluciones, $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$. La ecuación $x - y = 1$ admite una infinidad de soluciones, en la forma $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, $y = x-1$. Por ejemplo, $x = 0, y = -1$ son soluciones, pero también $x = 1, y = 0$ ó $x = 1000, y = 999$, etc.

El sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 3y & = & 3, \\ -x + 2y & = & -2, \end{array} \right.$$

es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (x e y) que admite solución única, $x = 0$, $y = -1$.

En una ecuación intervienen *expresiones*, que son combinaciones de símbolos, por ejemplo $1 + 4$, $2x - 3az$ ó $(x + 2)(x - 3)$. Cada una de las partes de una expresión es una sub-expresión. Por ejemplo, $2x$ y $3az$ son subexpresiones de la expresión $2x - 3az$. Si dos o más subexpresiones se suman, cada una de ellas se denomina *término* ó *sumando*. Si dos o más subexpresiones se multiplican, cada una de ellas se llama *factor*. Por ejemplo, en la expresión $(x + 2)(x - 3)$, $x + 2$ y $x - 3$ son factores.

Las reglas de la aritmética se usan para expandir o simplificar expresiones que aparecen en las ecuaciones. Por ejemplo,

- La propiedad distributiva del producto respecto de la suma permite expandir el producto $(x + 2)(x - 3)$ como
$$(x + 2)(x - 3) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6.$$
- Reduciendo a factor común, podemos simplifica la expresión $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ como sigue:
$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}.$$
- Calculando las raíces de los polinomios, podemos simplificar la expresión $\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+3x^2+2x}$:
$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3);$$
$$x^3 + 3x^2 + 2x = x(x + 1)(x + 2);$$
de donde si $x \neq 0, -1, 2$,
$$\frac{x^2+5x+6}{x^3+3x^2+2x} = \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{(x+3)}{x(x+1)} = \frac{x+3}{x^2+x},$$
Observemos que si $x = -2$ la expresión inicial no está definida, pero sí la final.

1.5.1 Manipulaciones básicas con ecuaciones

Para resolver una ecuación o sistema de ecuaciones usualmente se efectúan una serie de manipulaciones que transforman los términos de la ecuación, pero mantienen la identidad. El objetivo es aislar la incógnita (o las incógnitas), igualándola a una expresión conocida. Estas manipulaciones deben respetar las leyes de la aritmética. Las más básicas son las siguientes:

- Sumar la misma cantidad a los dos miembros de la ecuación. Para resolver
$$3x - 1 = 5, \tag{1.1}$$
sumamos 1 a los dos miembros de la ecuación, obteniendo
$$3x = 6.$$

- Multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por el mismo número, *si este no es nulo*. Para resolver la ecuación anterior, dividimos los dos miembros de la ecuación por 3, obteniendo
$$3x/3 = 6/3 \quad \Rightarrow x = 2.$$

- Elevar los dos miembros de la ecuación a un mismo número. Esta manipulación puede introducir soluciones falsas cuando se eleva a potencias mayores que 1, si no se consideran los signos. Por ejemplo, si elevamos los dos miembros de la "ecuación"
$$x = 1$$
al cuadrado, obtenemos
$$x^2 = 1,$$
que admite la solución $x = 1$, pero también la solución $x = -1$. Hay, pues, que eliminar las soluciones falsas. Por otra parte, se pueden eliminar soluciones verdaderas si se eleva a potencias menores que uno, si no se considera la multiplicidad de los radicales. Por ejemplo, podemos sacar la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuación
$$(x - 1)^2 = 4,$$
obteniendo
$$x - 1 = \sqrt{4}.$$
Si consideramos que $\sqrt{4} = 2$, obtenemos la solución $x = 3$. Pero también puede ser $\sqrt{4} = -2$ lo que proporciona la solución $x = -1$.

Usando estas tres reglas, podemos por ejemplo resolver la clásica ecuación de segundo grado. Consideremos el ejemplo
$$4x^2 - 2x + 8 = 9. \tag{1.2}$$
En primer lugar, por reducirnos a un problema canónico, restamos 9 a los dos miembros de la ecuación, obteniendo
$$4x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{1.3}$$
A continuación, buscamos un cuadrado perfecto de la forma $(ax + b)^2$ que englobe los téminos en x^2 y en x. Para ello, consideramos que
$$(ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2,$$
e igualamos $a^2x^2 = 4x^2$, $2abx = -2x$. La primera igualdad se cumple si $a = \sqrt{4} = 2$, y la segunda si $b = \dfrac{-1}{a} = \dfrac{-1}{2}$. Para obtener el cuadrado perfecto en la ecuación (1.3) sumamos $b^2 = \dfrac{1}{4}$ a los dos miembros:
$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}, \quad \text{o sea,} \quad (2x - \frac{1}{2})^2 - 1 = \frac{1}{4}.$$
En segundo lugar dejamos el cuadrado perfecto en el miembro de la izquierda, sumando 1 a los dos miembros:
$$(2x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

En tercer lugar sacamos la raíz cuadrada de los dos términos de la ecuación:

$$2x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{5/4}.$$

Por último, despejamos x sumando $\frac{1}{2}$ y dividiendo por 2 los dos miembros de la ecuación:

$$x = x_{\pm} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{5/4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}. \tag{1.4}$$

1.5.2 Sistemas lineales

La resolución de sistemas lineales es de especial utilidad en ciencias aplicadas, ya que por una parte se dan con mucha frecuencia en la práctica para determinar el funcionamiento de diversos procesos y sistemas, y por otra se saben resolver bien. Esto hace que la resolución de sistemas de ecuaciones más complejos se reduzcan por diversos procedimientos a la resolución de sistemas lineales.

Existen diversas técnicas de resolución de sistemas lineales. Si son de talla pequeña se puede abordar su resolución a mano. Sin embargo, para sistemas de mediana y gran talla (el número de ecuaciones) es preferible el uso del ordenador. Es posible la resolución simbólica de sistemas de talla mediana en ordenador (hasta una decena de ecuaciones), que sin embargo resulta inabordable en cuanto la talla supera la decena. Por ello, en estos casos se usa la resolución numérica, que permite resolver sistemas de talla muy grande (varios millones de ecuaciones), aunque es necesario resolver cada sistema con valores numéricos concretos de forma aislada.

Como hemos comentado más arriba, un sistema lineal puede o no tener solución (si la tiene, se dice que es *compatible*, y si no, *incompatible*). De tener solución, esta puede ser única (se dice que el sistema es *determinado*), o puede haber infinitas soluciones (se dice que el sistema es *indeterminado*).

Habitualmente, se escriben los sistemas lineales en notación compacta, en la forma

$$AX = B, \tag{1.5}$$

donde A es la matriz del sistema, X es un vector columna (la incógnita) y B es otro vector columna (el dato). Por ejemplo, para el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 14, \\ x - y + z & = & 2, \\ 3x + 2y + z & = & 10. \end{array} \right. \tag{1.6}$$

la matriz A y los vectores X y B vienen dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Resumimos a continuación la Teoría de Rouché-Frobenius (data de 1875) sobre la existencia y unicidad de soluciones de sistemas lineales. Se llama *menor* de orden r de la matriz A al determinante de cualquier sub-matriz cuadrada de orden r (con número de filas y de columnas igual a r). Se define el *rango* de la matriz A como el orden del mayor menor de A no nulo.

El sistema lineal (1.5) es compatible (o sea, admite solución) si el rango de la matriz A coincide con el rango de la *matriz ampliada*, $M = [A|B]$. Esto garantiza que todas las ecuaciones se pueden satisfacer a la vez, o dicho de otro modo, que no son incompatibles entre sí. Además, la solución será única (o sea, el sistema será determinado) si este rango coincide con el número de incógnitas. Esto garantiza que todas las incógnitas se pueden despejar de forma única en función de los datos. En caso contrario, existirá una infinidad de soluciones, que se obtienen despejando las incógnitas correspondientes a la mayor sub-matriz con determinante no nulo, en función de las demás.

En el caso del sistema lineal cuadrado (1.7) hay solución única si la matriz A tiene determinante no nulo, ya que entonces el rango de A y de la matriz ampliada son iguales a 3, y además este número coincide con el número de incógnitas.

Para efectuar la resolución a mano de un sistema lineal existen diversas técnicas. Según el Teorema de Rouché-Frobenius, si el sistema es compatible lo que es necesario resolver de forma efectiva para calcular la solución (o las soluciones) es un sistema cuadrado. Existen fórmulas cerradas para resolver sistemas cuadrados. Sin embargo, son difíciles de recordar, por lo que es preferible el uso de otras técnicas más sencillas e intuitivas. Recordemos aquí la técnica de Gauss o de eliminación. La idea es reducir por etapas el sistema a otro en que cada incógnita se exprese en función de las anteriores, hasta que solo quede una ecuación con una incógnita. Calculada esta incógnita, se calculan sucesivamente las demás. Por ejemplo, en el sistema (1.6),

- Comenzamos eliminando la incógnita x en la segunda y tercera ecuaciones. Para ello a la segunda ecuación le restamos la primera, y a la tercera le restamos la primera multiplicada por 3. Esto reduce el sistema a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 14, \\ -3y-2z & = & -12, \\ -4y-8z & = & -32. \end{array}\right. \tag{1.8}$$

- Nos centramos ahora en la resolución del sub-sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3y-2z & = & -12, \\ -4y-8z & = & -32, \end{array}\right. \tag{1.9}$$

  que tiene solo dos ecuaciones con dos incógnitas. Eliminamos la variable y en la tercera ecuación restando a esta ecuación la segunda multiplicada por $-4/3$. Esto reduce la última ecuación del sub-sistema (1.9) a

$$-\frac{16}{3}z=-16. \tag{1.10}$$

- El sistema de partida ha quedado reducido al sistema triangular

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 14, \\ -3y-2z & = & -12, \\ -\dfrac{16}{3}z & = & -16. \end{array}\right. \tag{1.11}$$

  Resolvemos este sistema como sigue: La última ecuación proporciona $z=3$. Sustituímos este valor en la segunda ecuación y obtenemos $y=2$, y por último sustituímos estos dos valores en la primera ecuación para obtener $x=1$.

Observemos que la matriz C del sistema reducido (1.9) es *triangular superior*,

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -16/3 \end{bmatrix},$$

con lo que su determinante es trivialmente el producto de los elementos diagonales. Si alguno de estos elementos diagonales fuera cero, el sistema sería bien incompatible, bien compatible indeterminado, ya que la matriz sería singular. Esta información se obtiene de forma automática aplicando el método de Gauss.

1.6 Resolución de inecuaciones

Otro de los problemas que se presentan con frecuencia en las ciencias aplicadas es el obtener valores de ciertas variables que satisfacen no ya una igualdad, sino una desigualdad. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se pretende mantener las variables dentro de rangos admisibles (estos valores pueden ser concentraciones, temperaturas, precios,...). Podemos pedir, por ejemplo, en lugar de la ecuación (1.1), la inecuación

$$3x-1\leq 5 \tag{1.12}$$

O, en lugar de (1.2),

$$4x^2-2x+8>9. \tag{1.13}$$

Es frecuente encontrar inecuaciones en que aparezca el valor absoluto de alguna expresión. Recordemos que el valor absoluto de un número se define por

$$|x|=\text{máx}\{-x,x\}.$$

La solución de una inecuación, en general, no es uno o varios valores aislados de la incógnita, sino un conjunto completo, frecuentemente determinado por una o varias desigualdades. Puede ser, sin embargo, que una inecuación (o un sistema de inecuaciones) no posea solución. Para resolver inecuaciones, es necesario seguir estrategias que transformen la inecuación en inecuaciones equivalentes, con el propósito de dejar aislada la (o las) incógnitas. Para ello, usamos una extensión de las reglas que hemos introducido para resolver ecuaciones:

- Sumar la misma cantidad a los dos miembros de la ecuación mantiene la desigualdad. Para resolver (1.12) sumamos 1 a los dos miembros de la ecuación, obteniendo
$$3x \leq 6. \tag{1.14}$$
- Multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por el mismo número, *si este es positivo* mantiene la desigualdad. Para resolver la ecuación anterior, dividimos los dos miembros de la ecuación por 3, obteniendo la solución de (1.12):
$$x \leq 2.$$
En cambio, multiplicar o dividir los dos miembros de la ecuación por el mismo número, *si este es negativo* cambia el sentido de la desigualdad. Por ejemplo, si queremos resolver
$$-3x \leq 6,$$
dividimos los dos miembros de la inecuación por -3, obteniendo
$$x \geq -2.$$
- Elevar los dos miembros de la inecuación al cuadrado mantiene la desigualdad, **solo si ambos miembros son positivos**.
- Para extraer raíces cuadradas, el uso del valor absoluto puede resultar de utilidad. Por ejemplo, podemos sacar la raíz cuadrada de los dos miembros de la inecuación
$$(x-1)^2 \leq 4, \tag{1.15}$$
obteniendo
$$|x-1| \leq \sqrt{4},$$
lo cual se reescribe como
$$-2 \leq x-1 \leq 2.$$
Sumando 1 ahora a cada término de la cadena de desigualdades, obtenemos la solución de la inecuación (1.15):
$$-1 \leq x \leq 3.$$

Para ejercitar estas reglas, podemos resolver la inecuación (1.13). En primer lugar, transformamos la inecuación a forma homogénea restando 9 a cada miembro:
$$4x^2 - 2x - 1 > 0. \tag{1.16}$$
Como hemos obtenido las raíces x_- y x_+ del polinomio $4x^2 - 2x - 1$ en (1.4), tenemos el polinomio factorizado como
$$4x^2 - 2x - 1 = 4(x - x_-)(x - x_+).$$
Por tanto, dividiendo por 4, la inecuación (1.16) se transforma en
$$(x - x_-)(x - x_+) > 0.$$
Para que el producto de dos números sea positivo, ambos números deben ser bien positivos, bien negativos a la vez. Por tanto, la solución de nuestra inecuación es el conjunto de los números $x \in \mathbb{R}$ que satisface
$$\text{O bien} \quad x - x_- > 0, \text{ y } x - x_+ > 0, \quad \text{o bien} \quad x - x_- < 0, \text{ y } x - x_+ < 0.$$
O sea,
$$\text{O bien} \quad x > x_-, \text{ y } x > x_+, \quad \text{o bien} \quad x < x_-, \text{ y } x < x_+.$$
Pero como $x_- < x_+$, las desigualdades anteriores proporcionan la solución de la inecuación (1.16):
$$\text{O bien} \quad x > x_+, \quad \text{o bien} \quad x < x_-.$$

1.7 Funciones polinómicas

Pasamos a continuación al repaso de las funciones más sencillas, que aparecen frecuentemente en aplicaciones de las matemáticas y, especialmente, en Bioquímica. Nuestro objetivo será conocer la definición y las propiedades básicas de las funciones consideradas. Estudiaremos especialmente los ceros, el crecimiento y decrecimiento, las posibles sigularidades y el comportamiento en el infinito. Estudiaremos también algunos aspectos de la representación gráfica de funciones: Su interpretación, y cómo usarla para resolver ecuaciones e inecuaciones.

Recordemos en primer lugar que una función es una regla que transforma números reales en números reales (también se habla de funciones de variable compleja, que no consideraremos aquí). Puede estar definida en todo o en parte de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$

está definida en todo $\mathbb{R}$, mientras que la función

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

está definida en todo $\mathbb{R}$, excepto en $x = -1$ y en $x = 1$, que son los puntos donde se anula el denominador. Se llama *dominio* de la función al conjunto de puntos en que está definida. El dominio de f es todo $\mathbb{R}$, mientras que el dominio de g es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

La funciones más sencillas de calcular son las que se construyen usando sumas y productos. Estas son las funciones polinómicas, que por esta simplicidad aparecen con frecuencia en aplicaciones de las matemáticas, y además se usan para aproximar funciones más complejas. La estructura de una función polinómica es

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los *coeficientes* a_n, $a_{n-1}, \cdots, a_1$ y a_0 son números reales dados. Es importante conocer el comportamiento de las funciones polinómicas de grado bajo, así como sus gráficas. Esto ayuda a utilizarlas de forma práctica con soltura. El caso más sencillo (aparte de las funciones constantes) son las funciones polinómicas de grado 1, o *lineales*. Se llaman así porque su gráfica es una línea recta. Su estructura es

$$f(x) = a_1 x + a_0.$$

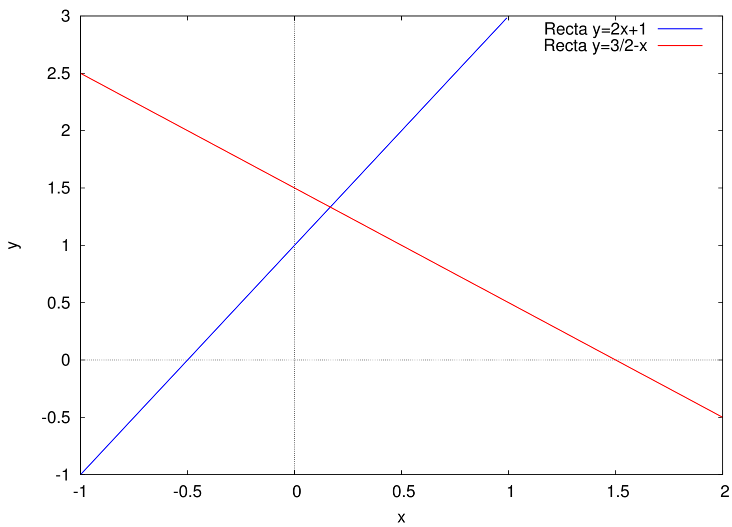


Figura 1.1: Gráficas de rectas

Los coeficientes a_1 y a_0 pueden ser interpretados geométricamente en la gráfica de la función: a_0 es la altura del corte con el eje OY (O sea, $f(0)$), y a_1 es la pendiente de la recta. La pendiente se puede calcular conociendo dos puntos de la recta:

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Un par de puntos notables para ello son los cortes con los ejes coordenados (correspondientes a $a = 0$, $f(b) = 0$): $(0, f(0))$ y $(b, 0)$. En este caso,

$$a_1 = \frac{-f(0)}{b},$$

con lo que la ecuación de la recta es

$$f(x) = -\frac{f(0)}{b}\,x + f(0).$$

En la Figura 1.1 se representa una recta con pendiente positiva y otra con pendiente negativa. Una recta corta al eje OX en un único punto $x = -\dfrac{a_0}{a_1}$ si su pendiente es no nula. Se dice que tiene un único *cero*.

La función polinómica de segundo grado

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{con} \quad a_2 \neq 0$$

se representa gráficamente como una parábola. Buscando un cuadrado perfecto, escribimos

$$f(x) = a_2(x-\alpha)^2 + \beta, \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{a_1}{2a_2}, \quad \beta = a_0 - \frac{a_2a_1^2}{4a_2^2}.$$

De aquí deducimos que la gráfica de la curva es simétrica respecto al punto $x = \alpha$ (O sea, que $f(\alpha - t) = f(\alpha + t)$, para cualquier número real t).

Deducimos además que si $a_2 > 0$ la curva alcanza su mínimo en $x = \alpha$:

$$f(\alpha) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además, en este caso los valores de f aumentan indefinidamente si x aumenta indefinidamente. Se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

También tenemos, debido a la simetría de la función,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Si $a_2 < 0$, el punto $x = \alpha$ es un máximo:

$$f(\alpha) \geq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

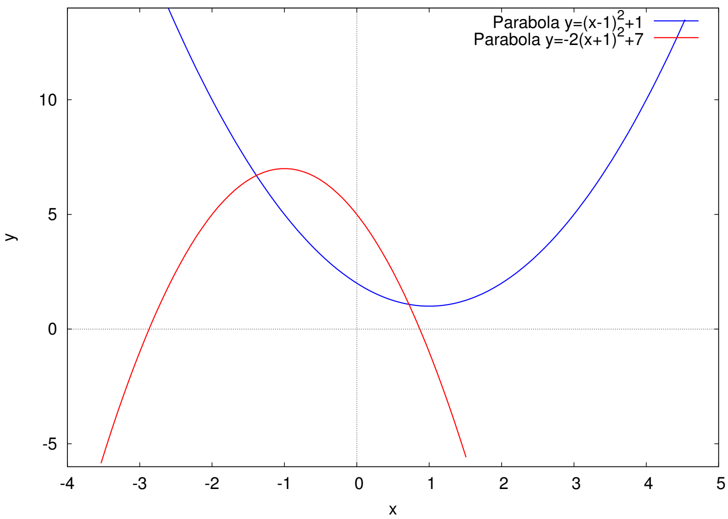


Figura 1.2: Gráficas de parábolas

Por otra parte, si $a_2 < 0$, los valores de f disminuyen indefinidamente si x aumenta indefinidamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Podemos ver estas propiedades en la Figura 1.2 en que hemos representado los dos tipos de parábolas.

Una función polinómica de grado dos puede no anularse nunca (es el caso de la curva azul en la Figura 1.2). Sin embargo, si se anula necesariamente tiene dos ceros (caso de la curva roja). Ello ocurre porque si un polinomio tiene un cero complejo, entonces el conjugado de este también es cero del polinomio. En efecto, supongamos factorizado el polinomio como

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

donde $a_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ son las raíces de f. Entonces, tomando conjugados,

$$f(x) = \overline{f(x)} = a_n(x - \overline{x_1})(x - \overline{x_2})\cdots(x - \overline{x_n}).$$

Por tanto las raíces de f son $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}$.

Esta propiedad puede usarse también para clasificar las funciones polinómicas de grado 3, ó *cúbicas*: Deben tener al menos un cero real, ya que de tener todos los ceros complejos, estos serían al menos 4 (cada cero y su conjugado). Entonces, o bien tienen exactamente un cero real, o bien tienen 3. En el primer caso admiten la factorización

$$f(x) = a_3(x - x_1)P_2(x);$$

donde x_1 es el cero real, y P_2 es un polinomio de grado 2 con dos ceros complejos conjugados, y en el segundo, admiten la factorización

$$f(x) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

donde x_1, x_2 y x_3 son los ceros reales de f. En la Figura 1.3 hemos representado una curva de cada una de estas clases. Podemos ver cómo ambas tienden a infinito (con el signo dado por a_3 y por x) cuando x tiende a infinito.

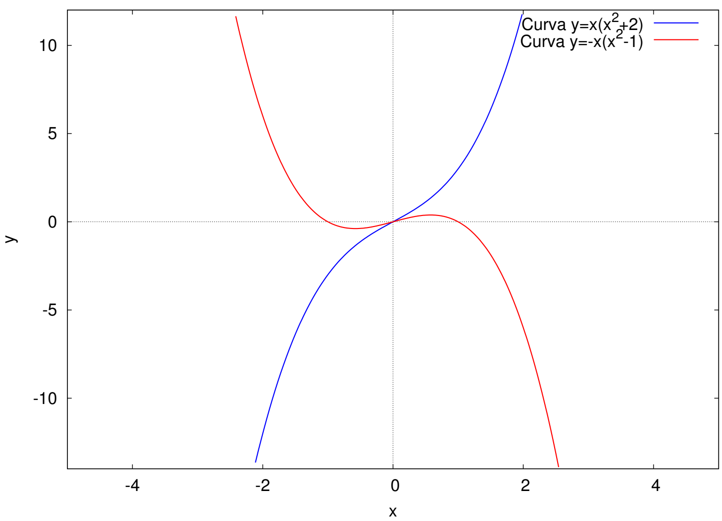


Figura 1.3: Gráficas de funciones polinómicas de tercer grado

En general, el comportamiento de una función polinómica viene determinado conociendo sus ceros. Si conocemos todos los ceros $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de $f(x)$, esta se factoriza por

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Esto permite determinar el signo de $f(x)$ y su comportamiento en el infinito. Si, por ejemplo, $a_n > 0$, entonces $f(x) > 0$ si $x > x_n$, $f(x) < 0$ si $x_{n-1} < x < x_n$, etc: f mantiene signo constante entre dos raíces, y el signo va cambiando alternativamente al incrementarse (o decrementarse) x. Por otra parte, si $a_n > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

si n es par, y

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

si n es impar. Si $a_n < 0$, entonces todos los signos se cambian por los opuestos.

1.8 Funciones racionales

Las funciones racionales son cocientes de funciones polinómicas. Se construyen, pues, añadiendo la división a la suma y el producto como operaciones para construir funciones. La estructura general de una función racional es

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. El comportamiento de una función racional viene marcado por los ceros de p y q, y por los grados de estos:

- **Dominio:** En general, el dominio de una función racional no es todo $\mathbb{R}$, ya que no está definida en los puntos en que se anula el denominador. Sin embargo, puede ser que numerador y denominador se anulen en un mismo punto. Para evitar esta ambigüedad, hay que factorizar p y q eliminando los factores correspondientes a ceros comunes. Por ejemplo, si

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad q(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x,$$

factorizamos

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3), \quad q(x) = x(x-1)(x-2)^2.$$

El dominio de f es entonces $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. La Figura 1.4 representa esta función, donde podemos observar su comportamiento general.

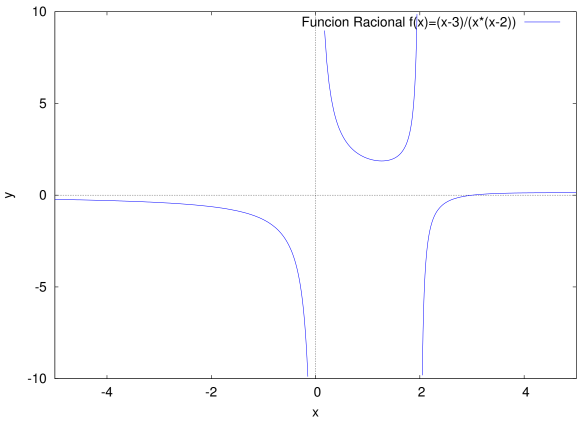


Figura 1.4: Función racional

- **Ceros:** En principio, los ceros de f son los de su numerador p, aunque hay que considerar la posibilidad de que el denominador q se anule a su vez en algún cero de p. Una vez factorizados p y q, los ceros de f son los de p. En el ejemplo anterior, el único cero de f es $x = 3$.

- **Asíntotas verticales.** En los ceros del denominador, f no está definida. Sin embargo, sí lo está en puntos arbitrariamente cercanos. Una vez simplificada f, en el entorno de un cero de q, el numerador p toma valores no nulos, por lo que $f(x)$ va a hacerse cada vez mayor (en valor absoluto) cuando x se acerque al cero. El signo de f dependerá de los signos de p y q, pero será constante entre dos ceros consecutivos de p y q. En definitiva, si a es un cero de q, y nos acercamos por la derecha a a, tenemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,$$

donde el signo $+$ ó $-$ dependerá de los signos de p y q a la derecha de a. Igualmente, si nos acercamos por la izquierda a a, tenemos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty,$$

donde ahora el signo de ∞ es el opuesto al límite anterior, ya que f a la izquierda de a tiene el signo opuesto que a la derecha.

En el ejemplo anterior, los ceros del denominador (una vez simplificada f) son $x = 0$ y $x = 2$. Vemos que $f(x) < 0$ si $2 < x < 3$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty,$$

y entonces

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty.$$

- **Comportamiento en el infinito.** En el infinito, tanto p como q crecen indefinidamente, pero el comportamiento preponderante es del que tenga mayor crecimiento, que viene dado por su grado. Para determinar el límite, lo más fácil es aplicar la regla que dice que el límite en el infinito($+$ o $-$) de un cociente de dos polinomios coincide con el límite del cociente de sus términos dominantes respectivos:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

  Si tuviéramos la fracción inversa:

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1} = +\infty$$

  Si numerador y denominador tuvieran el mismo grado, obtendríamos un límite finito. Por ejemplo:

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 + x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1} = 3$$

1.9 Funciones trigonométricas

Una gran cantidad de procesos naturales tienen naturaleza ondulatoria. Esto ocurre, por ejemplo, con las mareas oceánicas, la rotación de la Tierra o la oscilación de un péndulo. Pero es también el caso de ciertos fenómenos específicos de la Bioquímica, como es por ejemplo la transmisión de la señal eléctrica a través del axón de la neurona.

Las funciones más utilizadas para representar matemáticamente los procesos ondulatorios son las funciones trigonométricas. Esto se debe a dos razones: Son relativamente fáciles de calcular, y tienen carácter periódico. Podemos usar el seno, por ejemplo, para representar una oscilación de un péndulo, de período T. Ponemos

$$f(t) = A \operatorname{sen}(2\pi t/T),$$

donde A es la *amplitud* de la oscilación. Esta ecuación corresponde a un oscilador armónico simple. Como la función seno es periódica de período 2π, la función $f(t)$ es periódica de período T:

$$f(t + T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

El nombre de amplitud se debe a que f varía entre $-A$ y A, dado que el seno varía entre -1 y 1.

Recordemos la definición y las propiedades más importantes de las funciones seno y coseno. Ambas se construyen a partir de triángulos rectángulos (Figura 1.5):

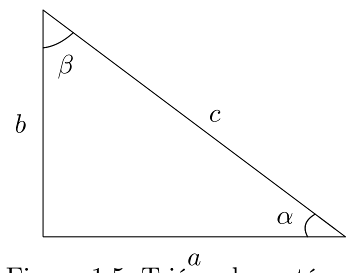


Figura 1.5: Triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Longitud cateto opuesto}}{\text{Longitud hipotenusa}} = \frac{b}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{Longitud cateto adyacente}}{\text{Longitud hipotenusa}} = \frac{a}{c}.$$

Entonces

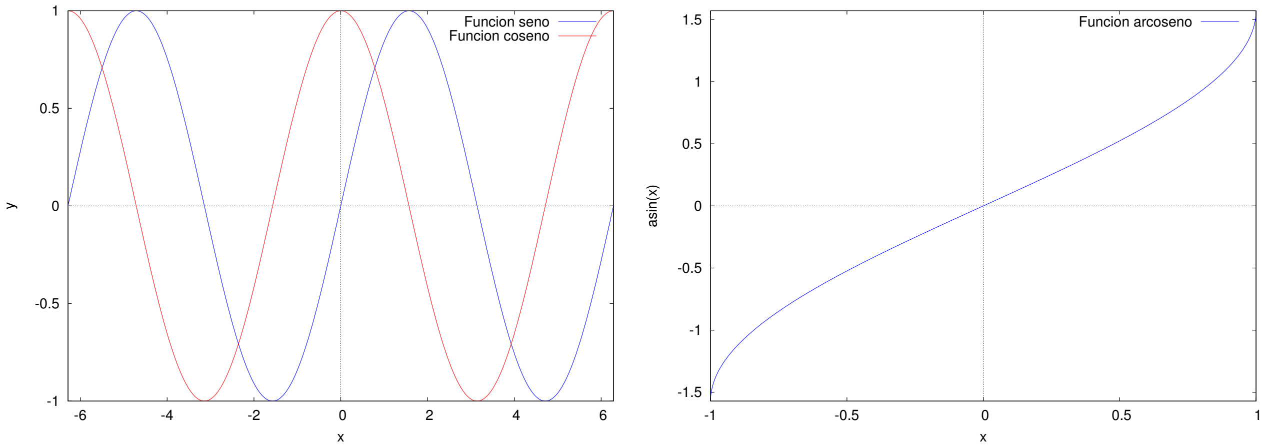
$$\operatorname{sen} \beta = \frac{a}{c}, \quad \cos \beta = \frac{b}{c}.$$

De modo que, como $\alpha + \beta = \pi/2$, deducimos

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha), \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha). \tag{1.17}$$

Por el Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, y de aquí la relación fundamental

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$



(a) Seno y coseno (b) Arcoseno

Figura 1.6: Gráficas de funciones seno, coseno y arcoseno

Ambas funciones se definen de forma natural para ángulos menores o iguales que $\pi/2$. Para $\alpha \in [-\pi/2, 0]$, se orientan los ejes horizontal y vertical, de modo que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = -\operatorname{sen}(-\alpha), \quad \cos(\alpha) = \cos(-\alpha), \quad \text{si} \quad \alpha \in [-\pi/2, 0]. \tag{1.18}$$

Tenemos así definidas seno y coseno en $[-\pi/2, \pi/2]$. Usando ahora la relación (1.17), las definimos en $[0, \pi]$. Por último, usando (1.18) las definimos en $[-\pi, 0]$.

De su definición, el seno se anula si $\alpha = 0$ o si $\alpha = \pi$, y el coseno se anula si $\alpha = -\pi/2$ ó $\alpha = \pi/2$. Ambas funciones se extienden de forma natural para ángulos mayores que π, o menores que $-\pi$, de forma periódica,

$$\operatorname{sen}(2k\pi + \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha), \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos(\alpha), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{si} \quad \alpha \in [-\pi, \pi].$$

De este modo, seno y coseno se definen sobre todo $\mathbb{R}$ como funciones periódicas de período 2π. Basta conocerlas en cualquier intervalo de longitud 2π para tenerlas determinadas en todo $\mathbb{R}$.

Las funciones seno y coseno satisfacen una serie de relaciones que resultan de utilidad, que mencionamos sin demostración:

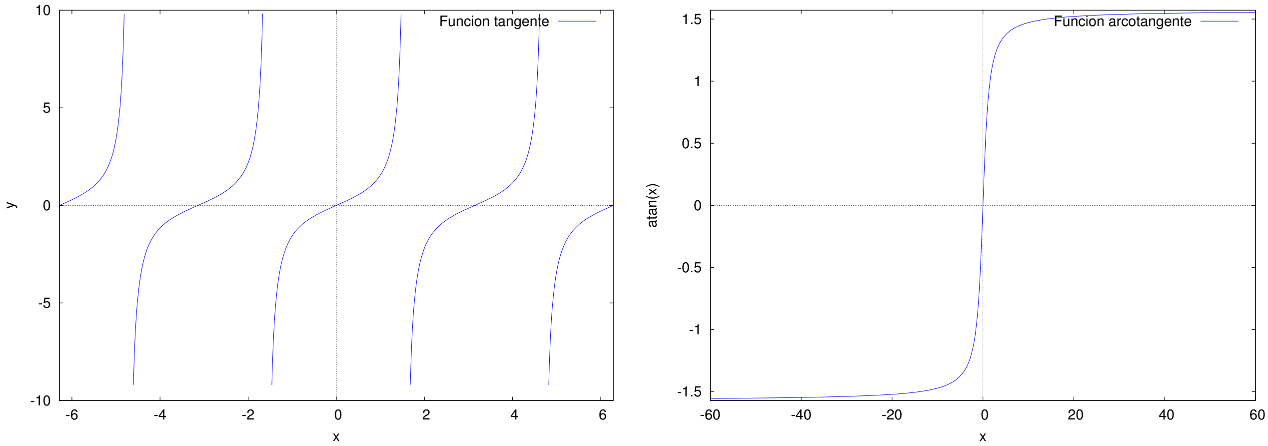
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta;$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right];$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right];$$

La función seno es biyectiva y creciente de $[-\pi/2, \pi/2]$ en $[-1, 1]$. Se puede definir su función inversa, llamada *arcoseno*, de $[-1, 1]$ en $[-\pi/2, \pi/2]$, como sigue:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) = y \quad \text{si} \quad \operatorname{sen}(y) = x.$$

Notemos que la función arcoseno no está bien definida de $[-1, 1]$ en $[-\pi, \pi]$, ya que a cada valor de x le corresponderían dos valores de y. Podemos observar la gráfica de la función arcoseno en la Figura 1.6b. Vemos que, al igual que el seno es creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$, el arcoseno es una función creciente en $[-1, 1]$.



(a) Tangente (b) Arcotangente

Figura 1.7: Gráficas de funciones tangente y arcotangente

En realidad, si una función es creciente y admite inversa, esta es creciente. En efecto, supongamos que f es creciente:

$$\text{Si} \quad x_1 < x_2, \quad \text{con} \quad x_1, x_2 \in Dom(f), \quad \text{entonces} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Para probar que su inversa (que denotamos por f^{-1}) es creciente, supongamos que $y_1 < y_2$, con $y_1, y_2 \in Dom(f^{-1})$. Esto significa que existen $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. De ser $x_2 < x_1$, al ser f creciente deberíamos tener $y_2 = f(x_2) < y_1 = f(x_1)$, lo cual es falso. Por tanto, o bien $x_1 = x_2$, o bien $x_1 < x_2$. Pero en el primer caso, sería $y_1 = f(x_1) = y_2 = f(x_2)$, lo cual también es falso. Concluímos que $f^{-1}(y_1) = x_1 < f^{-1}(y_2) = x_2$. O sea, que f^{-1} es creciente.

Igualmente, si la función es decreciente, su inversa es decreciente.

De forma análoga se define la función inversa del coseno, el arcocoseno, que es decreciente de $[-1, 1]$ en $[0, \pi]$.

Son también de relevancia varias funciones construidas a partir del seno y del coseno. Por ejemplo, la función tangente,

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{definida si} \quad \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde los puntos $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\quad k \in \mathbb{Z}$ son los ceros del coseno. La función tangente es periódica de período π, y tiene asíntotas verticales en las rectas $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (Ver Figura 1.7a). Es biyectiva de $(-\pi/2, \pi/2)$ en $\mathbb{R}$, por lo que su función inversa, llamada *arcotangente*, es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $(-\pi/2, \pi/2)$. Al igual que la tangente, el arcotangente es una función estrictamente creciente (Ver Figura 1.7b). Además, tiende a la asíntota $y = \pi/2$ cuando $x \to +\infty$, y a la asíntota $y = -\pi/2$ cuando $x \to -\infty$: Las asíntotas verticales de la tangente se transforman en asíntotas horizontales del arcotangente.

1.10 Función exponencial

Es posible elevar un número racional positivo a un número racional cualquiera:

$$p^{n/m} = (\sqrt[m]{p})^n, \quad \text{con} \quad p > 0 \quad \text{racional} \quad \text{y} \quad n, m \quad \text{enteros}.$$

Para ello es necesario saber calcular la raíz m-sima de un número racional, lo cual es posible con un procedimiento iterativo especialmente diseñado, o con algoritmos específicos como el habitual para calcular la raíz cuadrada.

Este procedimiento puede ser extendido para elevar un número real positivo a a un número real x. Para ello, aproximamos a y x por números racionales $a_1, a_2, a_3 \cdots$, $x_1, x_2, x_3 \cdots$ (por ejemplo, sus desarrollos decimales), y aproximamos a^x por $a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, a_3^{x_3}, \cdots$. Esto proporciona una sucesión convergente cuyo límite es a^x.

La función exponencial siempre es positiva. Sin embargo, sus características dependen de si la *base* a es mayor o menor que 1. Obviamente, si $a = 1$ obtenemos la función constante igual a 1. En la Figura 1.8 podemos observar las gráficas en las dos situaciones: Si $a > 1$, la función es creciente, tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, y tiende a la asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to -\infty$. Cuando $a < 1$, los comportamientos en $+\infty$ y $-\infty$ son los opuestos respecto al caso anterior. En realidad este segundo caso es una consecuencia del primero, ya que

$$a^x = (a^{-1})^{-x} = \frac{1}{(a^{-1})^x},$$

y si $a < 1$, entonces $a^{-1} > 1$.

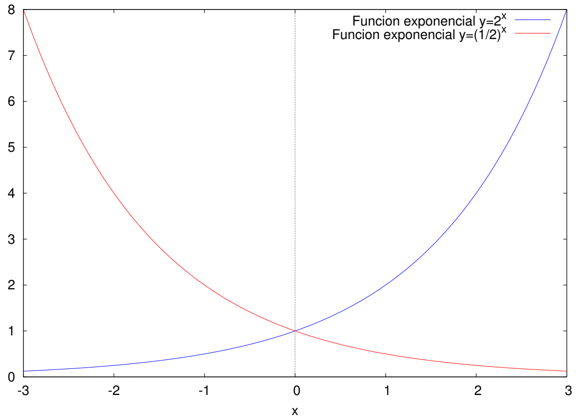


Figura 1.8: Función exponencial

La función exponencial tiene la notable propiedad de transformar suma en producto:

$$a^{x+y} = a^x \, a^y. \tag{1.19}$$

Existe una base natural, que es el número e. Para definirlo, denotemos $f_a(x) = a^x$. Entonces, el número e está caracterizado por

$$f_e'(x) = f_e(x),$$

donde f_e' denota la *función derivada* de f_e (que estudiaremos en el Tema 3). Se demuestra que existe un único número $e > 0$ que cumple esta propiedad. Se trata de un número irracional, que se aproxima por $e \simeq 2,7182818284590452354$. Fue introducido por el matemático escocés John Napier (Neper) en 1614. Por convenio, el logaritmo con base e (también llamado neperiano ó natural) se denota por ln.

El logaritmo con base 10, por abreviar, se denota a veces log, omitiendo la base. Sin embargo es necesario prestar atención, ya que en ciertos libros y programas de cálculo científico, la notación log se usa para el logaritmo neperiano.

1.11 Funcion logarítmica

La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial:

$$log_a(x) = y \quad \text{si} \quad a^y = x, \quad \forall x > 0.$$

La exponencial es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $(0, +\infty)$, por lo que su inversa es biyectiva de $(0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$.

Para representar la gráfica de la función logarítmica, observemos que si un punto (x, y) está en la gráfica de una función, entonces el punto (y, x) está en la gráfica de su función inversa (si esta existe). En efecto, si (x, y) está en la gráfica de f, entonces $y = f(x)$. De aquí $x = f^{-1}(y)$, y por tanto (y, x) está en la gráfica de f^{-1}. O sea, que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$. Podemos observar la aplicación de este hecho a la gráfica de la función logaritmo en la Figura 1.9.

Una propiedad notable de la función logarítmica es

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

Esta propiedad se demuestra como sigue:

$$a^{\log_a b} = b \Rightarrow a^{c \log_a b} = b^c, \quad \text{lo que significa que} \quad \log_a b^c = c \log_a b.$$

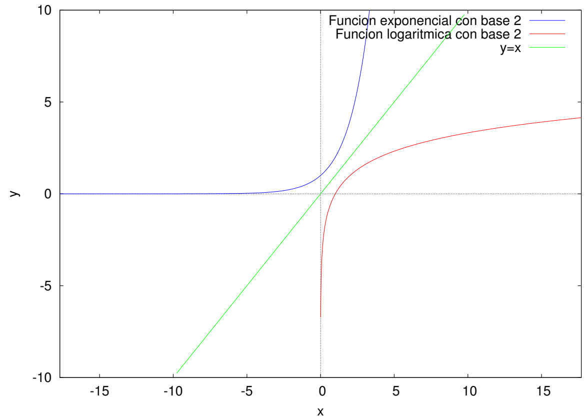


Figura 1.9: Función logarítmica como función inversa de la exponencial

De aquí, se puede calcular el logaritmo en cualquier base a partir del logaritmo neperiano. En efecto, si

$$y = \log_a x, \quad \text{entonces} \quad a^y = x, \quad \text{de donde} \quad y \ln a = \ln x, \quad \text{y por tanto} \quad y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Otra interesante propiedad de la función logarítmica es que transforma producto en suma:

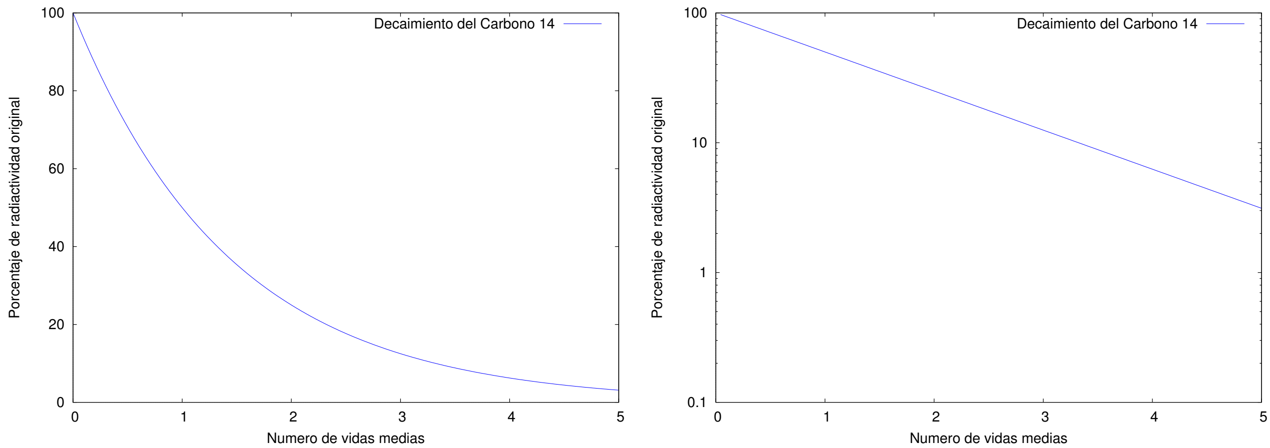
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y). \tag{1.20}$$

Esta propiedad se deriva de la propiedad (1.19) de la función exponencial.

Los logaritmos y la función logarítmica se usan con frecuencia en Biología y Bioquímica. Por ejemplo, el pH de una solución es el logaritmo decimal de la concentración molar de iones H^+, con signo opuesto.

Una aplicación en Bioquímica de las funciones exponencial y logarítmica corresponde a la desintegración de isótopos radiactivos. Los isótopos radiactivos son usados por ejemplo para datar muestras de vida fósil, y son de utilidad en investigación biomédica como trazadores de ciertos tipos de tejidos. El decaimiento del número de átomos radiactivos presentes en un instante dado $N(t)$ viene dado por la ley

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t},$$



(a) Escala normal

(b) Escala logarítmica en y

Figura 1.10: Decaimiento del Carbono 14

donde N_0 es el número inicial de átomos, y λ es la tasa de desintegración del isótopo (fracción del número de isótopos que se desintegran por unidad de tiempo, que es constante para cada elemento).

Un tiempo característico de la desintegración de isótopos es la llamada *vida media*, que es el tiempo que tarda una determinada cantidad de átomos en reducirse a la mitad. Para calcularla, escribimos

$$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2}\, N_0. \quad \text{O sea,} \quad N_0\, e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}\, N_0.$$

De aquí, tomando logaritmo neperiano,

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Por ejemplo, el Carbono 14 C^{14} tiene una tasa de desintegración $\lambda = 1.216 \times 10^{-4}$/año. Su vida media es entonces

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{1.216 \times 10^{-4}} \text{ años} \simeq 5.700 \text{ años}.$$

1.11.1 Gráficas en escala logarítmica

La propiedad (1.20) permite transformar funciones potenciales en funciones lineales. En efecto, si

$$f(x) = b\, a^x \quad \text{con} \quad b, a > 0,$$

entonces

$$\ln f(x) = \ln b + x\, \ln a,$$

por lo que la función $\ln f(x)$ es lineal en x.

Esto sugiere utilizar *escalas logarítmicas* para representar gráficamente funciones que tienen un crecimiento exponencial. Observemos que el decaimiento de isótopos radiactivos obedece la ley

$$N(t) = e^{-\ln(2)\, t/t_{1/2}},$$

por lo que

$$\ln N(t) = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\, t.$$

En la Figura 1.10 podemos observar las gráficas de $N(t)$ en escala normal, y logarítmica en y (llamada *semilogarítmica*). Observamos en el primer lugar una exponencial decreciente, y en el segundo una recta decreciente. El segundo caso permite distinguir mejor la evolución de la cantidad de isótopo cuando esta es pequeña.

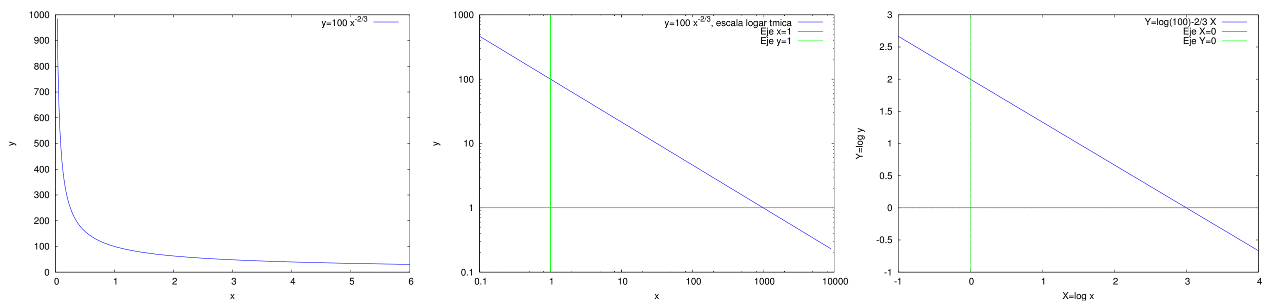
Se puede usar una escala totalmente logarítmica (en x y en y) para representar funciones potenciales. Consideremos, por ejemplo, la función

$$y = 100\, x^{-2/3} \quad \text{para} \quad x > 0$$

Tomando logaritmos la función se transforma en

$$Y = \log 100 - \frac{2}{3} X, \quad \text{siendo} \quad Y = \log y, \quad X = \log x,$$

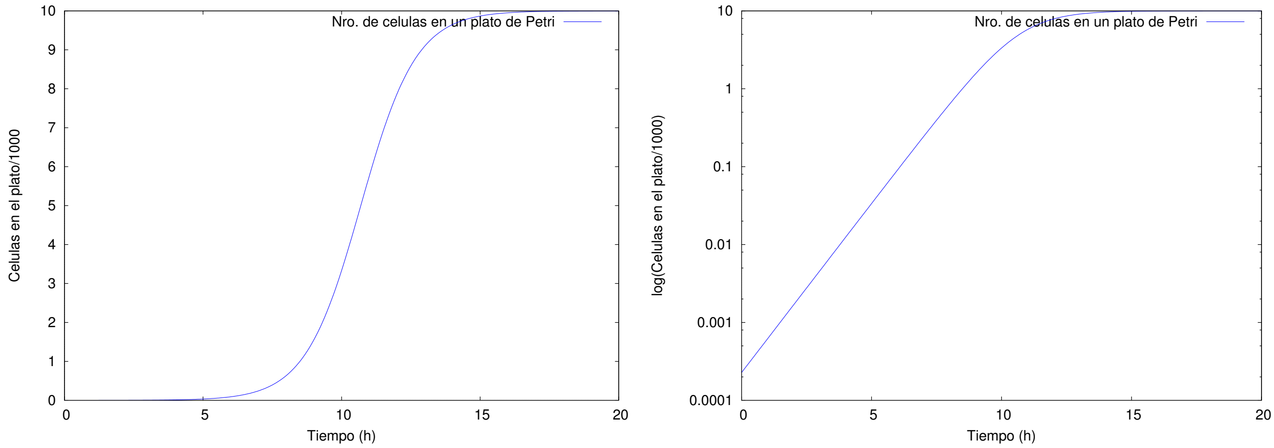
que es una función lineal. De nuevo, podemos observar mejor la variación de la función cuando sus valores son pequeños (Figura 1.11). Las divisiones de los ejes en la escala logarítmica se corresponden de forma directa con la escala lineal, pero no deben confundirse (comparar la segunda y tercera figuras en la Figura 1.11).



(a) Escala normal (b) Escala logarítmica (c) Función lineal equivalente

Figura 1.11: Funcion potencial decreciente

La escala logarítmica permite determinar el comportamiento de ciertos procesos. Por ejemplo, en la Figura 1.12 se representa el crecimiento del número de células en un plato de Petri. Cuando las bacteras son cultivadas en un nutriente de agar en un plato de Petri, el número de células inicialmente crece exponencialmente, doblándose a intervalos regulares. Sin embargo, eventualmente este número se acerca a un límite debido a la limitada disponibilidad de nutrientes. A partir de la gráfica con escala lineal estándar, es difícil determinar cuánto dura el crecimiento exponencial, e incluso si este crecimiento es exponencial en los primeros momentos. Si la gráfica se representa en escala logarítmica, el crecimiento exponencial puede ser observado como crecimiento lineal. Es posible determinar con cierta precisión el tiempo que tarda el número de células en multiplicarse por 10, ya que la escala es logarítmica con base 10. Determinamos que este crecimiento tiene lugar desde el primer momento, y dura aproximadamente hasta el instante $t = 15h$, en que el número de células se estabiliza.



(a) Escala normal (b) Escala logarítmica

Figura 1.12: Crecimiento del número de células en un plato de Petri

1.12 Funciones hiperbólicas

Algunas combinaciones de funciones exponenciales merecen un nombre propio y son estudiadas como ejemplos de nuevas funciones. Presentamos el *seno hiperbólico*, el *coseno hiperbólico*, la *tangente hiperbólica*, etc,

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x}.$$

El calificativo de *hiperbólico* se debe a que del mismo modo que las funciones trigonométricas habituales se pueden relacionar con una circunferencia, las hiperbólicas se pueden relacionar con otra cónica llamada hipérbola (una figura geométrica "parecida" a la circunferencia).

Las funciones hiperbólicas tienen propiedades similares a las de las funciones trigonométricas, por ejemplo:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

El coseno hiperbólico se usa para determinar la posición de los puntos de un cable suspendido por sus extremos, sometido a su propio peso (curva catenaria) como pueden ser los cables del tendido eléctrico. La velocidad de las olas en el mar, v, puede describirse mediante la tangente hiperbólica, relacionando su longitud de onda (distancia entre cresta y cresta), λ, y la profundidad del agua en la que viajan las olas, h. Concretamente,

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$$

donde g es la gravedad.

1.13 Representación gráfica de funciones

La gráfica de una función proporciona mucha información cualitativa sobre el proceso que representa. Es por ello muy importante saber por una parte representar correctamente la gráfica de una función cuyos valores numéricos son conocidos, para transmitir esta información a otras personas. Por otra parte, es también muy importante saber interpretar el comportamiento del proceso a partir de la gráfica que lo representa. Por ejemplo, la Figura 1.13 representa la diversidad de especies (es decir, el número de especies) en función de la productividad primaria (la velocidad con que los autótrofos convierten la luz o la energía química inorgánica en energía química orgánica). Vemos cómo para pequeñas productividades la diversidad es pequeña, pero va aumentando hasta un valor máximo, a partir del cual de nuevo decrece. Existe, pues, un valor óptimo de productividad primaria al que está asociado un máximo de diversidad de especies. Vemos también cómo la diversidad decrece progresivamente al aumentar la productividad.

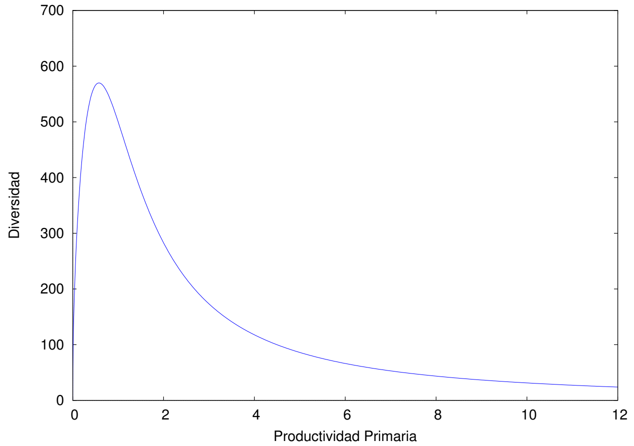


Figura 1.13: Diversidad de especies en función de la productividad primaria

La correcta interpretación de la representación gráfica de curvas requiere conocer los siguientes elementos:

- **Dominio.** Es el conjunto de puntos x donde la función está definida. En el caso de la Figura 1.13, el dominio es $D = [0, +\infty)$. En efecto, solo tiene sentido considerar productividades positivas (o nulas).

- **Recorrido.** Es el conjunto de valores y que alcanza la función. Esto nos da una idea de la magnitud de la función que estamos considerando. En el caso de la Figura 1.13, el recorrido es, aproximadamente, $[0, 600]$. O sea, que en la zona de estudio el óptimo de la productividad primaria genera unas 600 especies.

- **Zonas de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.** Proporcionan información sobre cómo varía la función considerada al aumentar o disminuir la variable independiente, y de cuáles son sus máximos o mínimos. La identificación de estos es importante en muchos procesos. En el caso de la Figura 1.13, ya hemos comentado que la diversidad aumenta para pequeños valores de la productividad, y disminuye para grandes valores de la misma, existiendo un único valor máximo.

- **Asíntotas verticales.** Algunos procesos tienen comportamientos “explosivos". Por ejemplo, magnitudes que crecen de forma incontrolada en tiempo finito (imaginemos la presión generada por una explosión). Es el caso del comportamiento cuando $x \to 0^+$ ó $x \to 0^-$ en la Figura 1.4.

- **Asíntotas horizontales.** Determinan el comportamiento de la función considerada cuando la variable independiente tiende a $+\infty$ ó $-\infty$. En el caso de la Figura 1.13, la diversidad tiende a cero si la productividad tiende a $+\infty$.

- **Asíntotas oblicuas.** También determinan el comportamiento de la función en el infinito. En este caso, la función se acerca progresivamente a una recta que no es horizontal. Se caracteriza por

  $$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

  siendo $y = ax + b$ la ecuación de la asíntota. De aquí, a y b se obtienen por

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b.$$

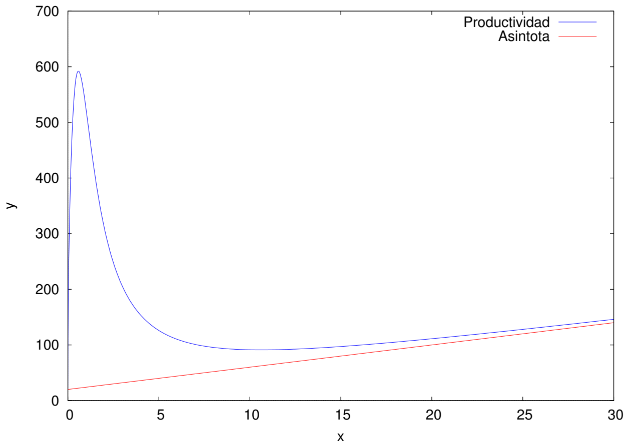


Figura 1.14: Curva con asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$

1.14 Resolución gráfica de ecuaciones e inecuaciones

Podemos usar las facilidades que nos proporcionan los programas de dibujo de gráficas para resolver ecuaciones e inecuaciones. Estos procedimientos son relativamente rudimentarios frente a técnicas analíticas y numéricas, pero los usaremos aquí dada la escasez de tiempo de curso de que disponemos. Básicamente, se trata de hacer un zoom en el entorno de los ceros de la función considerada.

Supongamos que queremos resolver la ecuación $f(x) = 0$, siendo f una función conocida. Representando su gráfica, o usando información sobre la función de la que disponemos previamente, podemos identificar un intervalo en el que se encuentra un cero x_0. Denotamos por $[a_1, b_1]$ este intervalo. Si denotamos por c_1 al centro de este intervalo, entonces la distancia entre c_1 y el cero queda acotada por

$$|x_0 - c_1| \leq \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Observando la gráfica de la función en este intervalo, podemos determinar un intervalo más pequeño en el que se encuentre el cero: $[a_2, b_2]$. Podemos suponer sin dificultad que la longitud de este intervalo es, como mucho, la mitad de la del primero. Si denotamos por c_2 el centro de este intervalo, tendremos

$$|x_0 - c_2| \leq \frac{b_2 - a_2}{2} \leq \frac{b_1 - a_1}{4}.$$

A su vez, representando la gráfica en este intervalo, podemos determinar un intervalo $[a_3, b_3]$ que contiene al cero, y cuya longitud es, como mucho, la mitad de la longitud de $[a_2, b_2]$. Tendremos entonces

$$|x_0 - c_3| \leq \frac{b_3 - a_3}{2} \leq \frac{b_2 - a_2}{4} \leq \frac{b_1 - a_1}{8}.$$

Consideramos los centros de los intervalos como aproximaciones al cero de la función que pretendemos obtener. Determinamos así una sucesión de números $\{c_1, c_2, c_3, \cdots\}$ cada vez más próximos al cero, ya que de hecho satisfacen

$$|x_0 - c_n| \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}.$$

En la práctica podemos mejorar la precisión, si conseguimos por ejemplo dividir por diez la longitud de los intervalos en cada etapa. Esto proporciona la estimación

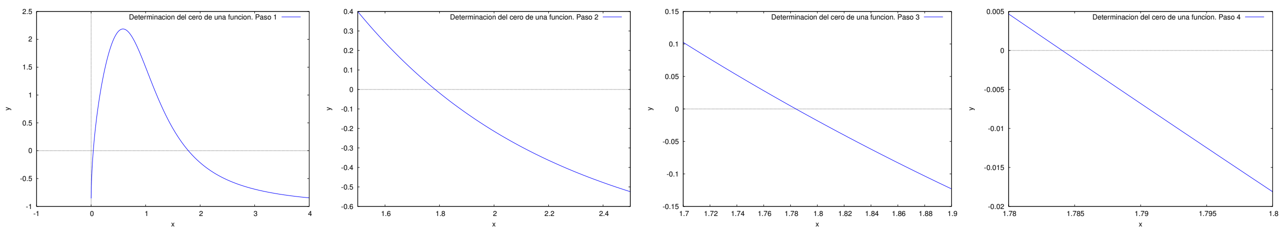
$$|x_0 - c_n| \leq \frac{b_1 - a_1}{10^n},$$

lo que significa que conseguimos una cifra decimal exacta más en cada iteración. En el caso anterior, conseguimos una cifra binaria exacta más en cada iteración. Detendremos el procedimiento cuando calculemos el cero con la precisión requerida por la aplicación concreta con la que trabajemos.

Este procedimiento está ilustrado en la Figura 1.15. La función representada es

$$f(x) = 5\frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} - 1.$$

Esta función posee dos ceros, que denotamos por x_0 y x_1. En la cuarta iteración, el segundo cero es aproximadamente $x_1 \simeq 1.785$.



(a) Iteración 1 (b) Iteración 2 (c) Iteración 3 (d) Iteración 4

Figura 1.15: Aproximación gráfica del cero de una función

Por otra parte, para resolver inecuaciones en la forma

$$f(x) \le 0,$$

nos apoyamos en el procedimiento anterior para calcular los ceros: A la vista de la gráfica podemos determinar cualitativamente los intervalos en que la función es positiva y negativa. Entonces, basta determinar los extremos de estos intervalos para localizar los conjuntos de puntos x en que $f(x) \le 0$. Por ejemplo, la función de la Figura 1.15 es menor o igual que cero si, o bien $x \ge x_1$, o bien $0 < x < x_0$ (la función solo está definida para $x > 0$). Ya que tenemos aproximado $x_1 \simeq 1.785$, nos basta aproximar x_0. Usando el mismo procedimiento, obtenemos $x_0 \simeq 0.04$, por lo que la inecuación $f(x) \le 0$ se resuelve aproximadamente por

$$\text{O bien} \quad 0 < x \le 0.04, \quad \text{o bien} \quad x \ge 1.785.$$

Estos procedimientos pueden también aplicarse a resolver ecuaciones de la forma

$$h(x) = g(x),$$

o inecuaciones de la forma

$$h(x) \le g(x),$$

utilizando la función diferencia $f(x) = h(x) - g(x)$. También se puede utilizar directamente la representación gráfica de las dos funciones, aproximando los puntos de corte mediante zooms progresivos, en lugar de los ceros de f.

1.15 Determinación de parámetros

En muchas ocasiones ocurre que se sabe que una cierta magnitud y, que depende de otra x, sigue una ley determinada; por ejemplo, que tiene un comportamiento lineal. Esto significa que se sabe que la función $y = f(x)$ es de la forma $f(x) = ax + b$. Sin embargo no se conocen los valores de los coeficientes a y b que determinan dicha dependencia.

En ocasiones, los valores de dichos coeficientes se pueden calcular si se conoce el valor de la función en un número suficiente de puntos, es decir, si se conoce el valor de y correspondiente a un número suficiente de x.

Ejemplo 1.1

Se sabe que la temperatura de cierto objeto tiene un comportamiento lineal, con respecto del tiempo. Sabiendo que en un instante inicial, $t = 0$, la temperatura era de $10°$C y que pasados 30 minutos era de $20°$C, determinar la función que proporciona la temperatura en función del tiempo, en cualquier instante t. Determinar también el instante t en que la temperatura del objeto alcanza el valor de $45°$C.

Denotaremos por T a la temperatura y por t al tiempo medido en minutos. Puesto que la temperatura sigue una ley lineal se tendrá: $T(t) = at + b$ para algunos valores a y b que (de momento) no conocemos. Se trata, pues, de determinarlos utilizando la información dada. Por un lado,

$$10 = T(0) = a \cdot 0 + b = b \quad \Longleftrightarrow \quad b = 10$$

Por otro lado, y sabiendo ya que $b = 10$,

$$20 = T(30) = a \cdot 30 + 10 \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot 30 = 20 - 10 = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Luego se tiene, para la función $T(t)$:

$$T(t) = \frac{1}{3}\,t + 10$$

Para determinar el instante en que $T = 45$, hay que calcular para qué valor de t de tiene

$$T(t) = \frac{1}{3}\,t + 10 = 45 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3}\,t = 45 - 10 = 35 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 305 \text{ minutos.}$$

Ejemplo 1.2
Un incendio comienza en un campo abierto y seco y se extiende en forma de círculo. El radio de tal círculo aumenta a razón de 0.5 metros por minuto. Determínese el área de la zona incendiada como una función del tiempo.

Aunque se trata de determinar el área de la zona incendiada, la información de la que se dispone es relativa al **radio** de dicha zona. Por ello, será más fácil determinar en primer lugar el radio en función del tiempo. Una vez conocido este, solo hay que calcular el área del círculo con dicho radio.
Denotaremos por r al radio del círculo medido en metros y por t al tiempo medido en minutos. Comenzaremos a contar el tiempo en el instante en que se inicia el incendio.
Aumentar (o disminuir) a un ritmo constante es una característica de las funciones lineales. Luego la información proporcionada nos indica que $r(t)$ es una función lineal:

$$r(t) = at + b$$

La información de la que se dispone para determinar a y b es:

1. $r(0) = 0$, ya que inicialmente el radio de la zona incendiada es nulo.
2. $r(1) = 0.5$, ya que en un minuto dicho radio habrá aumentado 0.5 metros.

En consecuencia:

$$0 = r(0) = a \cdot 0 + b \iff b = 0$$
$$0.5 = r(1) = a \cdot 1 = a \iff a = 0.5$$

Luego la función que nos da el radio en función del tiempo es

$$r(t) = 0.5\,t = \frac{1}{2}\,t$$

En consecuencia, el área de la zona incendiada será el área del círculo de radio $r(t)$:

$$S(t) = \pi\, r(t)^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\,t\right)^2 = \frac{\pi}{4}\,t^2$$

Ejemplo 1.3
El número de bacterias de un determinado cultivo de laboratorio sigue la ley $y = \dfrac{r}{1 + Ce^{-t}}$ **donde** t **es el tiempo medido en días,** y **es el número de bacterias medido en millones y** r **y** C **son parámetros que hay determinar a partir de datos experimentales. Se sabe que, al inicio del cultivo había** 5×10^5 **bacterias y que, cuando pasa mucho tiempo, la población de bacterias tiende a estabilizarse en el valor de** 40 **millones. Determínense los valores de dichos parámetros. Determínese también en qué instante** t **se alcanzará el número de 10 millones de bacterias.**

Por comodidad y porque es lo lógico, comenzaremos a contar el tiempo en el momento en que se inicia el cultivo.
Por tanto se tiene que $y(0) = 500000$ bacterias $= \dfrac{1}{2}$ millones de bacterias.
Por otro lado, el valor en el que se estabiliza la población cuando se deja pasar mucho tiempo se obtendrá tomando límite cuando t tiende a $+\infty$:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 40$$

Utilizando estas dos informaciones se tiene:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{r}{1 + Ce^{-t}} = \frac{r}{1 + C \cdot 0} = r = 40$$

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{40}{1 + Ce^{0}} = \frac{40}{1 + C} \iff 1 + C = 80 \iff C = 79$$

Luego finalmente se tiene:

$$y(t) = \frac{40}{1 + 79e^{-t}}$$

Para determinar el instante en que la población llega a 10 millones de bacterias hay que resolver la ecuación

$$\frac{40}{1 + 79e^{-t}} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{40}{10} = 4 = 1 + 79e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 79e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{79} = e^{-t}$$

de donde, tomando logaritmos en ambos miembros, se tiene

$$-t = \ln\left(\frac{3}{79}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t = -\ln\left(\frac{3}{79}\right) \approx 3.3 \text{ días}$$

Tema 2

Funciones: continuidad y derivabilidad

Versión: 1 de octubre de 2019

La vida como la conocemos sería imposible sin cambios. Cambios en la concentración de sustancias en pequeñas distancias son muy importantes en Bioquímica. Por ejemplo, dos tercios del ATP producido en las neuronas es consumido por proteinas que envían cationes a través de la membrana celular al medio extracelular, disminuyendo la concentración de potasio y aumentando la de sodio. El gradiente de concentración a través de la membrana celular proporciona la fuerza conductora para la entrada en la célula de agua, glucosa y otros nutrientes. Otro ejemplo es la diferencia de temperatura entre los animales de sangre caliente y su entorno, que limita las características de sus cuerpos. Por ejemplo, las focas suavizan las transferencias de calor entre su cuerpo y el entorno envolviéndose en capas de grasa y pelo.

Este tema está dedicado a la diferenciación o derivación, que es la rama de las matemáticas que predice cómo cambios en una cantidad determinarán cambios en otra. Estudiaremos cómo analizar y esbozar los grafos de diferentes curvas, cómo hacer aproximaciones polinómicas y cómo manejar pequeños errores en medidas experimentales.

2.1 Funciones

Función real de variable real es una correspondencia del tipo

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que a cada valor x del conjunto de números reales A le asocia un **único** número real $y = f(x)$

$$f : x \in A \longrightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}$$

Expresa en términos matemáticos la dependencia de la magnitud y con respecto a la magnitud x.

Dominio de una función es el conjunto A en el que está definida.

Ejemplo 2.1
$f(x) = x^2 + 3$
El dominio de esta función es toda la recta real $\mathbb{R}$, ya que la expresión $x^2 + 3$ está bien definida para cualquier valor de x.

Ejemplo 2.2
$f(x) = \dfrac{1}{x}$
El dominio de esta función es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir, toda la recta real excepto el origen, ya que $\dfrac{1}{x}$ está definida para cualquier valor excepto para $x = 0$.

Ejemplo 2.3
$f(x) = +\sqrt{x}$
La raíz cuadrada de un número negativo no está definida, en consecuencia el dominio de esta función es el conjunto $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\}$, es decir, la semi-recta formada por los números reales no negativos.

Ejemplo 2.4
$f(x) = +\sqrt{x-2}$
Esta función solo está definida para los valores de x que hagan no negativo el radicando, es decir, para $x-2 \geq 0$ o, lo que es lo mismo, para $x \geq 2$. Luego el dominio de la función es $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 2\}$.

Ejemplo 2.5
$f(x) = \dfrac{+\sqrt{x}}{(1+4x)(x-2)}$
El numerador solo está definido para $x \geq 0$. El denominador está definido para cualquier valor de x, pero el cociente no está definido cuando el denominador sea nulo:

$$(1+4x)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4x = 0 \Leftrightarrow x = -1/4 \\ \text{o bien} \\ x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

El valor $x = -1/4$ ya está excluído por la condición anterior. Por lo tanto el dominio de definición de la función será:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\} \setminus \{2\} = [0,2) \cup (2,+\infty)$$

Ejemplo 2.6
$f(x) = \dfrac{1}{x+3} \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$
En primer lugar, el logaritmo solo está definido para valores positivos de su argumento. Debe ser por tanto

$$\frac{1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

Además el denominador de la otra fracción debe ser no nulo: $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$. Pero este valor $x = -3$ ya está excluído, porque no verifica $x > -2$. El dominio es, pues,

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, x > -2\} = (-2,+\infty)$$

Ejemplo 2.7
$f(x) = \sqrt{e^x - 3}$
La raíz cuadrada solo está definida para números no negativos. En consecuencia, debe ser

$$e^x - 3 \geq 0 \Longleftrightarrow e^x \geq 3$$

Haciendo uso de que el logaritmo es una función monótona. es decir, que si $a \leq b$ entonces $\ln(a) \leq \ln(b)$, se tiene:

$$e^x \geq 3 \Longleftrightarrow \ln(e^x) = x \geq \ln(3)$$

El dominio es, pues,

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq \ln(3)\} = [\ln(3), +\infty)$$

Ejemplo 2.8
$f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$
En primer lugar se observa que la función logaritmo solo está definida para valores positivos, luego debe ser $x > 0$.
Pero además, puesto que se trata de un cociente, hay que excluir del dominio los puntos en los que se anule el denominador: la función $\ln(x)$ solo se anula en $x = 1$.
El dominio es, pues,

$$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Ejemplo 2.9
$f(x) = \dfrac{x}{e^{2x} + e^x - 2}$
Tanto el numerador como el denominador son funciones definidas para cualquier valor de x. Los únicos puntos que hay que excluir del dominio son los puntos en que se anule el denominador.
Hay que calcular, pues, las soluciones de $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. Para ello basta observar que, si llamamos $z = e^x$, lo que nos queda es una ecuación de segundo grado en z:

$$e^{2x} + e^x - 2 = (e^x)^2 + e^x - 2 = z^2 + z - 2 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \ \ 1 \\ -2 \end{cases}$$

Puesto que e^x es siempre positivo, solo nos interesa la raíz positiva, $z = 1$, de donde $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
El dominio de la función es, por lo tanto:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Además de por las condiciones matemáticas, el dominio de una función puede venir determinado por el significado físico de las magnitudes que representa.

Ejemplo 2.10

La dosis d (en mg) de un cierto medicamento que hay que suministrar a niños menores de 14 años viene dada, en función de su edad t (en años), por la fórmula siguiente

$$d = f(t) = \frac{t+1}{24}$$

La función $\dfrac{t+1}{24}$ tiene perfecto sentido para cualquier valor de t. Sin embargo, puesto que la variable independiente t representa la edad del niño, no tiene sentido que sea $t \leq 0$. Por otra parte, la fórmula solo es aplicable hasta los 14 años, luego deber ser $t \leq 14$.
El dominio de la función es, pues,

$$\{t \in \mathbb{R} \, : \, 0 < t \leq 14\} = (0, 14]$$

Imagen o recorrido de una función es el conjunto de valores que toma la función.

Ejemplo 2.11
$y = f(x) = x^2 + 3$
x^2 es siempre ≥ 0, luego $x^2 + 3 \geq 3$. La imagen de la función es, pues, $\{y \in \mathbb{R} \, : \, y \geq 3\}$.

Ejemplo 2.12
$y = f(x) = +\sqrt{x+4}$
La imagen de esta función es

$$\{y \in \mathbb{R} \, : \, y \geq 0\}$$

2.2 Límites y continuidad de funciones

En la base del concepto de derivada está un concepto abstracto, que nos será absolutamente necesario: El concepto de límite de una función en un punto. La idea es que los valores de la función se acercan al valor límite cuando la variable independiente se acerca al punto.

Límite de una función en un punto
Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b), y consideremos un punto $c \in (a, b)$. Se dice que el límite de $f(x)$ en el punto $x = c$ es $L \in \mathbb{R}$ si:
Dado un intervalo arbitrariamente pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, podemos encontrar un intervalo en torno al punto c, $(c - \delta, c + \delta)$, tal que toda la imagen del intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ (salvo el punto c) está incluida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. O sea,

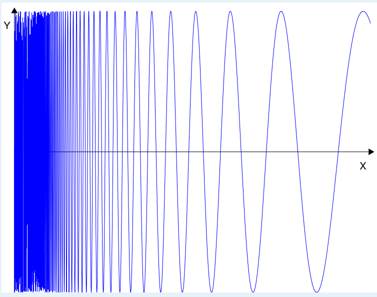
$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta, \qquad \textit{entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En este caso, se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Ejemplo 2.13
$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ **no tiene límite en** $x = 0$

Podemos encontrar valores de x arbitrariamente cercanos a cero tales que $\operatorname{sen}(1/x)$ toma cualquier valor a entre 0 y 1.

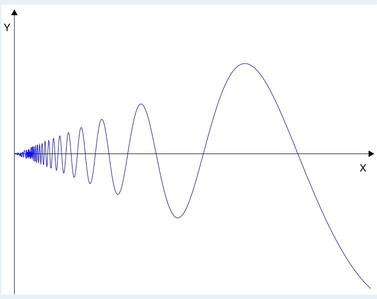


En efecto,

$$\operatorname{sen}(1/x) = a \quad \text{si} \quad 1/x = \operatorname{arc\,sen}(a) + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, si se eligen $\quad x_k = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,sen}(a) + 2k\pi} \quad$ se tiene $\operatorname{sen}(1/x_k) = a$.
Por tanto, los valores de $\operatorname{sen}(1/x)$ no pueden acercarse a ningún límite L concreto cuando $x \to 0$.

Ejemplo 2.14
$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$



En efecto, denotemos $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $c = 0$, $L = 0$. Entonces,

$$|f(x) - L| = |f(x)| = |x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|.$$

Si queremos que $|f(x)| < \varepsilon$ cuando $|x| < \delta$, basta elegir $\delta = \varepsilon$. La imagen por f del intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ (excepto $x = 0$) está contenida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

El concepto anterior de límite se extiende de forma natural a límites por la derecha (cuando $x > c$) y por la izquierda (cuando $x < c$): Basta pedir que la imagen de $(c, c+\delta)$ (en el primer caso) o de $(c-\delta, c)$ (en el segundo caso) esté incluida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Se denota

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = L.$$

Los límites verifican un álgebra que permite calcular nuevos límites a partir de los ya conocidos. Véase el Apéndice A y los ejemplos que allí se incluyen.

LÍMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO	
$\lim_{x\to a} f(x) = A$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es A si cuando tomamos valores de x cada vez más próximos a a, aunque sin llegar a a, los valores de f están cada vez más próximos a A. $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x - a\| < \delta$ entonces $\|f(x) - A\| < \varepsilon$
$\lim_{x\to a^-} f(x) = A$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda es A si cuando tomamos valores de x **más pequeños que** a y cada vez más próximos a a, aunque sin llegar a a, los valores de f están cada vez más próximos a A. $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a - \delta, a)$ entonces $\|f(x) - A\| < \varepsilon$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = A$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es A si cuando tomamos valores de x **mayores que** a y cada vez más próximos a a, aunque sin llegar a a, los valores de f están cada vez más próximos a A. $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, a + \delta)$ entonces $\|f(x) - A\| < \varepsilon$
$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ (-\infty)$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $+\infty$ $(-\infty)$ si, cuando tomamos valores de x cada vez más próximos a a, aunque sin llegar a a, los valores de $f(x)$ se hacen más grandes (pequeños) que cualquier número positivo (negativo). $\forall M > 0$ $(M < 0)$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta$ implica $f(x) > M$ $(f(x) < M)$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$	Las definiciones de estos límites resultarán evidentes a partir de las cuatro anteriores.
Una función tiene límite en un punto $x = a$ si y solo si existen los límites laterales y son iguales y finitos.	

LÍMITES DE FUNCIONES EN $\pm\infty$	
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es A si, cuando tomamos valores de x cada vez más grandes, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más a A. $\forall\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $x > M$ implica $\|f(x) - A\| < \varepsilon$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es $+\infty$ si, cuando tomamos valores de x cada vez más grandes, los valores de $f(x)$ se hacen más grandes que cualquier número positivo. $\forall M > 0$ existe $N > 0$ tal que $x > N$ implica $f(x) > M$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es $-\infty$ si, cuando tomamos valores de x cada vez más grandes, los valores de $f(x)$ se hacen más pequeños que cualquier número negativo. $\forall M < 0$ existe $N > 0$ tal que $x > N$ implica $f(x) < M$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	Las definiciones análogas cuando x tiende a $-\infty$ son fáciles de deducir.

Función continua

En lenguaje impreciso, se dice que una función es **continua** si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Si en algún punto hay que levantar el lápiz del papel para dibujar la gráfica de una función se dice que la función es **discontinua en dicho punto**.

Matemáticamente esto se formaliza pidiendo que el límite de la función en cada punto x del dominio de la función coincida con el valor de la función $f(x)$:

Supongamos que una función f está definida en un intervalo (a,b) y sea c un punto del intervalo. Diremos que f es continua en c si

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

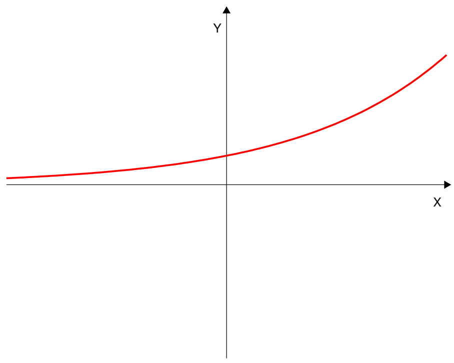


Figura 2.1: En el intervalo en que está representada, la gráfica de la función se puede trazar sin levantar el lápiz del papel: la función es continua en dicho intervalo.

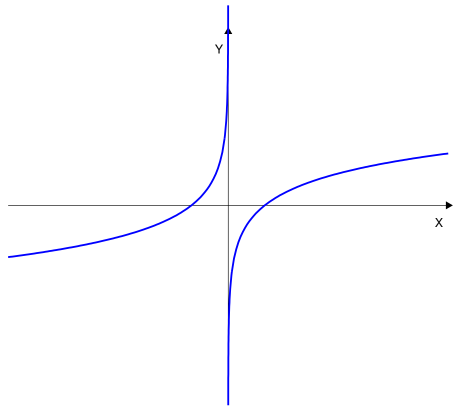


Figura 2.2: La gráfica de esta función está formada por dos ramas. Para dibujarlas es preciso levantar el lápiz del papel: la función es discontinua en $x = 0$.

Ejemplo 2.15

La función $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no está, en principio, definida en $x = 0$:
Sin embargo, se ha visto en el Ejemplo 2.2, que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
Se puede entonces definir $f(0) = 0$, con lo que la función así definida es continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Las funciones definidas por expresiones elementales[1] son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

[1]Expresiones construidas con las operaciones aritméticas aplicadas a las funciones elementales (polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales, etc.) y su composición.

Ejemplo 2.16
Probar que la función logarítmica $f(x) = \ln(x)$ es continua en todo punto $c > 0$

Para ello estudiamos si la diferencia $|f(x) - f(c)|$ es menor que ε cuando x y c están suficientemente cerca:

$$|f(x) - f(c)| = |\ln(\frac{x}{c})| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \ln(\frac{x}{c}) < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon} < \frac{x}{c} < e^{\varepsilon}$$

Ponemos $\dfrac{x}{c} = \dfrac{x-c}{c} + 1$, y entonces

$$|f(x) - f(c)| = |\ln(\frac{x}{c})| < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon} - 1 < \frac{x-c}{c} < e^{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow c(e^{-\varepsilon} - 1) < x - c < c(e^{\varepsilon} - 1).$$

Basta tomar entonces $\delta = \text{mín}\{|c(e^{-\varepsilon} - 1)|, c(e^{\varepsilon} - 1)\}$ para tener $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ si $|x - c| < \delta$.

De forma análoga a los conceptos de límite por la derecha y por la izquierda, se definen los conceptos de continuidad por la derecha y por la izquierda. Por ejemplo, la función f es continua por la derecha en $x = c$ si

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c).$$

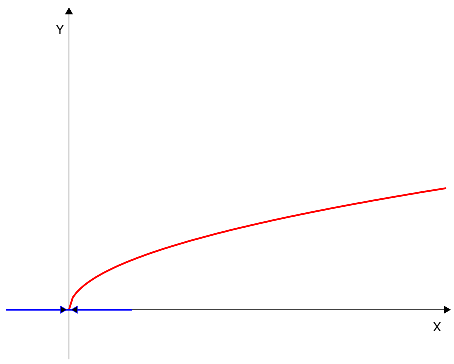


Figura 2.3: Gráfica de la función $f(x) = +\sqrt{x}$. El $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ no existe, ya que la función no está definida para $x < 0$. Sin embargo, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

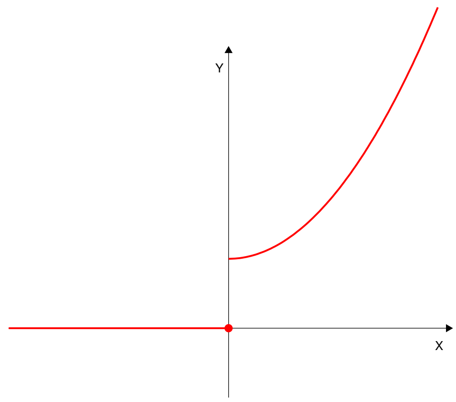


Figura 2.4: La función definida por $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ y por $f(x) = x^2 + 1$ si $x > 0$ tiene límite a ambos lados del punto $x = 0$, pero son distintos: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

Operaciones con funciones continuas.
Si f y g son continuas en a, entonces $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f^g son también continuas en a.
Si $g(a) \neq 0$, entonces también $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.
Si g en continua e a y f es continua en $g(a)$, entonces $f(g(x))$ es continua en $x = a$.

En la práctica, esta última propiedad significa que la composición de las funciones que ya hemos estudiado es continua, ya que cada una de ellas lo es, siempre y cuando permanezcamos en el dominio de definición de cada función. Por ejemplo, si p_k es un polinomio de grado k, la función

$$f(x) = \ln(p_k(x))$$

es continua en los puntos en que $p_k > 0$, ya que de otro modo f no está definida. A su vez, la función

$$g(x) = \sqrt{p_k(x)}$$

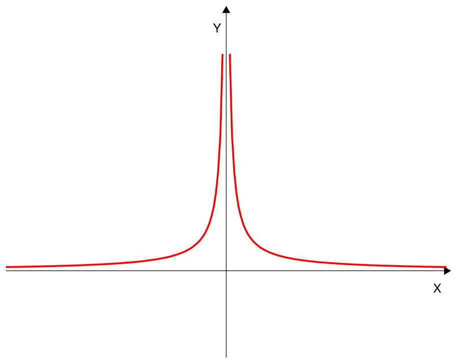


Figura 2.5: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$:
Cuando nos aproximamos a $x = 0$ (tanto por la izquierda como por la derecha) la función toma valores positivos indefinidamente grandes: $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

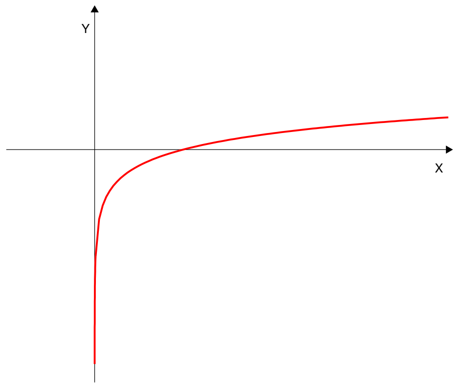


Figura 2.6: Gráfica de la función $f(x) = \ln x$.
El límite cuando $x \to 0^-$ no existe (la función no está definida para $x \leq 0$). Cuando $x \to 0^+$ la función toma valores negativos indefinidamente grandes en valor absoluto: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

es también continua en los puntos en que $p_k > 0$. En los puntos en que $p_k(x) = 0$ será continua bien por la derecha, bien por la izquierda, o incluso por los dos lados, dependiendo del signo de p_k a la derecha y a la izquierda de x.

Ejemplo 2.17

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x = 1$. Sin embargo, existe $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ y vale 2.
Este tipo de discontinuidades se llaman **evitables**, ya que basta con re-definir la función $f(x)$ en el punto $x = 1$ (en este caso, poner $f(1) = 2$), dándole el valor del límite, para obtener una función contínua.

Ejemplo 2.18

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En este caso existen los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to 0$ y son iguales. Pero no coinciden con el valor de $f(0)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad f(0) = 1$$

En consecuencia, $f(x)$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad (evitable, igual que en el ejemplo anterior).

Ejemplo 2.19

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En este caso existen los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to 0$ pero son distintos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1,$$

En consecuencia, $f(x)$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad.
Este tipo de discontinuidades, en la que existen los límites laterales pero son distintos, se denominan **de salto**.

Ejemplo 2.20
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

Esta función tiene dos discontinuidades (en realidad dos puntos en los que no está definida): $x = -1$ y $x = 1$. En ambos casos, los límites laterales de $f(x)$ no existen (son infinitos):

- $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$, ya que, a la izquierda de $x = -1$, se tiene $x^2 > 0$ y $x^2 - 1 > 0$
- $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$, ya que, a la derecha de $x = -1$, se tiene $x^2 > 0$ y $x^2 - 1 < 0$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, ya que, a la izquierda de $x = 1$, se tiene $x^2 > 0$ y $x^2 - 1 < 0$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, ya que, a la derecha de $x = 1$, se tiene $x^2 > 0$ y $x^2 - 1 > 0$

2.3 Concepto de derivada

El concepto de derivada es uno de los más importantes de la matemática actual. En su forma moderna fue introducido por Newton y Leibnitz a finales del siglo XVII. Newton lo usó, por ejemplo, para calcular la órbita de la Luna y de los planetas a partir de su famosa Ley de Gravitación Universal.

La derivada expresa básicamente la rapidez con la que una función varía en cada punto. Consideremos una función f definida en un intervalo (a,b), y un punto $c \in (a,b)$. La variación de f entre c y otro punto x de (a,b) es $f(x) - f(c)$, y su variación promedio, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

La derivada de f en $x = c$ se define como el límite de la variación promedio:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}. \tag{2.1}$$

Derivada de una función en un punto.
Se llama **derivada de f en c** y se denota $f'(c)$ al límite, **si existe**

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Si existe dicho límite, se dice que f **es derivable en c**.
Si la derivada de f existe en todos los puntos de un intervalo I, entonces se dice que f **es derivable en el intervalo I**.

Si la función es continua en $x = c$, el numerador de este cociente se anula en $x = c$, por lo que cabe esperar que este límite exista. Obviamente, no existirá si f no es continua en $x = c$. De hecho, se demuestra fácilmente que si f es derivable en c, entonces es continua en c.

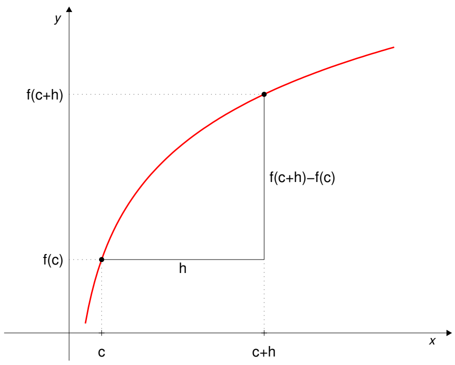


Figura 2.7: La derivada de f en a «mide» el crecimiento de la función en el punto a.

Teorema
Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.
Demostración Puesto que f es derivable en a se tiene

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Para demostrar que f es continua en a hay que probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ o, lo que es lo mismo, que $\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$. Ahora bien,

$$\lim_{x \to a} (f(x)-f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\left(\lim_{x \to a}(x-a)\right) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Lo cual termina la demostración.

El Teorema anterior implica además que, si f no es continua en a, entonces f no puede ser derivable en a.

Lo contrario no es cierto: una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en dicho punto, como se puede comprobar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.21
La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y no es derivable en dicho punto
Para comprobar que f es derivable habría que verificar que existe y es finito el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

La función $f(x) = |x|$ está definida por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{en consecuencia} \quad \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h \geq 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

lo que pone de manifiesto que no existe el límite por no coincidir los límites por la derecha y por la izquierda de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ y por tanto que la función no es derivable en 0.

Observando la gráfica de la función $|x|$ en la Figura (2.8) se comprende de forma intuitiva que esto era de esperar, ya que en el punto $x = 0$ el crecimiento de la función cambia de forma radical: pasa de tener pendiente -1 a tener pendiente 1. En general, las funciones cuyas gráficas presenten “picos” no van a ser derivables en esos puntos (véase Figura (2.9)).

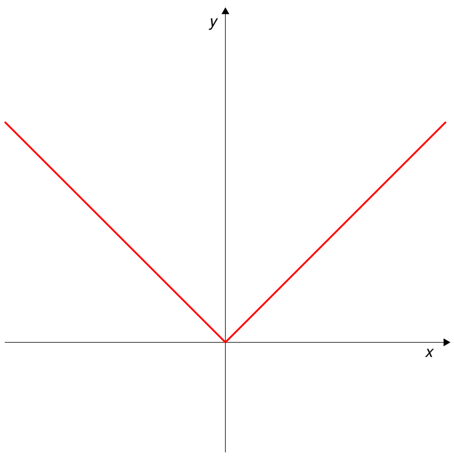


Figura 2.8: La función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, ya que los límites por la derecha y por la izquierda del cociente incremental son distintos.

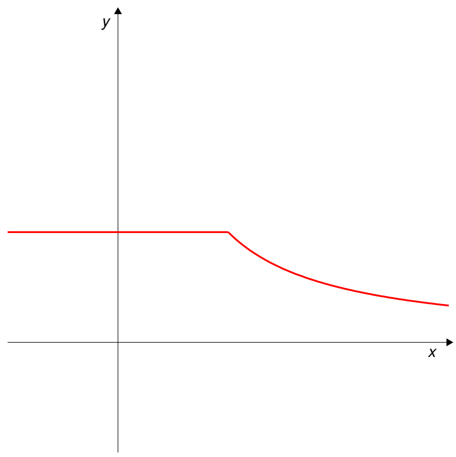


Figura 2.9: Las funciones que, como la de la figura, aún siendo continuas, presentan “picos” en determinados puntos no son derivables en dichos puntos, por la misma razón que la función $|x|$.

Podemos caracterizar la derivada como sigue: La recta secante a la curva $y = f(x)$ en dos puntos $(c, f(c))$ y $(d, f(d))$ es

$$y = p(x-c) + f(c), \quad \text{con} \quad p = \frac{f(d) - f(c)}{d - c},$$

de modo que la pendiente a esta recta secante es justamente la variación promedio de f entre c y d. Si acercamos d a c, la recta secante se acercará progresivamente a una ideal “recta tangente ”cuya pendiente será lógicamente

$f'(c)$. La ecuación de esta recta será, pues,

$$y = f'(c)(x - c) + f(c).$$

Esto ocurrirá solamente si existe esta derivada, y entenderemos que la curva $y = f(x)$ admite una recta tangente en el punto $(c, f(c))$ si f es derivable en $x = c$.

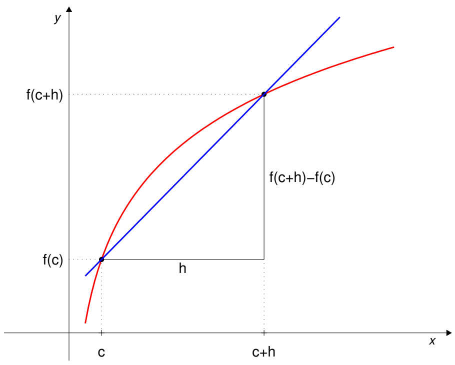


Figura 2.10: La recta secante a la curva en los puntos $(c, f(c))$ y $(c+h, f(c+h))$ tiene la ecuación $y = f(c) + \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}(x - c)$

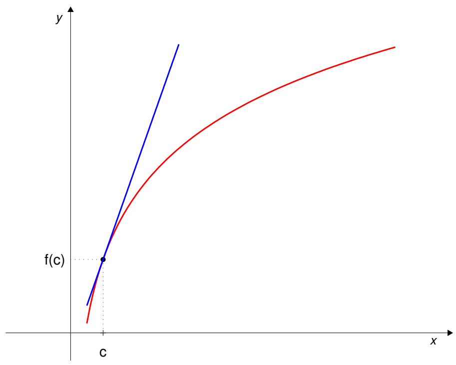


Figura 2.11: Cuando h tiende a 0 el punto $c + h$ se confunde con el punto c y la recta secante se convierte en la tangente a la curva en el punto $(c, f(c))$, de ecuación $y = f(c) + f'(c)(x - c)$.

Si una función es derivable en un conjunto D, se puede definir la *función derivada*: $f' : D \to \mathbb{R}$ que transforma cada punto $x \in D$ en la derivada de f en ese punto, $f'(x)$. Es un concepto práctico, que permite denotar las derivadas de funciones habituales con comodidad.

La notación f' que estamos usando se debe a Lagrange. Existen otras notaciones para las derivadas. Por ejemplo, $\dfrac{df}{dx}$ (debida a Leibnitz) ó $\dot{f}$ (debida a Newton). Esta última es más utilizada en Física.

2.4 Cálculo de derivadas

2.4.1 Derivadas de las funciones elementales

La derivada de las funciones elementales se calcula recurriendo directamente a la definición, como en los siguientes ejemplos, aunque en algunos casos los límites indeterminados que aparecen pueden ser complicados de calcular.

Ejemplo 2.22
Derivada de una función constante $f(x) = k$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Ejemplo 2.23
Derivada de $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

Ejemplo 2.24
Derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.4.2 Álgebra de derivadas

Conocidas las derivadas de las funciones elementales, un conjunto de propiedades conocidas como **álgebra de derivadas**, permiten calcular la derivada de otras funciones construidas combinando aquellas mediante operaciones aritméticas y composición de funciones.

ÁLGEBRA DE DERIVADAS	
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{h(x)^2}$, si $h(x) \neq 0$.
$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ (Regla de la CADENA)

TABLA DE DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Funciones elementales		Funciones compuestas (usando la Regla de la Cadena)	
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = a\,x$	$f'(x) = a$	$f(x) = a\,g(x)$	$f'(x) = a\,g'(x)$
$f(x) = a\,x + b$	$f'(x) = a$	$f(x) = a\,g(x) + b$	$f'(x) = a\,g'(x)$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = g(x)^2$	$f'(x) = 2\,g(x)\,g'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\,g'(x)$
$f(x) = x^n\ (n \neq 0)$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$f(x) = g(x)^n$	$f'(x) = n\,g(x)^{n-1}\,g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}\,g'(x)$
$f(x) = a^x\ (a > 0)$	$f'(x) = a^x\,\ln(a)$	$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)}\ln(a)g'(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)}\,g'(x)$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\,\ln(b)}$	$f(x) = \log_b(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)\,\ln(b)}\,g'(x)$
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$	$f'(x) = \cos(g(x))\,g'(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$	$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(g(x))g'(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$f(x) = \tan(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))}\,g'(x)$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \arctan(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+g(x)^2}\,g'(x)$

2.4.3 Ejemplos de cálculo de derivadas

Ejemplo 2.25
Derivada de $f(x) = (5x^3 + 2)^4$
Aplicando la fórmula de derivación de la potencia de una función, $g(x)^n$, se tiene

$$f'(x) = 4\,(5x^3 + 2)^3 \cdot (5 \cdot 3 \cdot x^2) = 60\,(5x^3 + 2)^3\,x^2$$

Ejemplo 2.26
Derivada de $f(x) = \sqrt{7 - x^3}$
Aplicando la fórmula de derivación de la raíz cuadrada de una función, $\sqrt{g(x)}$, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{7-x^3}} \cdot (-3x^2) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{7-x^3}}$$

Ejemplo 2.27
Derivada de $f(x) = e^{3x^2}$
Hay que aplicar la derivada de la exponencial de una función, $e^{g(x)}$,

$$f'(x) = e^{3x^2}\,(3 \cdot 2 \cdot x) = 6\,x\,e^{3x^2}$$

Ejemplo 2.28
Derivada de $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$
Aplicando la fórmula de derivación de un cociente:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2) - (x^3-1)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{(3x^4+6x^2) - (2x^4-2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+2x}{(x^2+2)^2}$$

Ejemplo 2.29
Derivada de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)$
Hay que aplicar en primer lugar la fórmula de derivación del seno de una función, $\operatorname{sen}(g(x))$, y después la de la derivada de un cociente:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x+4}{x-1}\right)\left(\frac{(x-1)-(x+4)}{(x-1)^2}\right) = \frac{-5}{(x-1)^2}\cos\left(\frac{x+4}{x-1}\right)$$

Ejemplo 2.30
Derivada de $f(x) = x\sqrt{x^2 - 3}$
Hay que aplicar la derivada de un producto y la derivada de la raíz cuadrada de una función:

$$f'(x) = \sqrt{x^2-3} + x\,\frac{1}{2\sqrt{x^2-3}}(2x) = \sqrt{x^2-3} + \frac{x^2\sqrt{x^2-3}}{(x^2-3)} = \sqrt{x^2-3}\left(1 + \frac{x^2}{x^2-3}\right)$$

Ejemplo 2.31
Derivada de $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2+1)}$
Hay que escribir la raíz como una potencia de exponente fraccionario, $f(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)^{1/3}$, y aplicar la fórmula de derivación de $g(x)^n$ y luego la del logaritmo:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\ln(x^2+1)\right)^{-2/3}\frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{3(x^2+1)\sqrt[3]{\ln^2(x^2+1)}}$$

Ejemplo 2.32
Derivada de $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
Hay que aplicar la regla de derivación de un cociente de dos funciones:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{\dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Ejemplo 2.33
Derivada de $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+1})$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\,\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}2x = \frac{1}{x^2+2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo 2.34
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^2+3x-1$ en el punto $x=2$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

En este caso, $f(x) = x^2+3x-1$ y su derivada es $f'(x) = 2x+3$

Sus valores en $x=2$ son $f(2) = 4+6-1 = 9$ y $f'(2) = 4+3 = 7$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = 9 + 7(x-2)$$

Ejemplo 2.35
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \ln(x^2+3)$ en el punto $x=1$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

En este caso, $f(x) = \ln(x^2+3)$ y su derivada es $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

Sus valores en $x=1$ son $f(1) = \ln(1+3) = \ln(4)$ y $f'(1) = \dfrac{2}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = \ln(4) + \frac{1}{2}(x-1)$$

Ejemplo 2.36
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$ en el punto $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

En este caso, $\quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} \quad$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-1}{\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) x^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

Sus valores en $x = 1$ son $\quad f(1) = \operatorname{arc\,tg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0.7854 \quad$ y $\quad f'(1) = \dfrac{-1}{1 + 1} = -\dfrac{1}{2}$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1)$$

2.4.4 Derivada de la función inversa

Para calcular la derivada de la función inversa, se usa la regla de la cadena: Observamos que f y su inversa f^{-1} (caso de existir), vienen relacionadas por

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x, \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

Derivando en los dos miembros de esta igualdad y utilizando la Regla de la Cadena para derivar el primer miembro se tiene

$$f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot \big(f^{-1}\big)'(x) = 1, \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

y por lo tanto

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

Ejemplo 2.37
Calcular la derivada de la función $f(x) = \ln(x)$ utilizando la derivada de la función inversa.

Derivando en la identidad $\quad e^{\ln(x)} = x \quad$ se tiene

$$e^{\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

como es bien sabido.

Ejemplo 2.38
Calcular la derivada de la función $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$ utilizando la derivada de la función inversa.

Derivando en la identidad $\quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x \quad$ se tiene $\quad \cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) \cdot \dfrac{d}{dx}\big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big) = 1$ de donde, despejando,

$$\frac{d}{dx}\big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2.4.5 Derivada logarítmica

En ocasiones, resulta cómodo derivar el logaritmo de una función para calcular su derivada. Según la regla de la cadena, si f es derivable en x y $f(x) > 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

y de aquí se puede despejar $f'(x)$.

Ejemplo 2.39
Utilizar la derivación logarítmica para calcular la derivada de la función $f(x) = a^x$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\big(a^x\big) = x\,\ln(a)$$

y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(a) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ln(a)\,f(x) = \ln(a)\,a^x$$

Ejemplo 2.40
Utilizando la derivación logarítmica, deducir la fórmula de la derivada de un producto de dos funciones.

Sea $h(x) = f(x)\cdot g(x)$. Tomando logaritmos se tiene $\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$.
Derivando en ambos miembros:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)},$$

de donde, depejando ahora $h'(x)$:

$$h'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)h(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)f(x)g(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)f(x)g(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ejemplo 2.41
Calcular la derivada de la función $f(x) = \big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\Big(\big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}\Big) = \cos(x)\,\ln\operatorname{sen}(x)$$

y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\operatorname{sen}(x)\,\ln\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\operatorname{sen}(x)\,\ln\operatorname{sen}(x) + \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

de donde

$$f'(x) = \left(-\operatorname{sen}(x)\,\ln\big(\operatorname{sen}(x)\big) + \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)\big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}$$

Ejemplo 2.42
Calcular la derivada de la función $f(x) = \left(x^2+1\right)^{2x-3}$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene $\ln f(x) = (2x-3)\,\ln(x^2+1)$ y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln(x^2+1) + (2x-3)\frac{2x}{x^2+1}$$

de donde

$$f'(x) = \left(2\ln(x^2+1) + \frac{2x(2x-3)}{x^2+1}\right)f(x) = \left(2\ln(x^2+1) + \frac{2x(2x-3)}{x^2+1}\right)\left(x^2+1\right)^{2x-3}$$

2.4.6 Derivación implícita

En ocasiones la relación entre dos variables no viene expresada explícitamente, es decir, con una de ellas "despejada", como en $y = x\ln(x^2+1)$, sino que viene dada mediante una relación entre ambas (una ecuación), como en $x^2y + y^3 = 1$. Se dice en estos casos que y viene **implícitamente definida** por dicha ecuación.

Sin embargo, es posible, utilizando la Regla de la Cadena, derivar con respecto de x directamente en la ecuación. Para ello se deriva con respecto de x en ambos miembros de la ecuación, teniendo en cuenta que y es una función de x: $y = y(x)$.

Por ejemplo, en la ecuación anterior $x^2y + y^3 = 1$ se tendría

$$x^2y + y^3 = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2y + y^3\right) = \frac{d}{dx}\left(1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{d}{dx}\left(x^2y\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \left(2xy + x^2y'\right) + \left(3y^2y'\right) = 0$$

Agrupando los términos que contienen y' y despejando se tiene:

$$2xy + x^2y' + 3y^2y' = 2xy + \left(x^2+3y^2\right)y' = 0 \ \Leftrightarrow \ y' = \frac{-2xy}{x^2+3y^2}$$

Es decir: en un punto (x,y) que verifique la ecuación $x^2y + y^3 = 1$, la derivada de y con respecto de x es $y' = \dfrac{-2xy}{x^2+3y^2}$.

Ejemplo 2.43
Derivar implícitamente en el ecuación $x\ln(y^2+1) + y = 1$ y despejar la derivada de y con respecto de x.

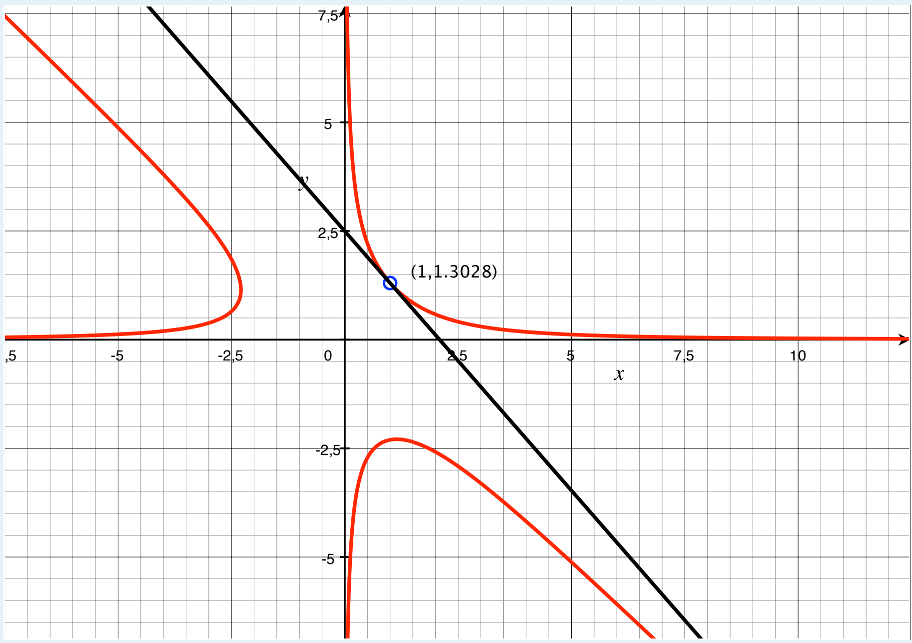
$$x\ln(y^2+1) + y = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\Big(x\ln(y^2+1) + y\Big) = \frac{d}{dx}\Big(x\ln(y^2+1)\Big) + \frac{d}{dx}\Big(y\Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \ln(y^2+1) + x\cdot\frac{d}{dx}\Big(\ln(y^2+1)\Big) + \frac{d}{dx}y = \ln(y^2+1) + x\left(\frac{2yy'}{y^2+1}\right) + y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \ln(y^2+1) + \left(\frac{2xy}{y^2+1} + 1\right)y' = \ln(y^2+1) + \left(\frac{2xy+y^2+1}{y^2+1}\right)y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \ y' = \frac{-\ln(y^2+1)}{\dfrac{2xy+y^2+1}{y^2+1}} = \frac{-(y^2+1)\ln(y^2+1)}{2xy+y^2+1}$$

Ejemplo 2.44
Los puntos del plano que verifican la ecuación $x^2y + xy^2 = 3$ forman una curva con varias ramas. El punto $(1, 1.3028)$ pertenece a una de ellas. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.



Calculamos, implítamente, la derivada de y con respecto de x:

$$x^2y + xy^2 = 3 \Rightarrow 2xy + x^2y' + y^2 + x \cdot 2yy' = 0 \;\Leftrightarrow\; (2xy + y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{y' = \frac{-(2xy + y^2)}{2xy + x^2}}$$

Sustituyendo ahora $(x, y) = (1, 1.3028)$ obtendremos la derivada de y con respecto a x en dicho punto, es decir, la pendiente de la recta tangente en dicho punto:

$$y' = \frac{-(2xy + y^2)}{2xy + x^2}\bigg|_{x=1,y=1.3028} = \frac{-(2 \times 1.3028 + (1.3028)^2)}{2 \times 1.3028 + 1} \approx -1.1934$$

Escribimos ahora la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1.3028)$ con pendiente $p = -1.1934$:

$$y = 1.3028 - 1.1934(x - 1) = -1.1934x + 2.4962$$

2.5 Crecimiento y decrecimiento

Funciones crecientes y decrecientes
Una función, f, definida en un intervalo I, se dice que es **creciente** en I si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Análogamente, se dice que f es **decreciente** en I si $f(x_1) \geq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Las funciones que son crecientes o decrecientes en todo su dominio de definición se denominan **monótonas**. Por ejemplo, e^x es una función monótona creciente.

La derivada proporciona un criterio simple para saber cuándo una función es creciente o decreciente:

Criterio de crecimiento/decrecimiento
Sea f derivable en (a, b).

a) Si $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b)

b) Si $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b)

El conocimiento de los intervalos donde una función es creciente y decreciente proporciona, a su vez, información sobre sus mínimos y máximos locales, como se verá más adelante.

Ejemplo 2.45
Estudiar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

Esta función no está definida para $x = \pm 1$. Su derivada es

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

que se anula para $x = 0$. En consecuencia, los puntos en los que f' puede cambiar de signo son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$-2x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(x^2-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$

Así,

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ es creciente en } (-\infty, -1) \\ f \text{ es creciente en } (-1, 0) \\ f \text{ es decreciente en } (0, 1) \\ f \text{ es decreciente en } (1, +\infty) \end{array} \right.$$

Ejemplo 2.46
Estudiar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Esta función solo está definida para $x > 0$. Su derivada es

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{x^2}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

que se anula para $2 - \ln x = 0$, es decir, para $x = e^2$. En consecuencia, f' solo puede cambiar de signo en $x = e^2$.

	$(0, e^2)$	$(e^2, +\infty)$
$2 - \ln x$	$+$	$-$
$2x\sqrt{x}$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$

Así,

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ es creciente en } (0, e^2) \\ f \text{ es decreciente en } (e^2, +\infty) \end{array} \right.$$

2.6 Máximos y mínimos relativos

Hablando sin precisión, se dice que una función tiene un mínimo (respectivamente máximo) relativo en un punto $x = c$ si el valor que toma en dicho punto $f(c)$ es menor o igual (resp. mayor o igual) que los valores que toma en los puntos del entorno de c.

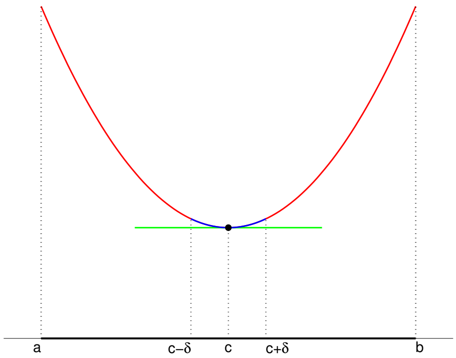


Figura 2.12: Mínimo local o relativo. Si f está definida en (a, b) (abierto) y $c \in (a, b)$, se dice que f tiene un mínimo relativo en c si, para algún valor $\delta > 0$ se tiene
$f(c) \leq f(x)\ \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$.

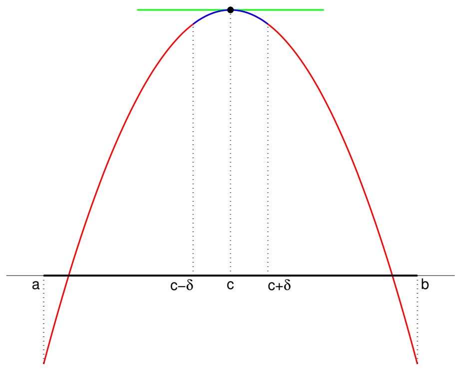


Figura 2.13: Máximo local o relativo. Si f está definida en (a, b) (abierto) y $c \in (a, b)$, se dice que f tiene un máximo relativo en c si, para algún valor $\delta > 0$ se tiene
$f(c) \geq f(x)\ \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$.

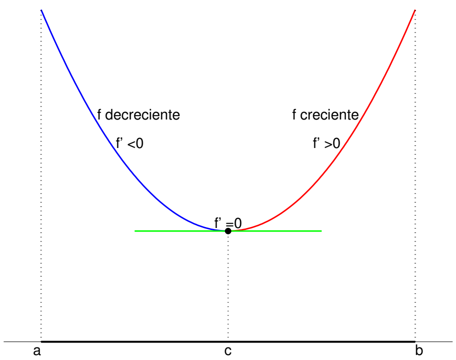


Figura 2.14: Si f es decreciente a la izquierda de $c \in (a, b)$ y creciente a su derecha, es claro que f tiene un mínimo relativo en el punto $x = c$.

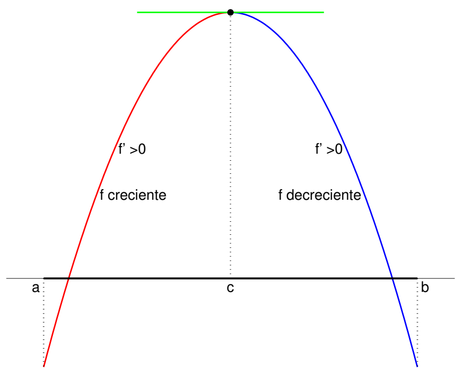


Figura 2.15: Si f es creciente a la izquierda de $c \in (a, b)$ y decreciente a su derecha, es claro que f tiene un máximo relativo en el punto $x = c$.

Criterio de mínimo / máximo local

Sea f una función continua en (a, b) y sea c un punto de (a, b).

a) Si f es decreciente en (a, c) y creciente en (c, b), entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$.

b) Si f es creciente en (a, c) y decreciente en (c, b), entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.

Si f es derivable y su derivada es continua en (a, b), los resultados anteriores se pueden expresar en función del signo de la derivada.

Criterio de mínimo / máximo local utilizando la derivada
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable y con derivada continua en (a, b), y sea $c \in (a, b)$ un punto interior al intervalo.

a) Si $f' \leq 0$ en (a, c) y $f' \geq 0$ en (c, b), entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$ y se tiene $f'(c) = 0$ (tangente horizontal en $(c, f(c))$).

b) Si $f' \geq 0$ en (a, c) y $f' \leq 0$ en (c, b), entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$ y se tiene $f'(c) = 0$ (tangente horizontal en $(c, f(c))$).

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que los puntos donde se anule la derivada, $f'(x) = 0$, son candidatos a ser máximos ó mínimos relativos de la función.

Pero, tras identificarlos, es necesario cerciorarse de que son efectivamente máximos o mínimos, ya que no todos lo son, como se muestra en el ejemplo de la Figura (2.16).

Puntos críticos
Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** de dicha función.

Los puntos críticos pueden ser, además de máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión.

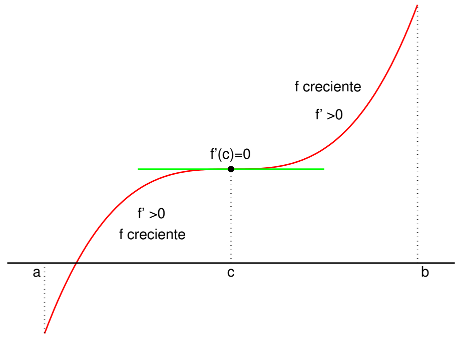


Figura 2.16: Esta función tiene tangente horizontal en el punto $x = c$, aunque no tiene en dicho punto ni un mínimo ni un máximo relativos. Lo que tiene es un **punto de inflexión**, es decir un punto donde cambia su concavidad (en este caso, cambia de cóncava a convexa).

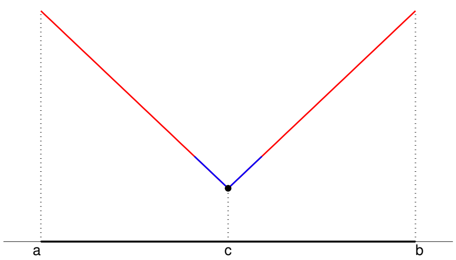


Figura 2.17: Esta función tiene un mínimo relativo en el punto $x = c$ aunque no se verifica $f'(c) = 0$: de hecho no se puede hablar de $f'(c)$, ya que f no es derivable en c.

No hay que olvidar, no obstante, que una función continua puede tener un extremo relativo (mínimo o máximo) en un punto en el que no se anule la derivada.

Esto puede suceder en un punto en que la función continua no sea derivable, como es el caso de la función de la Figura (2.17).

En la búsqueda de máximos y mínimos relativos de una función hay que analizar, además de los puntos críticos, los puntos en los que la función no es derivable, si los hay.

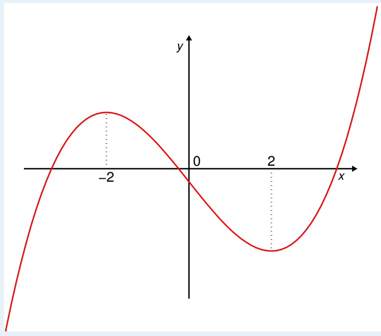
Ejemplo 2.47
Encontrar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 12x - 3$.

Para determinar los extremos locales se analizan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Para ello se comienza por determinar los puntos críticos (los puntos en que se anula la derivada)

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Estudiando el signo de f' se tiene que

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ en } (-\infty, -2) \\ f'(x) < 0 \text{ en } (-2, 2) \\ f'(x) > 0 \text{ en } (2, +\infty) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ es creciente en } (-\infty, -2) \\ f \text{ es decreciente en } (-2, 2) \\ f \text{ es creciente en } (2, +\infty) \end{cases}$$



Está claro de lo anterior que f tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Ejemplo 2.48
Encontrar los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$.

Se trata de una función polinómica, en consecuencia está bien definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Hay que estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, es decir, puesto que f es derivable en $\mathbb{R}$, el signo de su derivada:

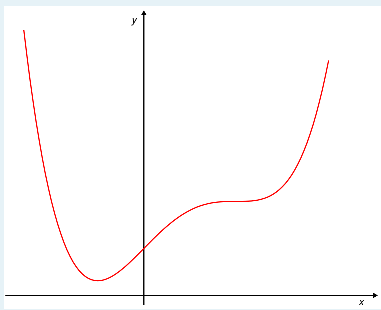
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 4(x-1)^2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Analizamos el signo de f':

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

Se tiene, pues

$$\begin{cases} f' < 0 \text{ en } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ f' > 0 \text{ en } \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ es decreciente en } (-\infty, -\frac{1}{2}) \\ f \text{ es creciente en } (-\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$$



de modo que

$$f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.49
La población de cierta especie sigue la siguiente función

$$P(t) = a + \frac{100t}{e^{t/2}}, \quad t \geq 0$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medida en miles), t el tiempo (medido en meses) y a es una constante positiva.
(1) Calcular a sabiendo que inicialmente la población constaba de 300 individuos.
(2) ¿En qué momento se puede predecir que alcanzará la población su máximo? ¿Cuánto es el valor de dicho máximo?
(3) ¿A qué tiende la población a largo plazo?
(4) Si se sabe que esta especie está en peligro de extinción cuando el número de sus individuos es menor que 100, ¿puede ocurrir que esta población entre de peligro de extinción?

(1) Si inicialmente había 300 individuos, se tiene

$$P(0) = \boxed{a = 300}$$

(2) Lo que queremos calcular es para qué valor de la variable independiente t se produce el máximo de esta función. Para ello igualamos a cero la derivada.

$$P'(t) = 100\frac{e^{t/2} - \frac{1}{2}te^{t/2}}{(e^{t/2})^2} = 100\frac{\left(1 - \dfrac{t}{2}\right)}{e^{t/2}} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{t}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{t = 2}$$

Tenemos que asegurarnos de que para $t = 2$ se produce efectivamente un máximo de la función, pero esto es claro, ya que $P'(t)$ es positiva a la izquierda de $t = 2$ y negativa a su derecha.
El valor de dicho máximo es el valor de $P(t)$ en $t = 2$:

$$P(2) = 300 + \frac{100 \times 2}{e^{2/2}} = 300 + \frac{200}{e} \approx 373.57 \approx 374 \Rightarrow \boxed{\text{El valor máximo es 374}}.$$

(3) Matemáticamente, el comportamiento de la población a largo plazo viene dado por el comportamiento de la función cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} 300 + \frac{100t}{e^{t/2}} = 300 + 100 \times \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t/2}} = 300 + 100 \times 0 = 300.$$

Es decir, $\boxed{\text{a largo plazo el tamaño de la población se estabiliza en 300 individuos}}$.

(4) El tamaño de nuestra población no desciende en ningún instante por debajo de 100; de hecho no desciende por debajo de 300. En efecto, ya hemos visto que el valor máximo es 374 y que asintóticamente tiende a 300. Si descendiera de 300, para volver a "subir" tendría que tener un mínimo relativo, y ya hemos visto que $t = 2$ es el único punto crítico. Así pues, $\boxed{\text{esta población no entrará en peligro de extinción.}}$

Ejemplo 2.50
Para cierta población de microorganismos, la densidad en el instante t (medido en minutos), viene dada por

$$p(t) = p_0 + \frac{at}{e^{kt}},$$

siendo p_0, a y k parámetros por determinar. Se sabe que la densidad inicial era de 2850, y se ha observado que el valor máximo $p_m = 9344$ se alcanza en el tiempo $t_m = 7.5$. Determinar los valores de p_0, a y k.

Tenemos tres parámetros que determinar y tres informaciones para hacerlo:
(1) La densidad inicial es de 2850: $p(0) = 2850$
(2) El valor máximo se obtiene para $t_m = 7.5$: $p'(7.5) = 0$
(3) El valor máximo es 9344: $p(7.5) = 9344$

De (1) se obtiene

$$p(0) = \boxed{p_0 = 2850}$$

De (2) se tiene

$$p'(t) = \frac{a(1-kt)}{e^{kt}} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - kt = 0 \text{ luego } 1 - 7.5k = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{k = \frac{1}{7.5}(\approx 0.13333)}$$

Finalmente, de (3) se tiene

$$p(7.5) = p_0 + \frac{7.5a}{e^{7.5k}} = 2850 + \frac{7.5a}{e} = 9344 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{e}{7.5}(9344 - 2850) \Rightarrow \boxed{a \approx 2353.67}$$

2.7 Concavidad y convexidad

Aunque se puede dar una definición de función convexa o concáva más general que la que sigue, esta es suficiente a los efectos de este curso.

Funciones convexas y cóncavas
Una función $f(x)$ derivable es **convexa** en (a, b) si su derivada, $f'(x)$, es creciente en (a, b).

Si la derivada, $f'(x)$, es decreciente en (a, b), entonces la función es **cóncava**.

Observación: en ocasiones se genera cierta confusión porque en algunos ámbitos las denominaciones cóncava y convexa están intercambiadas. En caso de duda, conviene especificar cuál es la que se está usando.

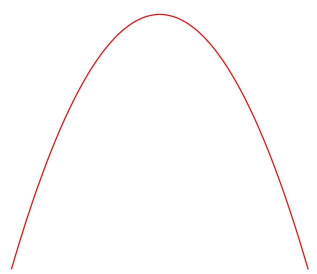


Figura 2.18: Función cóncava: su derivada es decreciente. Tiene forma de gorra o de monte.

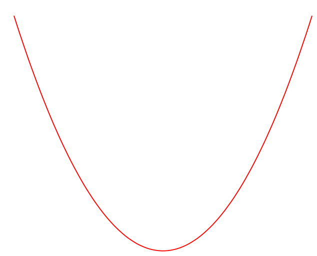


Figura 2.19: Función convexa: su derivada es creciente. Tiene forma de copa o de valle.

Como se ha visto con anterioridad, el signo de la derivada de una función indica si esta es creciente o decreciente. En consecuencia se puede utilizar el signo de «la derivada de la derivada» para determinar la convexidad o concavidad de una función.

Derivada segunda
Si la derivada de una función $f(x)$ es, a su vez, derivable, se dice que $f(x)$ es dos veces derivable, a la derivada de la derivada se le llama **derivada segunda** y se denota $f''(x)$.

Utilizando la derivada segunda de f, se tiene el siguiente criterio de convexidad/concavidad:

Criterio de convexidad / concavidad
Si $f(x)$ es dos veces derivable en (a, b), se tiene:

a) Si $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es convexa en (a, b).

b) Si $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es cóncava en (a, b).

Puntos de inflexión
Los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o viceversa se denominan **puntos de inflexión**. Utilizando el criterio anterior se tiene:

a) Si $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, c)$ y $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (c, b)$, entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = c$, en el que pasa de convexa a cóncava.

b) Si $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, c)$ y $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (c, b)$, entonces $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = c$, en el que pasa de cóncava a convexa.

Ejemplo 2.51
$f(x) = x^2$

Esta función es polinómica, luego está bien definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
Derivadas de f: $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$.
Por lo tanto se tiene $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y en consecuencia que f' es creciente y que f es convexa en $\mathbb{R}$.
f no tiene puntos de inflexión.

Ejemplo 2.52
$f(x) = x^3$

f está bien definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
Derivadas de f: $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$.
Intervalos de convexidad: f'' solo se anula para $x = 0$ y es

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'' < 0 \text{ en } (-\infty, 0) & \Rightarrow f \text{ es cóncava en } (-\infty, 0) \\ f'' > 0 \text{ en } (0, +\infty) & \Rightarrow f \text{ es convexa en } (0, +\infty) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad f \text{ tiene un punto de inflexión en } x = 0$$

2.8 Representación gráfica de funciones

Los elementos básicos descritos en el Tema 1 (dominio, ceros, signo, asíntotas), junto con la información proporcionada por la derivadas primera y segunda sobre el crecimiento o decrecimiento de la función, sus extremos relativos, su convexidad o concavidad y sus puntos de inflexión, permiten esbozar con mucho detalle la gráfica de la función.

Estos aspectos se resumen en el cuadro siguiente:

PROCEDIMIENTO PARA LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES	
SIN USAR LAS DERIVADAS	
Dominio, corte con los ejes y signo de la función:	
Dominio	Determinar el conjunto D de los valores de x para los que está definida la función
corte con el eje $OY(*)$	Calcular, si existe, el punto $(0, y)$ con $y = f(0)$.
cortes con el eje $OX(*)$	Calcular, si existen, los puntos en que la gráfica corta al eje OX, que son los puntos $(x, 0)$ donde x es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.
signo de la función $(*)$	Determinar los intervalos en donde la función es positiva y negativa $\{x \in D \,:\, f(x) > 0\}$ (la gráfica de la función está por encima del eje OX) $\{x \in D \,:\, f(x) < 0\}$ (la gráfica de la función está por debajo del eje OX)
$(*)$No es imprescindible. Sólo si es «fácil».	
A síntotas:	
asíntotas verticales	Analizar la existencia de valores de $x = k$ para los cuales se tenga $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \pm\infty$ o bien $\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \pm\infty$
asíntotas horizontales	Calcular, si existen, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Si alguno de ellos tiene un valor finito, por ejemplo k, entonces la recta $y = k$ es una asíntota horizontal.
asíntotas oblicuas	Son las rectas $y = mx + n$ tales que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx - n) = 0$ Si existen, se pueden calcular m y n mediante $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$
UTILIZANDO LAS DERIVADAS	
Monotonía:	
intervalos de crecimiento	Calcular los intervalos donde $f'(x) > 0$: en estos intervalos la función es creciente.
intervalos de decrecimiento	Calcular los intervalos donde $f'(x) < 0$: en estos intervalos la función es decreciente.
Conociendo los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función es posible determinar los máximos y mínimos locales de f.	
extremos relativos	Calcular los puntos $x = a$ tales que $f'(a) = 0$. $\begin{cases} \text{si } f''(a) > 0, \text{ x=a es un mínimo local} \\ \text{si } f''(a) < 0, \text{ x=a es un máximo local} \end{cases}$
Curvatura:	
intervalos de convexidad	Calcular los intervalos donde $f''(x) > 0$
intervalos de concavidad	Calcular los intervalos donde $f''(x) < 0$
puntos de inflexión	Calcular los puntos $x = a$ tales que $f''(a) = 0$. $\begin{cases} \text{si } f'''(a) > 0, \text{ x=a cambio cóncavo a convexo} \\ \text{si } f'''(a) < 0, \text{ x=a cambio convexo a cóncavo} \end{cases}$

Ejemplo 2.53
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Dominio de definición: $(0, +\infty)$
Corte con el eje OY: no hay, ya que el punto $x = 0$ no pertenece al dominio de definición.
Corte con el eje OX: la ecuación $\ln x = 0$ solo tiene la solución $x = 1$. Luego el único punto de corte es $(1, 0)$.
Signo de la función: claramente se tiene que $f(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$ y que $f(x) > 0$ para $x \in (1, +\infty)$. Esto nos permite ya determinar las regiones del plano donde está la gráfica (ver Figuras)
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Es decir, f tiene una asíntota horizontal para $y = 0$ cuando $x \to +\infty$
Asíntotas verticales: el único punto donde f puede tener una asíntota vertical es a la derecha de $x = 0$. Calculamos el límite correspondiente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

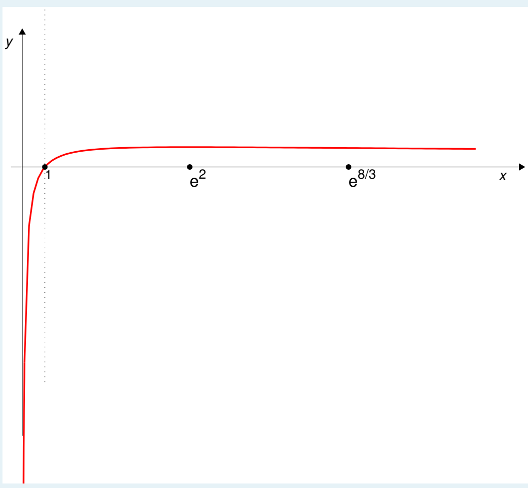
Es decir, f tiene una asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \to +\infty$

Derivada: La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Crecimiento y decrecimiento: El denominador, $2x\sqrt{x}$, es positivo en todo el dominio de definición, luego el signo de la derivada viene determinado por $2 - \ln x$, que se anula en $x = e^2$, es positivo en $(0, e^2)$ y negativo en $(e^2, +\infty)$: la función es creciente en $(0, e^2)$ y decreciente en $(e^2, +\infty)$.

Extremos: La función cambia de creciente a decreciente en el punto $x = e^2$, por lo tanto tiene un máximo en dicho punto. El valor de la función en $x = e^2$ es $f(e^2) = \dfrac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \dfrac{2}{e} \approx 0.73$.



Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-\dfrac{1}{x}2x\sqrt{x} - (2 - \ln x)3\sqrt{x}}{4x^3} = \frac{-8 + 3\ln x}{4x^{5/2}}$$

Convexidad y concavidad: La derivada segunda se anula cuando $3\ln x - 8 = 0$, es decir, para $x = e^{8/3} \approx 14.4$, y se tiene

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{en } (0, e^{8/3}) \quad \Rightarrow f \text{ es cóncava en } (0, e^{8/3}) \\ f''(x) > 0 & \text{en } (e^{8/3}, +\infty) \quad \Rightarrow f \text{ es convexa en } (e^{8/3}, +\infty) \end{cases}$$

Ejemplo 2.54
Representar gráficamente la función $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$

Dominio de definición: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Corte con el eje OY**:** no hay, ya que el punto $x = 0$ no pertenece al dominio de definición.
Corte con el eje OX**:** la función se anula cuando $2x + \dfrac{1}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = -\dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0.79$
Signo de la función: claramente se tiene que $f(x) > 0$ si $x > 0$. Por otro lado,

$$2x^3 + 1 < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^3 < \frac{-1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x < \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} f \text{ es negativa en } (-\infty, \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}) \\ f \text{ es positiva en } (\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, 0) \cup (0, +\infty) \end{cases}$$

Asíntotas horizontales: f no tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Asíntotas verticales: el único punto donde f puede tener asíntotas verticales es $x = 0$. Es obvio que la función tiende a infinito cuando x se acerca a cero y que lo hace a $+\infty$, ya que es positiva tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 0$:

$$\lim_{x\to0^-} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to0^+} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

Asíntotas oblicuas: son, si existen, las rectas $y = mx + n$ tales que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx - n) = 0$. Si existen, se pueden calcular m y n mediante $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$. En este caso:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x^3}\right) = 2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + \frac{1}{x^2}}{x}$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2} - 2x\right)$$

Es decir, la recta $y = 2x$ es una asíntota de la función, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3} \qquad \text{que solo se anula para } x = 1$$

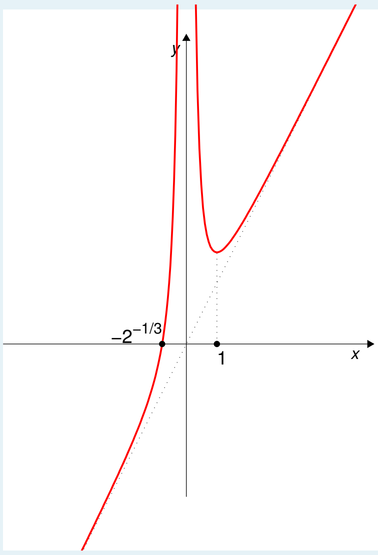
Crecimiento y decrecimiento:
Para $x < 0$ es $x^3 < 0$. Luego $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3} > 2 > 0$ en $(-\infty, 0)$.
En el intervalo $(0, 1)$, $x^3 < 1$, luego $\dfrac{2}{x^3} > 2$, luego $f'(x) < 0$.
Finalmente, en $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, ya que $\dfrac{2}{x^3} < 2$.
Resumiendo:

$$\begin{cases} f \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \\ f \text{ es decreciente en } (0, 1) \\ f \text{ es creciente en } (1, +\infty) \end{cases}$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que f tiene un mínimo en $x = 1$.
Derivada segunda:

$$f''(x) = -2\,(-3)\,x^{-4} = \frac{6}{x^4}$$

Convexidad y concavidad: La derivada segunda es siempre positiva, luego f es convexa en sus intervalos de definición.



Ejemplo 2.55
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Dominio de definición: $(-\infty, +\infty)$
Corte con el eje OY: $f(0) = 1$, luego la gráfica corta al eje OY en $(0, 1)$.
Corte con el eje OX: no hay, ya que la función no se anula en ningún punto.
Signo de la función: claramente se tiene que $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, es fácil observar que la función es simétrica, es decir, $f(x) = f(-x)$.
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Es decir, $y = 0$ es una asíntota horizontal de f.
Asíntotas verticales: no hay.
Asíntotas oblicuas: no hay, ya que hay horizontales, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

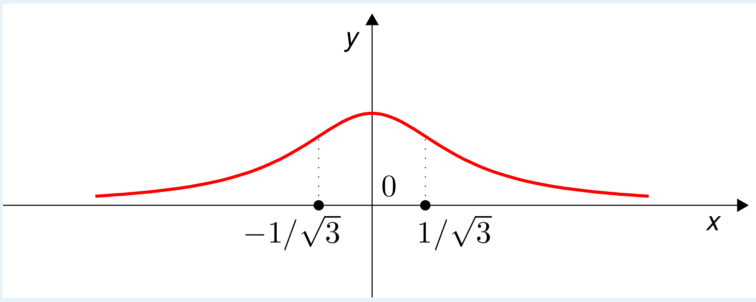
que solo se anula para $x = 0$.
Crecimiento y decrecimiento: Puesto que el denominador, $(x^2+1)^2$ es siempre positivo, es obvio $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$. Por lo tanto,

$$\begin{cases} f \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \\ f \text{ es decreciente en } (0, +\infty) \end{cases}$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que f tiene un máximo en $x = 0$, en el cual $f(0) = 1$.
Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = (x^2+1)\,\frac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^4} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

Convexidad y concavidad: La derivada segunda se anula cuando $6x^2 - 2 = 2(3x^2-1) = 0$, esto es, para $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Puesto que f tiene un máximo en $x = 0$, necesariamente ha de ser cóncava en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y convexa en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$.



Ejemplo 2.56
Representación gráfica de $f(x) = \dfrac{-x^2}{x+1}$

Dominio de definición: $(-\infty, -1) \cup (-1 + \infty)$
Corte con el eje OY: $f(0) = 0$, luego la gráfica corta al eje OY en $(0, 0)$.
Corte con el eje OX: el único es $(0, 0)$.
Signo de la función: teniendo en cuenta que el numerador es siempre negativo, claramente se tiene que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ si } x < -1 \\ f(x) < 0 \text{ si } x > -1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x+1} = +\infty$$

Es decir, la función no tiene asíntotas horizontales.
Asíntotas verticales: es claro que tiene la asíntota vertical $x = -1$. Veamos los signos:

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{-x^2}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} \frac{-x^2}{x+1} = +\infty$$

Asíntotas oblicuas: puesto que $\dfrac{-x^2}{x+1} = (-x+1) - \dfrac{1}{x+1}$, se ve que $y = -x+1$ es asíntota oblicua de $\dfrac{-x^2}{x+1}$. En efecto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x+1} - (-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x+1} + x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 + x^2 + x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1}$$

lo que prueba que, efectivamente $y = -x+1$ es asíntota oblicua, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot (x+1) - (-x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$$

que se anula para $x = 0$ y para $x = -2$.
Crecimiento y decrecimiento: Puesto que el denominador de f', $(x+1)^2$, es siempre positivo, se tiene que

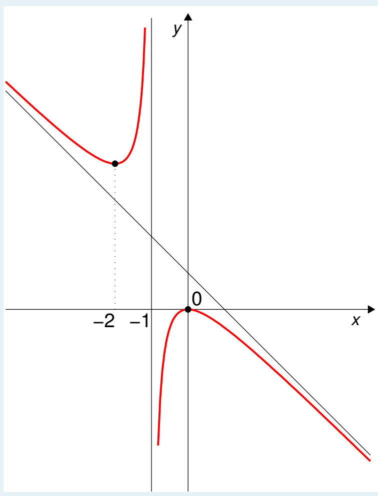
$$\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -2) \\ f'(x) > 0 \text{ en } (-2, -1) \cup (-1, 0) \\ f'(x) < 0 \text{ en } (0, \infty) \end{cases} \quad \text{y por lo tanto que} \quad \begin{cases} f \text{ es decreciente en } (-\infty, -2) \\ f \text{ es creciente en } (-2, -1) \cup (-1, 0) \\ f \text{ es decreciente en } (0, \infty) \end{cases}$$

Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que f tiene un mínimo en $x = -2$, en el cual $f(-2) = 4$, y tiene un máximo en $x = 0$, en el cual $f(0) = 0$.
Derivada segunda:

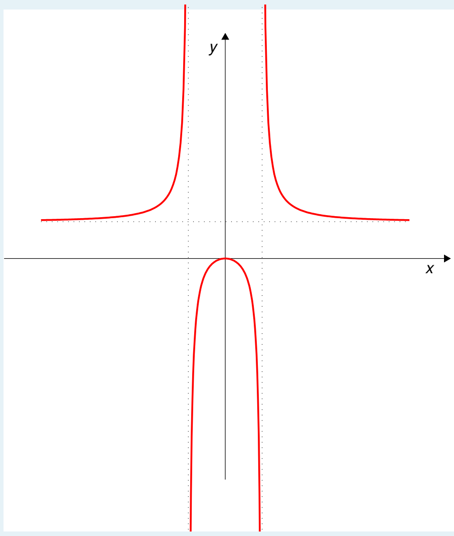
$$f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

Convexidad y concavidad: el numerador es siempre negativo. Es obvio que:

$$\begin{cases} f(x)'' > 0 \text{ si } x < -1 & \text{(convexa)} \\ f(x)'' < 0 \text{ si } x > -1 & \text{(cóncava)} \end{cases}$$



Ejemplo 2.57
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$



Dominio de definición: la función está bien definida excepto cuando $x^2 - 1 = 0$, es decir, cuando $x = \pm 1$. Luego el dominio es $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
Corte con el eje OY: el corte de la gráfica de la función con el eje OY se produce en el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$.
Corte con el eje OX: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0$, es decir $x = 0$.
Signo de la función: el numerador, x^2, es siempre positivo. Luego el signo de la función coincide con el signo del denominador:
$x^2 - 1 < 0 \iff x^2 < 1 \iff x \in (-1, 1)$.
Es decir,
$f(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$f(x) < 0$ en $(-1, 1)$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

Es decir, $y = 1$ es asíntota horizontal de f para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$.
Asíntotas verticales: las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = -1$.

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(1)^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to(1)^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

Asíntotas oblicuas: no hay, ya que hay horizontales, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

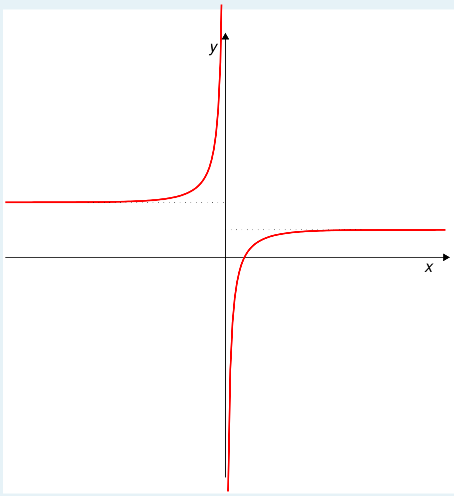
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x\,x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

que solo se anula para $x = 0$.
Crecimiento y decrecimiento: Claramente se tiene que:
$f'(x) > 0$ para $x < 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$.
$f'(x) < 0$ para $x > 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $(0, 1)$ y en $(1, \infty)$.
Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que en $x = 0$ (punto en que se anula la derivada) la función tiene un máximo local. No tiene más extremos, ya que la derivada no se anula en más puntos y la función es derivable en todos los puntos en los que está definida.
Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(x^2-1)^2 + 2x\cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-2\cdot(x^2-1) + 8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

Convexidad y concavidad: $6x^2 + 2$ es siempre positivo; $(x^2-1)^3$ es positivo cuando $|x| > 1$ y negativo si $|x| < 1$. En consecuencia f'' es positiva y por tanto f es convexa ($\cup$) en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$ y f'' es negativa y f es cóncava ($\cap$) en $(-1, 1)$

Ejemplo 2.58
Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 1}$



Dominio de definición: la función está bien definida excepto cuando $e^x - 1 = 0$, es decir, cuando $x = 0$. Luego el dominio es $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Corte con el eje OY: no hay, ya que la función no está definida en $x = 0$.
Corte con el eje OX: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0$, es decir $x = \ln(2)$.
Signo de la función:
En $(-\infty, 0)$, $e^x < 1 < 2$, luego $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} > 0$.
En $(0, \ln(2))$, se tiene $1 < e^x < 2$, luego $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} < 0$
En $(\ln(2), \infty)$, se tiene $1 < 2 < e^x$, luego $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} > 0$
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = 2$$

Es decir, $y = 1$ es asíntota horizontal de f para $x \to +\infty$ e $y = 2$ lo es para $x \to -\infty$.
Asíntotas verticales: la única posible asíntota vertical es $x = 0$, es decir, el eje OY,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = -\infty$$

Asíntotas oblicuas: no hay, ya que hay horizontales, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.
Derivada:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

que no se anula en ningún punto.
Crecimiento y decrecimiento: La derivada es siempre positiva, ya que lo son numerador y denominador. Por tanto f es creciente en cada uno de sus intervalos de definición.
Extremos: como consecuencia de lo anterior se tiene que f no tiene extremos locales, puesto que la derivada no se anula en ningún punto y no hay otros posibles extremos, dado que f es derivable en todos los puntos en los que está definida.
Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)^2 - 2e^x(e^x - 1)e^x}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x(e^x - 1) - 2e^x e^x}{(e^x - 1)^3} = \frac{e^{2x} - e^x - 2e^{2x}}{(e^x - 1)^3} = \frac{-e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^3} = \frac{-(e^{2x} + e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

Convexidad y concavidad: Hay que estudiar el signo de la derivada segunda.
El numerador, $-(e^{2x} + e^x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. El denominador, $(e^x - 1)^3$ es negativo en $(-\infty, 0)$ (ya que $e^x < 1$), y es positivo en $(0, +\infty)$ (ya que $e^x > 1$). En consecuencia

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ en } (-\infty, 0) \\ f''(x) < 0 \text{ en } (0, +\infty) \end{cases}$$

Luego $f(x)$ es convexa ($\cup$) en $(-\infty, 0)$ y cóncava ($\cap$) en $(0, +\infty)$.

2.9 Aproximación de funciones por polinomios: polinomio de Taylor

En muchas ocasiones interesa sustituir una función (más o menos complicada o "difícil" de calcular) por otra función más sencilla que "se parezca" a ella (en algún sentido a precisar). Estas funciones más sencillas con frecuencia son polinomios, debido a que su evaluación solo requiere hacer sumas y multiplicaciones.

El "parecido" del polinomio con la función se puede buscar de distintas formas: podemos requerir que el polinomio se parezca mucho a la función cerca de un punto dado o bien que se parezca "en algo" de forma más global (un intervalo, por ejemplo). En esta sección nos interesamos por la primera de estas opciones: un polinomio que se parezca mucho a una función cerca de un punto dado.

Comenzamos por el caso más sencillo: sustitución de una función por una recta.

2.9.1 Aproximación lineal

Recordemos el concepto de recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto dado $x = c$: Es una recta que "toca" a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ con igual pendiente que la curva. La ecuación de esta recta se puede obtener fácilmente conociendo el valor de $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$ en el punto $x = c$:

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

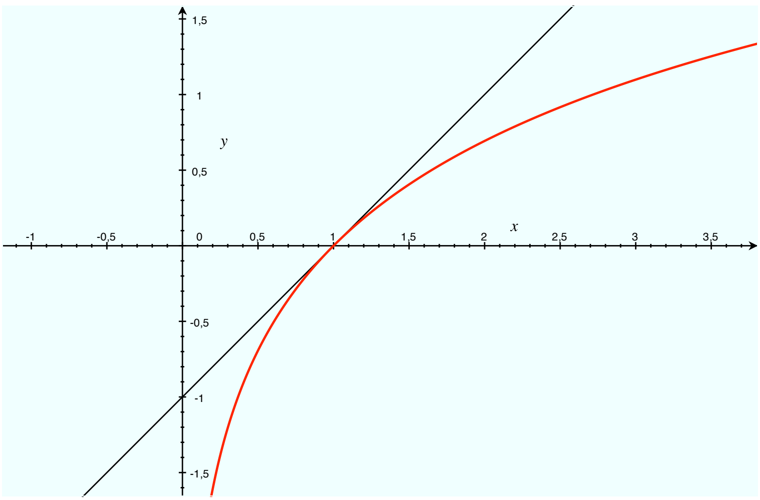


Figura 2.20: Curva $y = \ln(x)$ y su recta tangente en el punto $x = 1$, de ecuación $y = x - 1$.

Como se puede observar, la recta tangente, cerca del punto de tangencia, "se parece" mucho a la función. Por ejemplo, en el caso de la Figura 2.20, en el punto $x = 0.95$ el valor de f es $f(0.95) = -0.0513$ y el valor en el mismo punto de la tangente es $0.95 - 1 = -0.05$.

Esto sugiere la idea de que, cerca del punto $x = 1$, se puede aproximar la función $y = \ln(x)$ por su tangente en dicho punto $y = x - 1$. Obviamente, esta aproximación solo es válida si x está cerca de 1, es decir, si $|x - 1|$ es suficientemente pequeño.

Con carácter general,

Aproximación lineal de $y = f(x)$ en $x = c$

Si $f(x)$ es derivable en $x = c$, se llama **aproximación lineal** de $f(x)$ en $x = c$ a la función

$$h(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Esta técnica puede ser útil para calcular aproximadamente el valor de una función en un punto cercano a otro en el que se conoce el valor de la función y su derivada, como en el Ejemplo 2.59.

Pero es sobre todo útil cuando se desea, para cálculos ulteriores, sustituir la expresión de una función $f(x)$ cerca de un punto, por la expresión de una función más "manejable" (su recta tangente), como en el Ejemplo 2.60.

Ejemplo 2.59
Calcular una aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ y utilizar dicha aproximación para calcular el valor de $\sqrt{50}$ (sin calcular raíces).

Puesto que la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, la aproximación lineal de f cerca de un punto a es:

$$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = \sqrt{a} + \frac{x-a}{2\sqrt{a}}$$

En particular, para $x = 49$, se tiene $\sqrt{49} = 7$ y

$$h(x) = f(49) + f'(49)(x-49) = \sqrt{49} + \frac{x-49}{2\sqrt{49}} = 7 + \frac{x-49}{14}$$

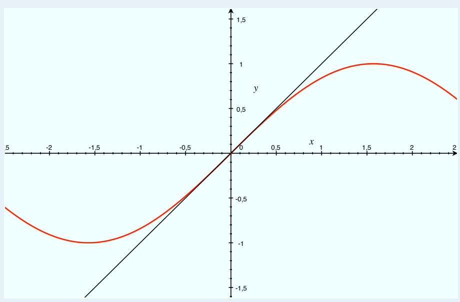
Entonces, se puede aproximar $\sqrt{50}$ por el valor $h(50) = 7 + \dfrac{50-49}{14} = 7 + \dfrac{1}{14} \approx 7.0714$

Ejemplo 2.60
Calcular una aproximación lineal de $f(x) = \operatorname{sen} x$ cerca de $x = 0$.

Puesto que la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$, la aproximación lineal de f cerca del punto $x = 0$ es:

$$h(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = \operatorname{sen} 0 + (\cos 0)\, x = x$$

Es decir, cerca de $x = 0$, la función $\operatorname{sen} x$ se aproxima linealmente por la recta $y = x$.
De hecho, es esta una sustitución frecuente, válida para valores pequeños de x.



2.9.2 Polinomio de Taylor

Ya se ha visto, en la subsección 2.9.1, cómo se puede utilizar la recta tangente para aproximar linealmente una función cerca de un punto.

Podemos pensar que obtendremos una mejor aproximación si aproximamos f no ya por un polinomio de grado 1, sino por un polinomio de grado 2. Nos planteamos ahora construir el polinomio de grado 2 cuya primera y segunda derivadas en c coincidan con las de f. Denotemos este polinomio por

$$t_2(x) = a_2(x-c)^2 + a_1(x-c) + a_0.$$

Sus derivadas primera y segunda son $t_2'(x) = 2a_2(x-c) + a_1$ y $t_2''(x) = 2a_2$.
Y los valores de $t_2(x)$, $t_2'(x)$ y $t_2''(x)$ en $x = c$ son:

$$t_2(c) = a_0, \quad t_2'(c) = a_1, \quad t_2''(c) = 2a_2.$$

Lo que deseamos es que t_2 y sus derivadas tomen los mismos valores que f y sus derivadas en $x = c$. Imponiendo estas condiciones, se tiene:

$$\begin{cases} t_2(c) = a_0 = f(c) \\ t_2'(c) = a_1 = f'(c) \\ t_2''(c) = 2a_2 = f''(c) \Rightarrow a_2 = \dfrac{1}{2}f''(c) \end{cases}$$

Así pues, el polinomio que buscamos es:

$$t_2(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + f'(c)(x-c) + f(c).$$

Con carácter general, repitiendo este proceso, podemos construir un polinomio de grado n (cualquiera),

$$t_n(x) = a_n(x-c)^n + \cdots a_3(x-c)^3 + a_2(x-c)^2 + a_1(x-c) + a_0$$

cuyas derivadas sucesivas en $x = c$ hasta las de orden n coincidan con las de f.
Las derivadas de t_n y su valor en $x = c$ son

$$t_n(x) = a_n(x-c)^n + \cdots a_3(x-c)^3 + a_2(x-c)^2 + a_1(x-c) + a_0 \quad \Rightarrow \quad t_n(c) = a_0 = f(c)$$

$$t_n'(x) = na_n(x-c)^{n-1} + \cdots 3a_3(x-c)^2 + 2a_2(x-c) + a_1 \quad \Rightarrow \quad t_n'(c) = a_1 = f'(c)$$

$$t_n''(x) = n(n-1)a_n(x-c)^{n-2} + \cdots + 6a_3(x-c) + 2a_2 \quad \Rightarrow \quad t_n''(c) = 2a_2 = f''(c)$$

$$t_n'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n(x-c)^{n-3} + \cdots 6a_3 \quad \Rightarrow \quad t_n'''(c) = 6a_3 = 3 \cdot 2a_3 = f'''(c)$$

En general, la derivada k-ésima de t_n es

$$t_n^{k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k} + \cdots + k!\, a_k \quad \Rightarrow \quad t_n^{k)}(c) = k! \cdot a_k = f^{k)}(c)$$

Si k es un número entero positivo, la expresión $k!$ se lee k *factorial* y representa el producto de k por todos los enteros positivos menores que k:

$$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3) \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Por ejemplo, $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5040$.
Despejando los valores de a_1, a_2, $\dots a_n$ de las igualdades anteriores, finalmente se encuentra la expresión de $t_n(x)$:

$$t_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{n)}(c)(x-c)^n.$$

Polinomio de Taylor de $f(x)$ en torno al punto c

Es el polinomio

$$t_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{n)}(c)(x-c)^n,$$

que coincide con f y con todas sus derivadas hasta la de orden n en el punto $x = c$.

En particular, la recta tangente en $x = c$ es el polinomio de Taylor de orden 1 en $x = c$.

Para muchas funciones los sucesivos polinomios de Taylor proporcionan aproximaciones a f que mejoran al aumentar el grado n. Obviamente deben ser funciones que sean derivables hasta cualquier orden en $x = c$ (se dice que son *indefinidamente derivables*).

Ejemplo 2.61

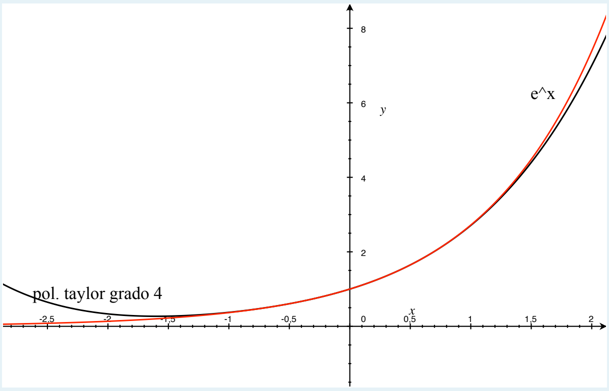
Construir el polinomio de Taylor de orden 4 de la función exponencial $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

Su derivada coincide con ella misma: $f'(x) = e^x$, y por tanto todas sus derivadas de cualquier orden también: $f^{n)}(x) = e^x$, $\forall n = 0, 1, 2, \cdots$. Por tanto,

$$f^{n)}(0) = 1, \quad \forall n = 0, 1, 2, \cdots,$$

y su polinomio de Taylor de orden 4 en $x = 0$ es

$$t_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$



2.9.3 Estimación del error que se comete al aproximar una función por su polinomio de Taylor

Es importante poder determinar el error que se comete al aproximar una función por su polinomio de Taylor. En otro caso, la aproximación quedaría en buena medida indeterminada. Este error viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) - t_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,(x-c)^{n+1}, \quad \text{para cierto punto} \quad \xi \in (\text{mín}\{x, c\}, \text{máx}\{x, c\}). \tag{2.2}$$

La expresión $\xi \in (\text{mín}\{x, c\}, \text{máx}\{x, c\})$ significa que ξ está entre x y c, independientemente de cuál de los dos es mayor que el otro.[2]

La expresión del error es *parecida* a la expresión del término correspondiente a $n+1$ en la expresión de $t_{n+1}(x)$. Esto ayuda a recordarla.

La igualdad anterior (2.2) para la expresión del error del polinomio de Taylor presenta una situación muy habitual en el análisis matemático: se puede demostrar rigurosamente que **existe** un punto ξ entre x y c para el cual es **cierta** la igualdad, **pero no se sabe cuál es ese punto**.

Entonces, ¿para qué sirve? O –mejor planteado– ¿podemos extraer alguna información útil de la igualdad (2.2) a pesar de no saber cuál es el punto ξ?

La respuesta es: sí podemos, siempre que podamos saber cuáles son los valores máximos que puede tomar $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$ entre x y c.

[2] La ξ es la decimocuarta letra del alfabeto griego y se pronuncia [ksi].

Ejemplo 2.62
Estimar el error que se comete cuando se aproxima el valor de e^{-2} por el valor del polinomio de Taylor de grado 4 en $x = 0$.

El polinomio de Taylor de orden 4 de la función e^x en torno a $x = 0$ es, como hemos visto antes

$$t_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Según la fórmula (2.2), el error que cometemos si lo utilizamos para aproximar e^{-2} es

$$e^{-2} - t_4(-2) = \frac{1}{(4+1)!}e^{\xi}(-2)^{4+1} = \frac{1}{5!}e^{\xi}(-2)^5 \quad \text{para cierto } \xi \text{ entre } -2 \text{ y } 0.$$

Normalmente, lo que interesa del error es su valor absoluto, así que:

$$|e^{-2} - t_4(-2)| = \left|\frac{1}{(4+1)!}e^{\xi}(-2)^{4+1}\right| = \frac{1}{5!}e^{\xi}2^5 = \frac{32}{120}e^{\xi}, \quad \text{para cierto } \xi \text{ entre } -2 \text{ y } 0.$$

El punto ξ no es conocido, pero sí sabemos que está entre -2 y 0 (es decir, en el intervalo $(-2, 0)$). Puesto que e^x es creciente, el máximo valor que puede alcanzar e^{ξ} en $(-2, 0)$ es $e^0 = 1$ Por ello, podemos *estimar* (o sea, acotar) el error cometido por

$$|e^{-2} - t_4(-2)| = \frac{32}{120}e^{\xi} \leq \frac{32}{120} \approx 0.2666.$$

Se puede usar la expresión (2.2) para aproximar una función con un error predeterminado mediante su polinomio de Taylor.

En el caso del ejercicio anterior, si, por ejemplo, queremos aproximar el valor e^{-2} con 6 cifras decimales exactas, nuestro objetivo será determinar n de modo que $|e^{-2} - t_n(x)| \leq 10^{-6}$. Según la estimación (2.2), bastará que

$$\frac{1}{(n+1)!}e^{-2}2^{(n+1)} \leq 10^{-6}.$$

Ahora bien, $e^{-2} < e^0 = 1$, luego

$$\frac{1}{(n+1)!}e^{-2}2^{(n+1)} < \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!} \leq 10^{-6}.$$

Un cálculo muestra que si $n = 13$, el error es $1.88 \times 10^{-7} = 0.000000188$ y si $n = 12$, el error es $1.31 \times 10^{-6} = 0.00000131$.

Tomamos, pues, $n = 13$, con lo que $t_{13}(-2) = 0.1353351175573398$ proporciona una aproximación a $e^{-2} = 0.1353352832366127$ con, al menos, 5 cifras decimales exactas.

2.10 Optimización

La optimización matemática trata de resolver problemas en los que interesa **maximizar** una determinada cantidad (por ejemplo, un beneficio, una velocidad, la eficiencia de un sistema,. . .) o por el contrario **minimizar** algún criterio (por ejemplo, un coste, un riesgo, el tiempo empleado en algo, . . .).

La cantidad ó criterio a optimizar suele venir dado por una función dependiente de una o varias variables a la que con frecuecia se llama **función coste** o **funcion objetivo**. Se trata, pues, de encontrar para qué valores de las variables se produce el máximo (ó mínimo) de la función coste.

Con mucha frecuencia, en este tipo de problemas las variables de las que depende la función beneficio no son completamente independientes: deben verificar ciertas condiciones, denominadas **restricciones**. Normalmente, a partir de dichas restricciones, se puede encontrar la dependencia de alguna variable respecto de las otras.

Ejemplo 2.63
Encontrar las dimensiones que debe tener un rectángulo de perímetro igual a 4 cm para que su área sea lo más grande posible.

Las dimensiones del rectágulo son **base**, a la que llamaremos x, y **altura**, a la que llamaremos y. Ambas son las variables que intervienen en este problema.
El perímetro de un rectángulo (suma de las longitudes de sus lados) viene dado por $P(x, y) = 2x+2y$. Su área viene dada por $A(x, y) = x \cdot y$. Obviamente, ambas dimensiones deben ser números estrictamente positivos.
El problema que se plantea es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } A = xy \\ \text{sujeto a } \left\{ \begin{array}{l} P(x,y) = 2x + 2y = 4 \\ x > 0, \;\; y > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

A partir de la restricción $2x + 2y = 4$ se puede deducir la dependencia de y con respecto de x (o al contrario, de x con respecto de y):

$$2x + 2y = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{4 - 2x}{2} = 2 - x$$

En consecuencia, puesto que para los rectángulos «admisibles» (aquéllos cuyo perímetro es de 4 cm), la dimensión y viene dada a partir de la dimensión x, su área se puede escribir

$$A = xy = x(2 - x)$$

y el problema de optimización anterior se escribe ahora, en función de una sola variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } A = x(2 - x) \\ \text{sujeto a } x > 0 \end{array} \right.$$

Para resolver este problema hay que hallar el máximo global de la función $A(x) = x(2 - x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.
La función A es continua y derivable en todo el intervalo $(0, +\infty)$. Se tiene

$$A'(x) = 2 - 2x, \quad \text{que solo se anula para } x = 1 \text{ y se tiene } \left\{ \begin{array}{l} A' > 0 \text{ en } (0, 1) \\ A' < 0 \text{ en } (1, +\infty) \end{array} \right.$$

Está claro, pues, que A tiene un máximo local en $x = 1$ y este es el único candidato a máximo global, ya que los extremos del intervalo no están incluidos en el mismo.
Así pues la dimensión x (base) optima es $x = 1$. La altura óptima será $y = 2 - x = 1$.
Solución: el rectángulo de perímetro 4cm y área máxima es un cuadrado de lado 1cm.

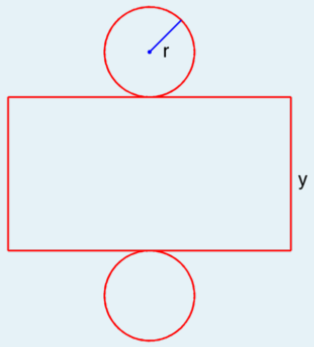
Ejemplo 2.64

Un conservero debe fabricar botes cilíndricos de 1 litro para envasar tomate frito. Determinar las dimensiones que debe tener el bote para que se fabrique con la menor cantidad posible de hojalata.

En primer lugar identificamos los datos del problema: las dimensiones de un cilindro son el radio de su base, que llamaremos r y su altura, que llamaremos y. Utilizaremos como unidades los centímetros.

El volumen del cilindro es igual al área de su base ($\pi\, r^2$) multiplicada por la altura del cilindro (y):

$$V(r, y) = \pi\, r^2\, y$$



Por otro lado, la superficie total de la lata está formada por la superficie cilíndrica más las dos tapas circulares.

La superficie cilíndrica, desarrollada, es un rectángulo de base igual a la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$) y de altura y, luego su área (longitud de la base por la altura) es $2\pi r y$.
El área de cada tapa es πr^2.

Finalmente, pues, el área total de la superficie que rodea la lata es: $A(r, y) = 2\pi r y + 2\pi r^2$
De lo que se trata, pues es de resolver el problema:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } A(r, y) = 2\pi r y + 2\pi r^2 \\ \text{sujeto a } \begin{cases} V(r, y) = \pi\, r^2\, y = 1000 \quad (1\,\text{litro} = 1000\,\text{cm}^3) \\ r > 0,\;\; y > 0 \end{cases} \end{cases}$$

De la restricción $V(r, y) = 1000$ se puede deducir la relación que liga r con y:

$$V(r, y) = \pi\, r^2\, y = 1000 \quad \text{de donde} \quad y = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Sustituyendo esta expresión de y en función de r en la fórmula del área total de la superficie nos queda esta última expresada **solo** en función de r:

$$A(r) = 2\pi r y + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2 = \frac{2000 + 2\pi r^3}{r}$$

De lo que se trata, pues, es de encontrar para qué valor de r se consigue que esta área sea **mínima**:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } A(r) = \dfrac{2000 + 2\pi r^3}{r} \\ \text{sujeto a } r > 0 \end{cases}$$

es decir, de calcular el mínimo de la función $A(r)$ en $(0, +\infty)$. Esta función es continua y derivable en $(0, +\infty)$ y se tiene:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2000 + 2\pi r^3}{r} = +\infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{2000 + 2\pi r^3}{r}$$

La derivada $A'(x) = \dfrac{6\pi r^3 - (2000 + 2\pi r^3)}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$ se anula para $r = \sqrt[3]{\dfrac{2000}{4\pi}} \approx 5.42\,\text{cm}$ que solo puede ser un mínimo debido a que A tiende a $+\infty$ en los extremos del intervalo $(0, +\infty)$ y no hay más puntos críticos.
En consecuencia, el radio óptimo para la base de la lata es de $5.42\,\text{cm}$ y la altura correspondiente es

$$y = \frac{1000}{\pi r^2} \approx \frac{1000}{\pi \cdot (5.42)^2} \approx 10.83$$

En resumen, las dimensiones óptimas de la lata son:

$$\text{Radio de la base} = 5.42\,\text{cm} \quad \text{y} \quad \text{altura} = 10.83\,\text{cm}$$

Ejemplo 2.65

Se desea construir una nave industrial de base cuadrada y cubierta plana cuyo volumen sea $V = 100\,\mathrm{m}^3$. Los costes de construcción son de 100 euros por cada m^2 de pared lateral y de 200 euros por cada m^2 de cubierta. ¿Cómo deben elegirse las dimensiones de la nave para que el coste de construcción sea mínimo ?

Las dimensiones de la nave son: la longitud del lado del cuadrado que forma la base, que llamaremos x y la altura de la nave, que llamaremos y. Utilizaremos como unidad de longitud el metro.
El volumen encerrado dentro de la nave viene dado por el área de la base multiplicada por la altura. El área de la base es x^2, luego

$$V(x, y) = x^2 y\,\mathrm{m}^3$$

Por otra parte, la nave tendrá 4 paredes iguales, cada una de las cuales tiene un área de xy, luego el área total de las paredes es $4xy$. La cubierta tiene la misma área que la base: x^2.
El costo de construcción, por lo tanto vendrá dado por:

$$C(x, y) = 100\,4xy + 200\,x^2 = 400xy + 200x^2$$

El problema que se desea resolver es, en consecuencia:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \; C(x, y) = 400xy + 200x^2 \\ \text{sujeto a } \; \begin{cases} V(x, y) = x^2 y = 100 \\ x, y > 0 \end{cases} \end{cases}$$

De la restricción $x^2 y = 100$, que impone una relación entre las variables, se puede despejar (por ejemplo) la variable y en función de la variable x:

$$y = \frac{100}{x^2}$$

Entonces, sustituyendo esta expresión de y en función de x en nuestro problema, este se reduce a uno de minimización en una variable:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } \; C(x) = 400x\dfrac{100}{x^2} + 200x^2 = \dfrac{40000}{x} + 200x^2 \\ \text{para } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Se trata, pues, de calcular el máximo de la función $C(x)$ en el intervalo $(0, -\infty)$. Esta función es continua y derivable en $(0, +\infty)$ y se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{40000}{x} + 200x^2 = +\infty \quad \text{ y } \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{40000}{x} + 200x^2 = +\infty$$

Su derivada $C'(x) = \dfrac{-40000}{x^2} + 400x = \dfrac{-40000 + 400x^3}{x^2}$ se anula cuando $-40000 + 400x^3 = 0$, es decir, para

$$x = \sqrt[3]{\frac{40000}{400}} = \sqrt[3]{100} \quad \text{ y se tiene } \quad \begin{cases} f \text{ es decreciente en } (0, \sqrt[3]{100}) \\ f \text{ es creciente en } (\sqrt[3]{100}, +\infty) \end{cases}$$

Es claro, por lo tanto, que $C(x)$ tiene un mínimo local en $x = \sqrt[3]{100}$ que, por lo visto antes, también es mínimo global en el intervalo $(0, +\infty)$. Así pues, la solución al problema es $x = \sqrt[3]{100}$ y en consecuencia

$$y = \frac{100}{x^2} = \frac{100}{\left(\sqrt[3]{100}\right)^2} = \frac{100}{100^{2/3}} = 100^{1/3} = \sqrt[3]{100}$$

La opción óptima es construir una nave con forma de cubo de lado $\sqrt[3]{100}$.

Ejemplo 2.66
Se estima que el precio de mercado de un cierto producto ganadero durante el año próximo vendrá dado por la función

$$p(t) = -2(t+1)(t-13), \quad t \in [0, 12]$$

donde la variable t representa el tiempo medido en meses. Por otra parte, el coste de producción de dicho producto viene dado por

$$c(t) = 4 + 20\ln(1+t), \quad t \in [0, 12]$$

Se desea calcular cuál es el momento óptimo para poner a la venta el producto obteniendo el máximo beneficio posible.

El beneficio obtenido al poner a la venta el producto en el instante t vendrá dado por la diferencia entre el precio de venta y el coste de producción, es decir

$$f(t) = -2(t+1)(t-13) - 4 - 20\ln(1+t) = -2t^2 + 24t + 22 - 20\ln(1+t)$$

Es preciso, pues, hallar el máximo absoluto de esta función en el intervalo $[0, 12]$.
Los candidatos (puntos que hay que estudiar) son:

- los máximos locales
- los extremos del intervalo

La función f está definida y es continua y derivable en el intervalo $[0, 12]$, ya que el argumento del logaritmo, $(1+t)$, es positivo en dicho intervalo.
En los extremos del intervalo se tiene

$$f(0) = 22, \qquad f(12) = -488 + 488 + 22 - 20\ln(13) \approx -29.3$$

Veamos en qué puntos se anula la derivada (puntos críticos):

$$f'(t) = -4t + 24 - 20\frac{1}{1+t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-4t+24)(1+t) = 20 \quad \Leftrightarrow \quad -4t^2 + 20t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{400+64}}{-8} = \begin{cases} t = t_1 = \approx 5.2 \\ t = t_2 = \approx -0.2 \end{cases}$$

Obviamente, solo el punto t_1 pertenece al intervalo $[0, 12]$, y para él se tiene

$$f(t_1) \approx f(5.3) = 56.2$$

de donde se deduce que el máximo beneficio se obtiene vendiendo tras 5.3 meses.

Tema 3

Integración

Versión: 1 de octubre de 2019

3.1 La integral indefinida: cálculo de primitivas

La integral indefinida ó cálculo de primitivas es, en cierto modo, un proceso " inverso" al de calcular la derivada de una función. Dada una función $f(x)$ nos planteamos ¿es f la derivada de alguna función? Y, si lo es, ¿cómo podemos calcularla?

Primitiva de una función

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función. Si $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ verifica que $F' = f$, se dice que F es una **primitiva de f** y se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

Esta definición lleva implícito el hecho de que F es derivable en (a,b).

Ejemplo 3.1

1. Sea $f(x) = 0,\ \forall x$. Es obvio que $F(x) = 1$ es una primitiva de f, ya que $F'(x) = 0 = f(x)$. Pero también $F(x) = 9$ es una primitiva de f.
2. Sea $f(x) = 2x$. Es obvio que $F(x) = x^2$ verifica $F'(x) = 2x = f(x)$ y que, por lo tanto, F es una primitiva de f. Pero también $F(x) = x^2 + 3$ es una primitiva de f. De hecho, cualquier función de la forma $F(x) = x^2 + C$, con $C \in \mathbb{R}$ cualquiera, lo es.
3. Es obvio, asimismo, que $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una primitiva de $f(x) = \cos x$ y que, también, cualquier función de la forma $F(x) = \operatorname{sen} x + C$, con $C \in \mathbb{R}$ cualquiera, lo es.

Diferencia de dos primitivas
Si F_1 y F_2 son dos primitivas de la misma función, f, entonces su diferencia es una función constante:

$$F_1 - F_2 = C$$

Dicho de otro modo, si F es una primitiva de f, cualquier otra primitiva es de la forma $F(x) + C$, siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.2

1. $\displaystyle\int 4x\,dx = 2x^2 + C$
2. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
3. $\displaystyle\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}\,e^{4x} + C$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$

Ejemplo 3.3
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$

La función $\dfrac{1}{x}$ tiene la primitiva obvia $\ln x$, definida en $(0, +\infty)$.

Sin embargo, veremos que tiene otra primitiva definida en el mismo dominio en que está definida $\dfrac{1}{x}$. Sea:

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, y su derivada viene dada por:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{-1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

3.1.1 Integrales inmediatas

A partir de la tabla de derivadas de las funciones elementales, sin más que consultarla en sentido inverso, podemos deducir cual es la primitiva de unas cuantas funciones sencillas, que se exponen en la tabla de integrales inmediatas que se incluye más abajo. También figuran en la tabla las integrales, consideradas también inmediatas, que se resuelven utilizando en sentido inverso la Regla de la Cadena.

Funciones compuestas Supongamos que F es una primitiva de f, es decir, que $F'(x) = f(x)$. Sea $h(x) = F(g(x))$. Se tiene, por la Regla de la Cadena,

$$h'(x) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

luego

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int h'(x)\, dx = h(x) + C = F(g(x)) + C$$

PROPIEDADES	
Si $k \in \mathbb{R}$, $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$	$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
Cambio de variable	$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \left[\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)\, dx \end{array} \right] = \int f(t)\, dt$
Integración por partes	$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

Funciones elementales	Funciones compuestas
Si $\alpha \neq -1$, $\int x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$	Si $\alpha \neq -1$, $\int g(x)^\alpha\, g'(x)\, dx = \frac{1}{\alpha+1} g(x)^{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{g(x)}\, g'(x)\, dx = \ln\lvert g(x)\rvert + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int e^{g(x)}\, g'(x)\, dx = e^{g(x)} + C$
$\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$	$\int a^{g(x)}\, g'(x)\, dx = \frac{1}{\ln a} a^{g(x)} + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen}(g(x))\, g'(x)\, dx = -\cos(g(x)) + C$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos(g(x))\, g'(x)\, dx = \operatorname{sen}(g(x)) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(g(x))}\, g'(x)\, dx = \operatorname{tg}(g(x)) + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(g(x))}\, g'(x)\, dx = -\operatorname{ctg}(g(x)) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\int \frac{1}{1+g(x)^2}\, g'(x)\, dx = \operatorname{arc\,tg}(g(x)) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\, g'(x)\, dx = \operatorname{arc\,sen}(g(x)) + C$

Ejemplo 3.4
$$\int \left(3x^2 - x + 4\right)\, dx$$

Se trata de una suma de integrales inmediatas, ya que cada sumando es una potencia de x:

$$\int \left(3x^2 - x + 4\right)\, dx = \int 3x^2\, dx - \int x\, dx + 4 \int dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

Ejemplo 3.5
$$\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^3}\, dx$$

Desarrollando la fracción, se convierte en una suma de potencias de x:

$$\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^3}\, dx = \int \left(\frac{x^2}{x^3} - \frac{\sqrt{x}}{x^3}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - x^{-5/2}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-5/2}\, dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{\frac{-5}{2}+1}\, x^{\frac{-5}{2}+1} + C = \ln|x| - \frac{1}{-3/2}\, x^{-3/2} + C = \ln|x| + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}} + C$$

Ejemplo 3.6
$$\int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2\sqrt{x}}\right) dx$$

$$\int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(3e^{-2x} + x^{-2} + 4x^{-5/2}\right) dx = 3\int e^{-2x}\, dx + \int x^{-2}\, dx + 4\int x^{-5/2}\, dx$$

El segundo y tercer sumando son integrales de potencias de x. En la primera integral, multiplicando y dividiendo por -2 se tiene la derivada de e^{-2x}:

$$3\int e^{-2x}\, dx = 3\int \frac{-2}{-2}\, e^{-2x}\, dx = \frac{3}{-2}\int -2\, e^{-2x}\, dx = -\frac{3}{2}e^{-2x}$$

Luego se tiene

$$\int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2\sqrt{x}}\right) dx = -\frac{3}{2}\, e^{-2x} + \frac{1}{(-2+1)}\, x^{-2+1} + 4\, \frac{1}{\frac{-5}{2}+1}\, x^{\frac{-5}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{3}{2}\, e^{-2x} - x^{-1} + 4\frac{-2}{3}\, x^{-3/2} + C = -\frac{3}{2}\, e^{-2x} - \frac{1}{x} - \frac{8}{3}\, \frac{1}{\sqrt{x^3}} + C$$

Ejemplo 3.7
$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

Se observa que $\cos x$ es la derivada de $\operatorname{sen} x$ y que se trata de una integral del tipo $\displaystyle\int g(x)^\alpha\, g'(x)\, dx$ para $\alpha = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, para la cual se tiene

$$\int g(x)\ g'(x)\, dx = \frac{1}{2}\, g(x)^2 + C$$

En consecuencia,

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\, \operatorname{sen}^2 x + C$$

Ejemplo 3.8
$$\int x\sqrt{1+5x^2}\, dx$$

Se observa que la derivada del radicando $1+5x^2$ es $10x$ y que si en la integral multiplicamos y dividimos por 10 tenemos:

$$\int x\sqrt{1+5x^2}\, dx = \int \frac{10}{10}\, x\sqrt{1+5x^2}\, dx = \frac{1}{10}\int 10\, x\sqrt{1+5x^2}\, dx$$

Es decir, para $g(x) = 1+5x^2$, tenemos:

$$\frac{1}{10}\int g(x)^{1/2}\, g'(x)\, dx = \frac{1}{10}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\, g(x)^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{10}\,\frac{2}{3}\, g(x)^{3/2} + C$$

Luego, finalmente

$$\int x\sqrt{1+5x^2}\, dx = \frac{1}{10}\,\frac{2}{3}\,(1+5x^2)^{3/2} + C = \frac{1}{15}\,\sqrt{(1+5x^2)^3} + C$$

Ejemplo 3.9
$$\int \frac{1}{x-1}\, dx$$

Observando que la derivada de $x-1$ es 1 se ve que tenemos una integral del tipo

$$\int \frac{1}{g(x)} g'(x)\, dx = \ln|g(x)| + C$$

luego

$$\int \frac{1}{x-1}\, dx = \ln|x-1| + C$$

3.1.2 Cambio de variable

En muchas ocasiones, para calcular integrales suele ser útil utilizar la técnica del cambio de variable. Esta técnica consiste en elegir como nueva variable una cierta función de la actual y sustituirla en la integral, buscando, naturalmente, encontrar así una integral más fácil de calcular. Para ello, conviene conocer una notación diferente para la derivada de una función:

Observación: notación de la derivada
Sea $y = f(x)$. Todas las notaciones siguientes representan la derivada de f:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

dy se lee «diferencial de y» y dx se lee «diferencial de x». $\dfrac{dy}{dx}$ se lee «derivada de y con respecto de x».
$\dfrac{df}{dx}(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x)$ se leen « derivada de f con respecto de x" y cobran pleno sentido cuando se trata con funciones que dependen de más de una variable, en cuyo caso es necesario especificar respecto de qué variable se está derivando.

Cambio de variable
Si llamamos $t = g(x)$, con la notación $\dfrac{dt}{dx} = g'(x)$, y tratando dx y dt como si fueran cualesquiera variables, se puede escribir $dt = g'(x)\,dx$.
Entonces se tiene, sustituyendo en la integral $g(x)$ por t y $g'(x)dx$ por dt:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

Luego, si F es una primitiva de f, se tendrá $\displaystyle\int f(t)\,dt = F(t) + C$, y por lo tanto

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Ejemplo 3.10
$\displaystyle\int \frac{3}{2x+1}\,dx$
Eligiendo $t = 2x+1$ se tiene $dt = 2\,dx$ o lo que es lo mismo $\dfrac{1}{2}dt = dx$, luego

$$\int \frac{3}{2x+1}\,dx = 3\int \frac{1}{2x+1}\,dx = 3\int \frac{1}{t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{3}{2}\ln|t| + C = \ln|t|^{3/2} + C = \ln\sqrt{|t|^3} + C = \boxed{\ln\sqrt{|2x+1|^3} + C}$$

Ejemplo 3.11
$\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$
Eligiendo $t = x-2$ se tiene $dt = dx$, luego

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = \boxed{\frac{-1}{x-2} + C}$$

Ejemplo 3.12 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)^4}\,dx$

Eligiendo $t = x+3$ se tiene $dt = \,dx$, luego

$$\int \frac{1}{(x+3)^4}\,dx = \int \frac{1}{t^4}\,dt = \int t^{-4}\,dt = \frac{1}{-3}\,t^{-3} + C = \frac{-1}{3t^3} + C = \boxed{\frac{-1}{3(x+3)^3} + C}$$

Ejemplo 3.13 $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^2}\,dx$

Eligiendo $t = 2x+3$ se tiene $dt = 2\,dx$, o bien $\dfrac{1}{2}\,dt = dx$, luego

$$\int \frac{1}{(2x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{t} + C = \boxed{-\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2x+3} + C}$$

Ejemplo 3.14 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

Eligiendo $t = x^2+1$ se tiene $dt = 2x\,dx$, de donde $\dfrac{1}{2}\,dt = x\,dx$, luego

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \ln|t|^{1/2} + C = \ln\sqrt{|t|} + C$$

$$= \ln\sqrt{|x^2+1|} + C = \boxed{\ln\sqrt{x^2+1} + C}$$

La última igualdad se debe al hecho de que, puesto que x^2+1 es siempre positivo, el valor absoluto en $|x^2+1|$ es superfluo.

Ejemplo 3.15 $\displaystyle\int \frac{3x}{5x^2+3}\,dx$

Eligiendo $t = 5x^2+3$ se tiene $dt = 10x\,dx$, o lo que es lo mismo, $\dfrac{1}{10}dt = x\,dx$, luego

$$\int \frac{3x}{5x^2+3}\,dx = 3\int \frac{1}{5x^2+3}(x\;dx) = 3\int \frac{1}{t}\,\frac{1}{10}\,dt = \frac{3}{10}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{3}{10}\,\ln|t| + C = \boxed{\frac{3}{10}\,\ln(5x^2+3) + C}$$

Ejemplo 3.16
$$\int \frac{3}{3x^2+2}\,dx$$
Este tipo de integrales se resuelven transformándolas en $\dfrac{1}{t^2+1}$, que es la derivada de un arco tangente. Para ello, en primer lugar se dividen numerador y denominador por 2, para tener en el denominador «algo»$+1$:

$$\int \frac{3}{3x^2+2}\,dx = \int \frac{3/2}{\dfrac{3x^2+2}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\dfrac{3}{2}x^2+1}\,dx$$

y ahora se hace el cambio $\dfrac{3}{2}x^2 = t^2$, es decir, $t = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,x$, y por tanto $dt = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,dx$, de donde $dx = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,dt$. Sustituyendo en la integral se tiene

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{\dfrac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\operatorname{arc\,tg} t + C = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C}$$

Cuál es el cambio conveniente para calcular una integral concreta suele ser una cuestión ardua para los que se inician en integración. Con un poco de práctica se aprende a identificar un buen número de casos y a dar con el cambio adecuado. En cualquier libro de cálculo se pueden encontrar «recetas» para distintos de tipos de integrales.

Una regla sencilla que funciona en muchas ocasiones es: hacer el cambio que elimine «lo que más molesta». Los siguientes ejemplos ilustran esta regla.

Ejemplo 3.17
$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx$$
En esta integral «lo que más molesta» es, claramente, la raiz cúbica del denominador. Por ello es lógico intentar un cambio que haga que desaparezca, como por ejemplo $\quad$ radicando $=$ (nueva variable)^3.

Lo cual, en este caso, es $1+2x = t^3$, de donde $\quad 2dx = 3t^2dt \quad$ y $\quad x = \dfrac{t^3-1}{2}$.
Sustituyendo resulta

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}2\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(\dfrac{t^3-1}{2}\right)^2}{\sqrt[3]{t^3}}3t^2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{(t^3-1)^2}{4}}{t}3t^2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\left(t^3-1\right)^2}{4t}3t^2dt$$
$$= \frac{3}{8}\int \left(t^3-1\right)^2 t\,dt = \frac{3}{8}\int \left(t^6+1-2t^3\right)t\,dt = \frac{3}{8}\int \left(t^7+t-2t^4\right)\,dt = \frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}+\frac{t^2}{2}-\frac{2t^5}{5}\right)+C$$

Ahora es necesario deshacer el cambio de variable, es decir, sustituir $t = \sqrt[3]{1+2x}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx = \boxed{\frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8 + \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2 - \frac{6}{40}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5 + C}$$

Ejemplo 3.18

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

En este caso interesa un cambio que elimine las dos raíces. Se puede conseguir cambiando x por una potencia que sea múltiplo de los índices de ambas raíces, en este caso el mínimo común múltiplo de 2 y 3, que es 6. Por tanto, se hace el cambio $x = t^6$, de donde $dx = 6t^5\,dt$.
Sustituyendo resulta

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}} 6t^5\,dt = \int \frac{1-t^{6/2}}{t^{6/3}} 6t^5\,dt = \int \frac{1-t^3}{t^2} 6t^5\,dt = \int (1-t^3) 6t^3\,dt$$

$$= \int (6t^3 - 6t^6)\,dt = \frac{6}{4}t^4 - \frac{6}{7}t^7 + C$$

Ahora hay que deshacer el cambio de variable, sustituyendo $t = \sqrt[6]{x}$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{4}(\sqrt[6]{x})^4 - \frac{6}{7}(\sqrt[6]{x})^7 + C = \frac{6}{4}\sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C = \boxed{\frac{6}{4}\sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C}$$

Ejemplo 3.19

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx$$

Puede que interese hacer un cambio que elimine la raiz cúbica. El adecuado es $\ln x = t^3$, de donde $\frac{1}{x}\,dx = 3t^2\,dt$ ($t = \sqrt[3]{\ln x}$ para deshacer el cambio). Sustituyendo resulta

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt[3]{\ln x}\,\frac{1}{x}\,dx = \int \sqrt[3]{t^3}\,3t^2\,dt = \int 3t^3\,dt = \frac{3}{4}t^4 + C = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{\ln x})^4 + C = \boxed{\frac{3}{4}(\ln x)^{4/3} + C}$$

(El cambio $t = \ln x$ también serviría).

Más adelante se presentan alguno ejemplos más de cambio de variable.

3.1.3 Integrales de funciones racionales

Se trata de integrales del tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$$

siendo p y q dos polinomios. En el caso en que grado$(p) \geq$ grado(q), lo primero que hay que hacer es dividir ambos polinomios, para obtener

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

($c(x)$ es el polinomio cociente y $r(x)$ es el polinomio resto de la división). Entonces se tendrá

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \int \left(c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) dx = \int c(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\, dx$$

Luego basta con saber cómo resolver integrales del tipo $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$ con grado$(p) <$ grado(q), ya que el otro sumando es solo la integral de un polinomio.

Reducción a fracciones simples

Para resolver integrales $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$ con grado$(p) <$ grado(q):

1. Se factoriza el denominador, es decir, se expresa como producto de polinomios irreducibles.

2. Se escribe $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como una **suma de fracciones simples**, es decir, de fracciones sencillas de una de las dos formas siguientes

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \qquad n \geq 1$$

cuyas integrales se calculan como se muestra en los Ejercicios (3.20) a (3.24), excepto en el caso $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ con $n > 1$, que no se considera en estas notas.

Se van a ver, sobre diversos ejemplos, los distintos casos que pueden darse en la descomposición en suma de fracciones simples.

Ejemplo 3.20
Caso en que $q(x)$ tiene solo raíces simples: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x}\,dx$

1. El polinomio $x^2 - x$ tiene las raíces $x = 0$ y $x = 1$, luego
$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$$
2. La descomposición en suma de fracciones simples, en este caso será de la forma:
$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$
Se trata, pues, de encontrar A y B para que esta igualdad sea cierta.
3. Para encontrar A y B, se multiplican ambos miembros por $x(x-1)$, con lo que queda
$$1 = A(x-1) + Bx$$
y ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A y B:
$$\left\{\begin{array}{lll} x=0 & \Rightarrow & 1=-A \\ x=1 & \Rightarrow & 1=B \end{array}\right.$$
Así pues
$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$
4. Por último se tiene, para la integral:
$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1} = -\ln|x| + \ln|x-1| + C = \boxed{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C}$$

Ejemplo 3.21
Caso en que $q(x)$ tiene solo raíces simples: $\displaystyle\int \frac{7x-3}{x^2-1}\,dx$

El polinomio $x^2 - 1$ tiene las raíces $x = 1$ y $x = -1$, luego la descomposición en suma de fracciones simples, en este caso será de la forma:
$$\frac{7x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$
Multiplicando ambos miembros por $(x+1)(x-1)$, queda $7x - 3 = A(x-1) + B(x+1)$.
Ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A y B:
$$\left\{\begin{array}{lllll} x=1 & \Rightarrow & 4=2B & \Rightarrow & B=2 \\ x=-1 & \Rightarrow & -10=-2A & \Rightarrow & A=5 \end{array}\right.$$
Así pues
$$\int \frac{7x-3}{(x+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{5}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x-1} = \boxed{5\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C}$$

Ejemplo 3.22
Caso en que $q(x)$ tiene alguna raíz doble: $\displaystyle\int \frac{3}{x(x-1)^2}\,dx$

El denominador ya está factorizado.
La descomposición en suma de fracciones simples en este caso será de la forma:

$$\frac{3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Multiplicando ambos miembros por $x(x-1)^2$, queda $\quad 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$.
Ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A, B y C:

$$\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \quad 3 = A \\ x = 1 & \Rightarrow \quad 3 = C \\ x = 2 & \Rightarrow \quad 3 = A + 2B + 2C = 3 + 2B + 6 \quad \Rightarrow \quad B = -3 \end{cases}$$

Así pues

$$\int \frac{3}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{3}{x-1} + \int \frac{3}{(x-1)^2} = 3\left(\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right) + C =$$

$$= \boxed{3\left(\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1}\right) + C}$$

Ejemplo 3.23
Caso en que $q(x)$ tiene alguna raíz doble: $\displaystyle\int \frac{2x}{(3+2x)^2}\,dx$

El denominador ya está factorizado: tiene la raíz doble $x = -\dfrac{3}{2}$. La descomposición en suma de fracciones simples en este caso será de la forma:

$$\frac{2x}{(3+2x)^2} = \frac{A}{3+2x} + \frac{B}{(3+2x)^2}$$

Multiplicando ambos miembros por $(3+2x)^2$, queda $\quad 2x = A(3+2x) + B$.
Ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A y B:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} & \Rightarrow \quad -3 = B \\ x = 0 & \Rightarrow \quad 0 = 3A + B = 3A - 3 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \end{cases}$$

Así pues

$$\int \frac{2x}{(3+2x)^2}\,dx = \int \frac{1}{3+2x}\,dx - \int \frac{3}{(3+2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{3+2x}\,dx + \frac{3}{2}\int -2(3+2x)^{-2}\,dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln|3+2x| + \frac{3}{2}\,\frac{1}{3+2x} + C}$$

Ejemplo 3.24
Caso en que $q(x)$ tiene un factor irreducible cuadrático: $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

El denominador ya está factorizado: el polinomio x^2+1 no se puede factorizar ya que no tiene raíces reales. La descomposición en suma de fracciones simples en este caso será de la forma:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Multiplicando ambos miembros por $x(x^2+1)$, queda $\quad 2x-1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x = A(x^2+1)+Bx^2+Cx$. Ahora se dan valores a x, para encontrar condiciones sobre A, B y C:

$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad -1 = A \\ x=1 & \Rightarrow \quad 1 = 2A+B+C = -2+B+C \quad \Rightarrow \quad B+C=3 \\ x=-1 & \Rightarrow \quad -3 = 2A+B-C = -2+B-C \quad \Rightarrow \quad B-C=-1 \end{cases}$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene, resolviendo el sistema 2×2, $B=1$ y $C=2$. Así pues

$$\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C = \boxed{\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C}$$

Ejemplo 3.25
Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\mathrm{sen}(t)\,\cos(t)}{(2+\mathrm{sen}(t))^2}\,dt$$

Esta integral no es, obviamente, de tipo racional. Sin embargo en una inspección atenta se observa que aparece el factor $\mathrm{sen}(t)$, potencias del mismo $(2+\mathrm{sen}(t))^2$, y su derivada $\cos(t)$. Esto sugiere hacer el cambio de variable $u=\mathrm{sen}(t)$ que, como se ve a continuación, transforma la integral en una racional:

$$\int \frac{\mathrm{sen}(t)\,\cos(t)}{(2+\mathrm{sen}(t))^2}\,dt = \left[\begin{array}{ll} u & = \mathrm{sen}(t) \\ du & = \cos(t)\,dt \end{array}\right] = \int \frac{u}{(2+u)^2}\,du \overset{(*)}{=} \int \left(\frac{1}{2+u} + \frac{-2}{(2+u)^2}\right)dt =$$

$$\ln|2+u| + \frac{2}{2+u} + C = \boxed{\ln|2+\mathrm{sen}(t)| + \frac{2}{2+\mathrm{sen}(t)} + C}$$

(*) Reducción a suma de fracciones simples:

$$\frac{u}{(2+u)^2} = \frac{A}{2+u} + \frac{B}{(2+u)^2} \;\Leftrightarrow\; u = A(2+u)+B \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u=-2 \Rightarrow -2 = B \\ u=0 \Rightarrow 0 = 2A-2 \Rightarrow A=1 \end{cases}$$

es decir,

$$\frac{u}{(2+u)^2} = \frac{1}{2+u} + \frac{-2}{(2+u)^2}$$

3.1.4 Integración por partes

Es una de las reglas de integración más útiles. Está basada en la fórmula de derivación de un producto de dos funciones:

$$h(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

De esta igualdad se tiene:

$$u(x) \cdot v'(x) = h'(x) - u'(x) \cdot v(x)$$

y de aquí, integrando en ambos miembros:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = \int h'(x)\, dx - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx = h(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Fórmula de integración por partes

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Con frecuencia esta fórmula se escribe en la forma:

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

que significa exactamente lo mismo.

Ejemplo 3.26
$\int x\, e^x\, dx$

Eligiendo $\left\{ \begin{array}{lll} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array} \right\}$ se tiene

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C = \boxed{e^x\,(x-1) + C}$$

Ejemplo 3.27
$\int x\, \ln x\, dx$

Eligiendo $\left\{ \begin{array}{lll} u(x) = \ln x & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x & \Rightarrow & v(x) = \dfrac{1}{2}\, x^2 \end{array} \right\}$ se tiene

$$\int x\, \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2\, \ln x - \int \frac{1}{2}\, x^2 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}x^2\, \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2\, \ln x - \frac{1}{4}\, x^2 + C = \boxed{\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C}$$

Ejemplo 3.28
$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

Eligiendo $\left\{ \begin{array}{lll} u(x) = \operatorname{arc\,tg} x & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow & v(x) = x \end{array} \right\}$ se tiene

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int x\, \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \boxed{x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$$

Ejemplo 3.29
$\int x\,\cos x\,dx$

Eligiendo $\left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos x & \Rightarrow & v(x) = \operatorname{sen} x \end{array} \right\}$ se tiene

$$\int x\,\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = \boxed{x\operatorname{sen} x + \cos x + C}$$

Ejemplo 3.30
$\int x^2\,e^x\,dx$

Eligiendo $\left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = x^2 & \Rightarrow & u'(x) = 2x \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array} \right\}$ se tiene $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - \int 2x\,e^x\,dx.$

Para resolver la integral $\int x\,e^x\,dx$ hay que utilizar de nuevo la fórmula de integración por partes.

Eligiendo ahora $\left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array} \right\}$ se tiene finalmente

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\int x\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\left(x\,e^x - \int e^x\,dx\right) = x^2\,e^x - 2x\,e^x + 2\,e^x + C = \boxed{(x^2 - 2x + 2)e^x + C}$$

3.2 La integral definida

El concepto de integral definida está íntimamente relacionado con el problema de calcular áreas de regiones planas, concretamente, con el de calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de una curva, $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (véase Figura 3.1).

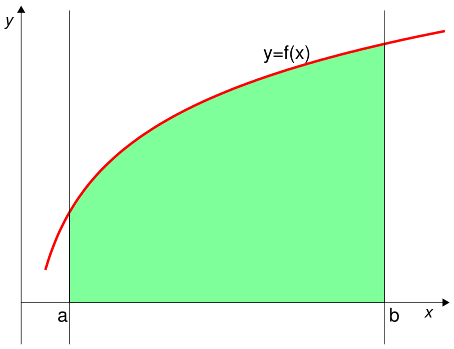


Figura 3.1: Región plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Una manera de aproximar dicha área es dividir el intervalo $[a, b]$ en un número de sub-intervalos (determinados por los puntos x_1, x_2, $x_3, \ldots$, mostrados en la Figura 3.3) de longitud h y alturas respectivas $y_i = f(x_i)$. El área de uno de estos rectángulos es el producto de su base (h) por su altura ($y_i = f(x_i)$). Intuitivamente se ve que la suma de las áreas de todos estos rectángulos será mejor aproximación del área de la Figura 3.1 cuanto más pequeño sea h o, lo que es lo mismo, cuantos más rectángulos se utilicen en la suma.

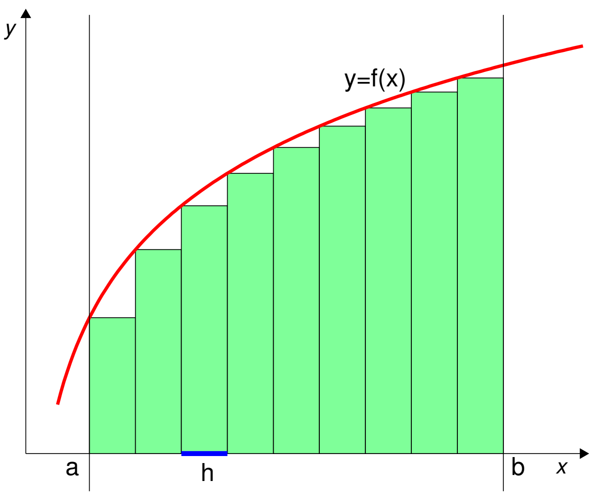


Figura 3.2: Se divide el intervalo $[a, b]$ en partes iguales de longitud h y se considera la suma de las áreas de todos los rectángulos de base h mostrados en la Figura. Cuando h se hace muy pequeño, es decir, cuando hay "muchos" rectángulos, dicha suma aproxima el valor del área de la Figura 3.1.

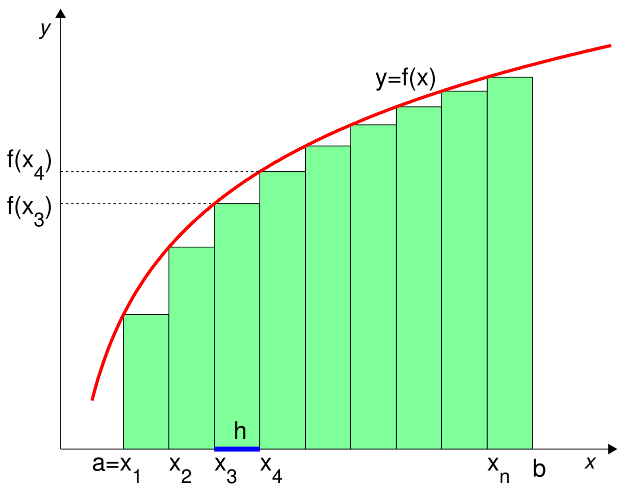


Figura 3.3: El límite cuando $n \to \infty$ de la suma de las áreas mostradas es el área de la región mostrada en la Figura 3.1.

Integral definida

La integral definida de f en $[a, b]$ es, por definición,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} h\,\{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\}$$

(Atención: como se verá luego, este valor solo coincide con el área de la Figura 3.1 si $f > 0$).

Afortunadamente, existe una manera de calcular $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ por una vía distinta a su definición, y que está relacionada con la integral indefinida de f, es decir, con el cálculo de una primitiva de f. De ahí que ambos conceptos, aparentemente tan distintos, compartan el nombre de **integral**.

El resultado que relaciona ambos conceptos es el siguiente Teorema.

Teorema (Regla de Barrow)

Si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una primitiva cualquiera de f, entonces se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Con frecuencia se escribe, de forma abreviada, $[F(x)]_a^b$ en lugar de $F(b) - F(a)$ cuando se aplica la Regla de Barrow.

Para aplicar la Regla de Barrow se puede elegir cualquiera de las primitivas de f, ya que, al restar, $F(b) + C - F(a) - C$, la constante arbitraria se cancela. Por ello se elige normalmente la primitiva correspondiente al valor $C = 0$.

Propiedades de la integral definida

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad \forall c \in (a, b)$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Ejemplo 3.31

$\displaystyle\int_0^5 x^2\,dx$

Una primitiva de x^2 es $\dfrac{x^3}{3}$, luego aplicando la Regla de Barrow se tiene

$$\int_0^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \boxed{\frac{125}{3}}$$

Ejemplo 3.32
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$$

Una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$, luego

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos 0 = -(-1) + 1 = \boxed{2}$$

Ejemplo 3.33
$$\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2}\, dx$$

Una primitiva de $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ es $\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right| - \dfrac{1}{x-1}$ (véase el Ejemplo 3.22). Luego

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2}\, dx = \left[\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1}\right]_2^3 = \left(\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) - (\ln 2 - 1) = \boxed{\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$$

Ejemplo 3.34
La función $f(t) = \dfrac{680 + 30t - 5t^2}{18}$ representa la temperatura en Sevilla en una tarde de agosto, t horas después del mediodía, es decir, para $t \in [0, 10]$. Calcular la temperatura media en ese periodo.

Se denomina **valor medio** (o promedio) de una función f en un intervalo $[a, b]$ al valor:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

En este caso, la temperatura media será, por tanto:

$$T_{\text{med}} = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(t)\, dt = \frac{1}{10}\int_0^{10} \frac{680 + 30t - 5t^2}{18}\, dt = \frac{1}{180}\int_0^{10} (680 + 30t - 5t^2)\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{180}(680t + 15t^2 - \frac{5}{3}t^3)\right]_0^{10} = \frac{1}{180}(6800 + 1500 - \frac{5}{3}1000) = \frac{100}{180}(68 + 15 - \frac{50}{3}) = \boxed{36.85}$$

3.3 Aplicaciones de las integrales

3.3.1 Cálculo de áreas

Como se ha apuntado antes, **si $\mathbf{f \geq 0}$ en $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$**, entonces $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ es el área de la región plana encerrada entre la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

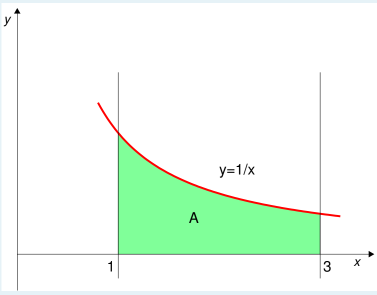
Ejemplo 3.35
Calcular el área delimitada por $y = \dfrac{1}{x}$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es positiva en $[1, 3]$, por lo tanto el área buscada coincide con la integral definida:

$$A = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

Una primitiva de $\dfrac{1}{x}$ es $F(x) = \ln x$. Por lo tanto

$$A = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \boxed{\ln 3 \approx 1.0986}$$



Si $f < 0$ en $[a, b]$, como en la Figura 3.4, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es un valor negativo que, lógicamente, no puede ser un área (que es siempre mayor o igual que cero). En este caso, el área es el valor absoluto de la integral definida,

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Si f cambia de signo, como en la Figura 3.5, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = A^+ - A^-$, siendo A^+ el área del recinto limitado por la curva y el eje OX que queda por encima del eje OX, y A^- el área del recinto entre la curva y el eje OX que queda por debajo del eje OX.

Si lo que se desea es calcular el área delimitada entre la gráfica y el eje OX, es decir, la suma $A^+ + A^-$ (véase Figura 3.5), entonces hay que calcular

$$A = A^+ + A^- = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

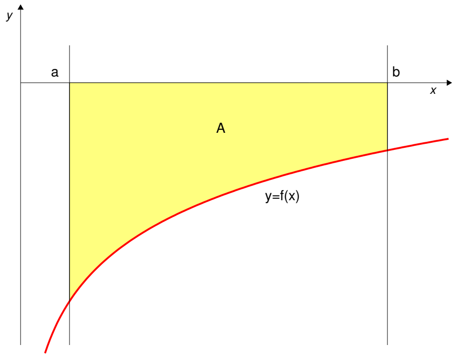


Figura 3.4: Función negativa en $[a, b]$.

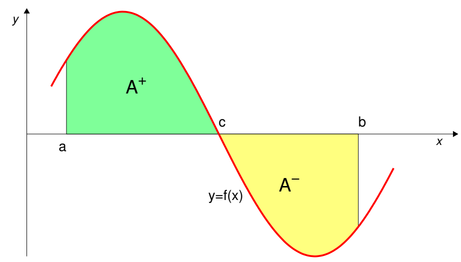


Figura 3.5: Función que cambia de signo en $[a, b]$.

Ejemplo 3.36

Calcular el área delimitada por la gráfica de $y = \ln x - 2$, el eje OX y las rectas $x = 1/2$ y $x = \pi$

La función $f(x) = \ln x - 2$ es negativa en $[1/2, \pi]$. Luego el área será $A = \left| \int_{1/2}^{\pi} (\ln x - 2)\, dx \right|$.

Calculamos una primitiva integrando por partes, eligiendo $\left\{ \begin{array}{lll} u(x) = \ln x - 2 & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow & v(x) = x \end{array} \right\}$

$$\int (\ln x - 2)\, dx = x(\ln x - 2) - \int x \frac{1}{x}\, dx = x(\ln x - 2) - x + C = x(\ln x - 3) + C$$

Por lo tanto

$$\int_{1/2}^{\pi} (\ln x - 2)\, dx = \Big[x(\ln x - 3) \Big]_{\frac{1}{2}}^{\pi} = \Big(\pi(\ln \pi - 3) \Big) - \left(\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - 3 \right) \right) \approx -3.9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 3.9}$$

($\ln x - 2$ es la función de la Figura 3.5)

Ejemplo 3.37

Calcular el área de las región delimitada por la gráfica de $y = \operatorname{sen}(2x)$, el eje OX y las rectas $x = 0.2$ y $x = 3$

La función $\operatorname{sen}(2x)$ es mayor o igual que cero en $[0.2, \pi/2]$ y menor o igual que cero en $[\pi/2, 3]$ (ver Figura 3.5). La región mencionada se compone, pués, de dos regiones disjuntas: una está situada por encima del eje OX y la otra está por debajo. Por lo tanto hay que calcular por separado las áreas A^+ y A^-.

Una primitiva de $\operatorname{sen}(2x)$ es $-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

Luego,

$$A^+ = \int_{0.2}^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) \right]_{0.2}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \Big[\cos(2x) \Big]_{0.2}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \Big(\cos(\pi) - \cos(0.4) \Big) \approx 0.9605$$

$$A^- = \left| \int_{\pi/2}^{3} \operatorname{sen}(2x)\, dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) \right]_{\pi/2}^{3} \right| = \left| -\frac{1}{2} \Big(\cos(6) - \cos(\pi) \Big) \right| \approx |-0.9801| = 0.9801$$

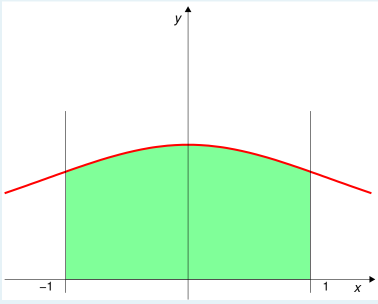
En consecuencia, el área total encerrada entre la gráfica y el eje OX es

$$A = A^+ + A^- \approx 0.9605 + 0.9801 = \boxed{1.9406}$$

Ejemplo 3.38
Calcular el área de la región encerrada entre la gráfica de la función $y = \dfrac{8}{x^2+4}$, el eje OX y las rectas verticales $x=-1$ y $x=1$

La función $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ es positiva $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto la región descrita está, al completo, por encima del eje OX y el área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{8}{x^2+4} \right) dx$$



Se comienza por calcular una primitiva:

$$F(X) = \int \frac{8}{x^2+4}\, dx = \int \frac{\frac{8}{4}}{\frac{x^2+4}{4}}\, dx = \frac{8}{4} \int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}\, dx = 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\, dx$$

$$= 4 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \frac{1}{2}\, dx = 4 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ahora se utiliza la Fórmula de Barrow para calcular el valor de la integral definida:

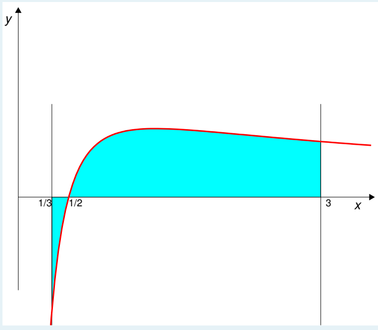
$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{8}{x^2+4} \right) dx = \Big[F(x)\Big]_{-1}^{1} = \left[4 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-1}^{1} = 4\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$$

$$\approx 4(0.4636 - (-0.4636)) = \boxed{3.7088}$$

Ejemplo 3.39
Calcular el área de la región limitada por la curva $y = \dfrac{\ln(2x)}{x}$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = \dfrac{1}{3}$ y $x = 3$.

La función $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x}$ solo está definida para $x > 0$ y solo se anula para $2x = 1$, esto es, para $x = 1/2$:

$$\frac{\ln(2x)}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$$



Está claro que, a la derecha de $x = 1/2$, la función es positiva y que, a su izquierda, la función es negativa.
Por lo tanto, puesto que el intervalo $[1/3, 3]$ contiene al punto $x = 1/2$, la región cuya área se pide calcular está en parte por debajo del eje OX y en parte por encima del mismo.
En consecuencia, su área es:

$$A = A_1 + A_2 = -\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx + \int_{1/2}^{3} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx$$

Calculamos en primer lugar una primitiva de la función:

$$F(x) = \int \frac{\ln(2x)}{x}\,dx$$

Esta integral indefinida se calcula fácilmente haciendo el cambio de variable:

$$u = \ln(2x) \;\Leftrightarrow\; du = \frac{1}{x}dx$$

luego

$$F(x) = \int \frac{\ln(2x)}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln(2x))^2}{2}$$

Calculamos ahora los valores de las dos integrales definidas por separado:

$$A_1 = -\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx = -\Big[F(x)\Big]_{1/3}^{1/2} = -\frac{(\ln(1))^2}{2} + \frac{(\ln(2/3))^2}{2} = \frac{(\ln(2/3))^2}{2} \approx \frac{(-0.4)^2}{2} = \frac{0.16}{2} = 0.08$$

$$A_2 = \int_{1/2}^{3} \frac{\ln(2x)}{x}\,dx = \Big[F(x)\Big]_{1/2}^{3} = \frac{(\ln(6))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2} = \frac{(\ln(6))^2}{2} \approx \frac{(1.8)^2}{2} = \frac{3.24}{2} = 1.62$$

Luego, finalmente,

$$A = A_1 + A_2 \approx 0.08 + 1.62 \Longrightarrow \boxed{A \approx 1.7}$$

También es posible calcular mediante integrales definidas el área de recintos encerrados entre dos curvas. Si $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, entonces el área encerrada entre ambas curvas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$$

En efecto, se tiene (ver Figuras):

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2 - A_3, \qquad \int_a^b g(x)\,dx = A_1 - A_4 - A_3$$

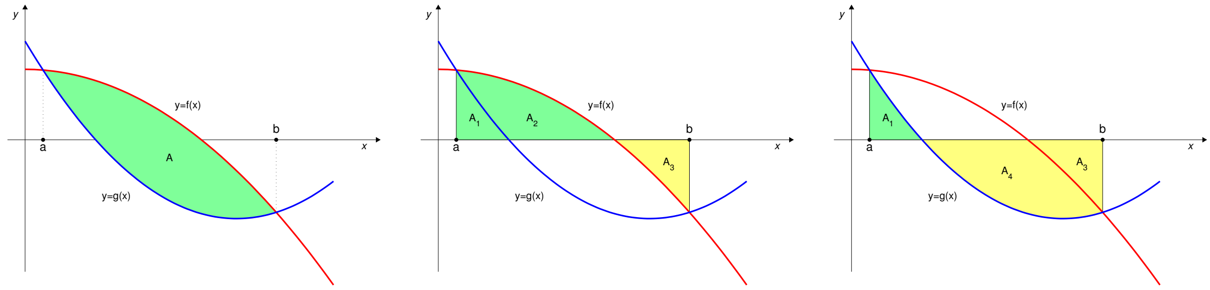


Figura 3.6: Las figuras muestran geométricamente la igualdad $A = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$

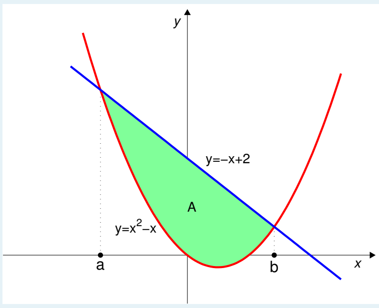
luego

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \Big(A_1 + A_2 - A_3\Big) - \Big(A_1 - A_4 - A_3\Big) = A_2 + A_4 = A$$

Ejemplo 3.40

Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y = x^2 - x$ e $y = -x + 2$

Es casi imprescindible hacer un esbozo gráfico de las funciones, los puntos de corte y de la región cuya área hay que calcular.



$y = x^2 - x$ es una parábola convexa que pasa por el origen y por el punto $(1, 0)$.
$y = -x + 2$ es una recta, que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(2, 0)$.
Para encontrar en qué puntos se cortan hay que igualar ambas expresiones y resolver la ecuación:

$$x^2 - x = -x + 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

Luego al área a calcular está entre $x = a = -\sqrt{2}$ y $x = b = \sqrt{2}$.
En este intervalo, $-x + 2 \geq x^2 - x, \quad \forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, por lo tanto el área pedida es

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Big(-x + 2 - x^2 + x\Big)\, dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Big(2 - x^2\Big)\, dx = \Big[2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

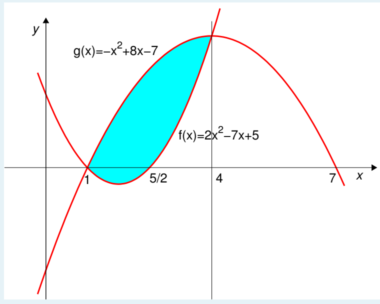
$$= \Big[2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2^3}\Big] - \Big[-2\sqrt{2} - \frac{1}{3}(-\sqrt{2})^3\Big] = 2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2^3} + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2^3} = \boxed{\frac{8}{3}\sqrt{2}}$$

Ejemplo 3.41

Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las parábolas $y = 2x^2 - 7x + 5$ e $y = -x^2 + 8x - 7$

$y = 2x^2 - 7x + 5 = f(x)$ es una parábola convexa. Sus puntos de corte con el eje OX son:

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = 5/2 \end{cases}$$



$y = -x^2 + 8x - 7 = g(x)$ es una parábola cóncava. Sus puntos de corte con el eje OX son:

$$-x^2 + 8x - 7 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Puntos de corte de las dos parábolas:

$$2x^2 - 7x + 5 = -x^2 + 8x - 7 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 15x + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

En consecuencia, al área que se pide será

$$A = \int_1^4 (g(x) - f(x))\, dx$$

Calculamos una primitiva de $g(x) - f(x)$:

$$\int (g(x) - f(x))\, dx = -\int \left(3x^2 - 15x + 12\right)\, dx = -\left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x\right),$$

luego:

$$A = -\left[x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x\right]_1^4 = -\left[(64 - 120 + 48) - \left(1 - \frac{15}{2} + 12\right)\right] = -\left(-8 - \frac{11}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

Luego, finalmente,

$$\boxed{A = \frac{27}{2}}$$

3.3.2 Volumen de un sólido de revolución

Una figura que se genera por la rotación de una región plana alrededor de un eje se llama sólido de revolución. La rotación de una curva plana genera una superficie. Esta superficie junto con su interior es un sólido de revolución. Por ejemplo, la superficie de un cilindro puede ser obtenida por la rotación de un segmento paralelo al eje, la de un cono, por la rotación de su generatriz alrededor del eje o la de una esfera por la rotación de una semicircunferencia en torno al diámetro. Queremos obtener el volumen de dichas figuras. Por comodidad consideramos que el eje de rotación coincide con el eje X.

Se pretende obtener el volumen de una figura generada por la rotación de una curva, $y = f(x)$, en torno al eje X, entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Para ello, se divide el intervalo $[a, b]$ en partes iguales de longitud Δx. Aproximamos la figura por N discos (cilindros) de anchura Δx y radio $f(x_k)$. Recordando que el volumen de un cilindro se obtiene de multiplicar π por el radio al cuadrado y por la altura del cilindro, el volumen de cada uno de estos discos es $\pi f(x_k)^2 \Delta x$. Sumando para los N discos, el volumen aproximado sería

$$V \approx \sum_{k=1}^{N} \pi f(x_k)^2 \Delta x.$$

Cuanto mayor sea el número de discos que consideramos, mejor será la aproximación. A continuación, tomamos

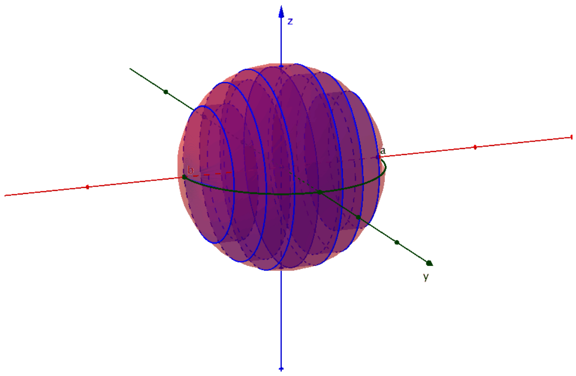


Figura 3.7: Esfera aproximada por discos.
https://www.geogebra.org/m/n3HuEfb7

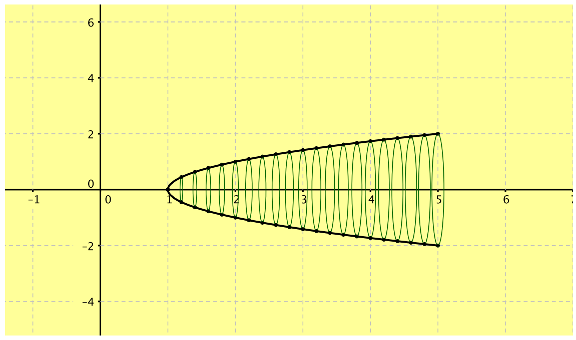


Figura 3.8: Figura generada por la rotación de la curva $y = \sqrt{x-1}$
https://www.geogebra.org/m/j4uH3RY8

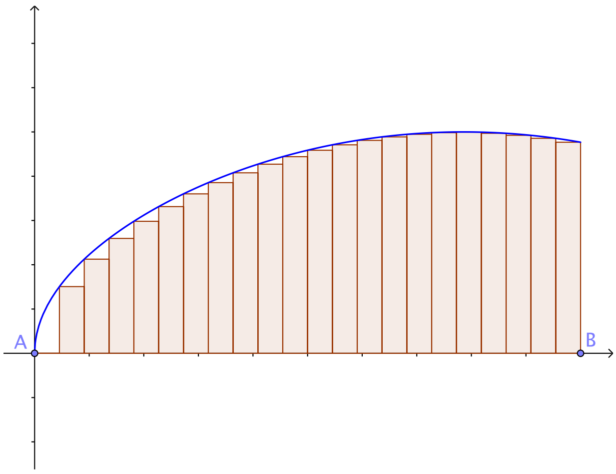


Figura 3.9: Partición del intervalo $[a, b]$.

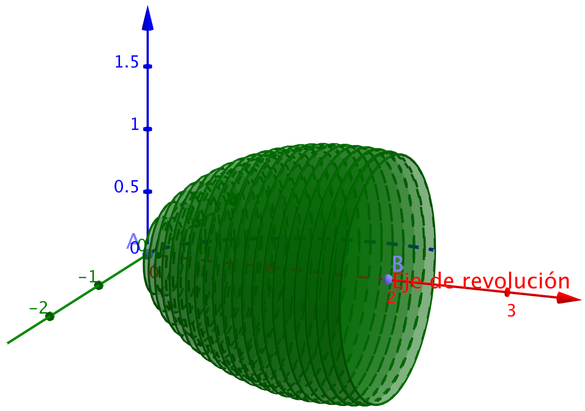


Figura 3.10: Sólido de revolución correspondiente a la función de la Figura 3.9.
https://www.geogebra.org/m/kAMk8Z9H

límite cuando $N \to +\infty$ en la expresión anterior, entonces ΔV tenderá al volumen buscado, Δx tenderá a dx y el sumatorio se convierte en integral, así obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} \pi f(x_k)^2 \Delta x \overset{\mathtt{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Un razonamiento análogo se puede hacer para obtener el volumen de una figura obtenida por la rotación en torno al eje Y.

Volumen de una superficie de revolución

El volumen del sólido generado por la rotación de la región determinada por el arco de curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje X en torno a dicho eje viene dado por

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

El volumen del sólido generado por la rotación de la región determinada por el arco de curva $x = f(y)$, las rectas $y = a$ e $y = b$ y el eje Y en torno a dicho eje viene dado por

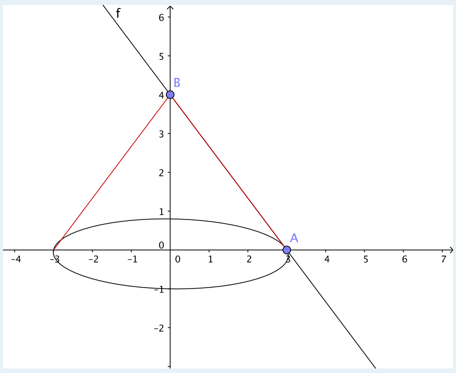
$$V = \pi \int_a^b f(y)^2 \, dy.$$

Ejemplo 3.42
Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ de la figura 3.9, en torno al eje X, para $1 \le x \le 5$.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx = \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 \, dx = \pi \int_1^5 (x-1) \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^5 = 8\pi.$$

Ejemplo 3.43
Obtener el volumen de un cono de radio $r = 3$ y altura $h = 4$.

Vamos a considerar el cono generado por la rotación del segmento que une los puntos $A(3,0)$ y $B(0,4)$ en torno al eje Y.
La recta que pasa por dichos puntos, considerando x como función de y, es $x = -\frac{3}{4}y + 3$, por tanto



$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b f(y)^2 \, dy &= \pi \int_0^4 (-\frac{3}{4}y + 3)^2 \, dy \\ &= \pi \int_0^4 (\frac{9}{16}y^2 - \frac{9}{2}y + 9) \, dy \\ &= \pi \left[\frac{9}{16}\frac{y^3}{3} - \frac{9}{2}\frac{y^2}{2} + 9y \right]_0^4 = 12\pi. \end{aligned}$$

3.3.3 Cambio acumulado

En muchas situaciones, es más fácil determinar las variaciones de una cantidad que determinar su valor en un instante de tiempo determinado. Por ejemplo, la población de un país es difícil de evaluar directamente. Aunque existen los censos, estos se realizan solo de tarde en tarde y los ciudadanos, en general, no se ocupan de actualizarlo. Sin embargo, en la mayoría de los países es obligatorio registrar los nacimientos y los fallecimientos, es decir, las variaciones de la población.

Supongamos que la figura siguiente muestra los resultados de un recuento diario del número de nuevos casos durante un brote de fiebre aftosa: cada barra representa un día y la altura de la barra indica el número de casos diagnosticados dicho día.

Para obtener el número de infectados 10 días (por ejemplo) después del comienzo del brote, habría que sumar el número de infectados de los días 1, 2, 3, . . . hasta 10:

$$1 + 4 + 1 + 4 + 3 + 3 + 6 + 2 + 11 + 4 = 39$$

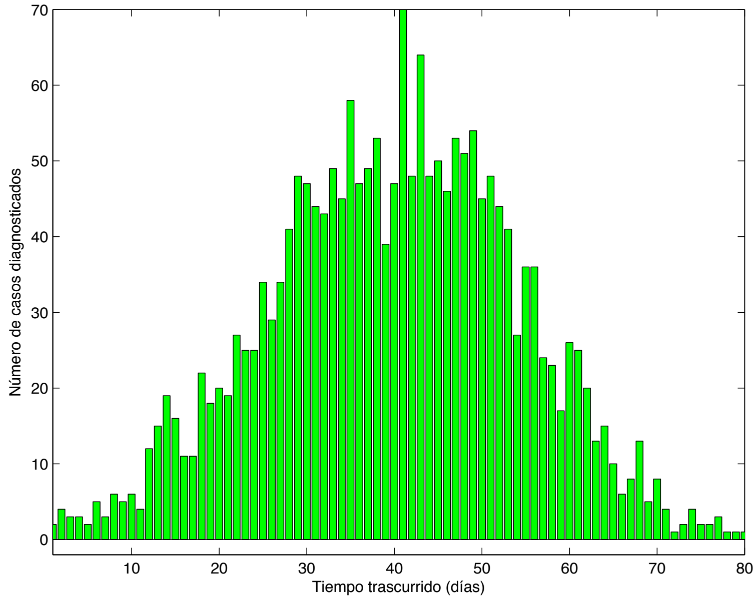


Figura 3.11: Número de nuevos casos diagnosticados cada día durante un brote de fiebre aftosa.

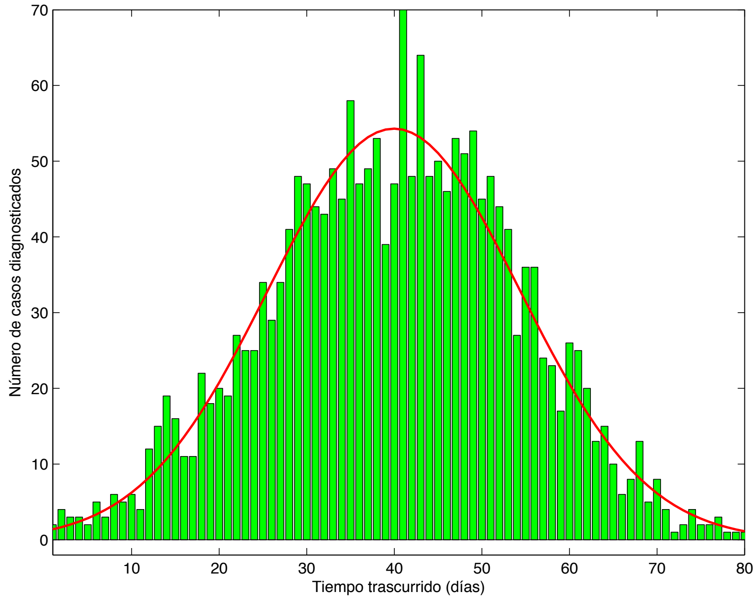


Figura 3.12: Modelo matemático para predecir el número de infectados cada día mediante una función continua.

Supongamos ahora que en vez de disponer de un conjunto discreto de datos sobre el número de infectados por día, hemos desarrollado un modelo matemático que utiliza una función continua $D(t)$ para predecir el número de nuevos casos diagnosticados (ver Figura 3.12).

¿Cómo calcular, en este caso, el número acumulado N de infectados durante los diez primeros días?

La respuesta a esta pregunta es: integrando la función $D(t)$ entre $t = 0$ y $t = 10$:

$$N = \int_0^{10} D(t)\, dt$$

(recuérdese la definición de la integral definida como límite de una suma de áreas de rectángulos de anchura cada vez más pequeña).

Ejemplo 3.44
Una población de insectos, que es inicialmente de 100 individuos, crece a una tasa de

$$q(t) = 2t + 3t^2$$

donde t es el tiempo en días. Determinar el tamaño de la población: (a) pasado un día; (b) pasados diez días.

Si denotamos $p(t)$ a la función que nos da el número de insectos en cada instante t (que es lo que queremos determinar), la función $q(t)$ nos da la *variación instantánea* de dicha función, es decir, $q(t)$ es la derivada de $p(t)$. Por lo tanto,

$$p(t) = \int q(t)\,dt = \int (2t + 3t^2)\,dt = t^2 + t^3 + C \quad \text{para alguna } C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

La constante C se podrá determinar a partir del dato inicial: en $t = 0$ la población esta compuesta por 100 individuos:

$$100 = p(0) = 0^2 + 0^3 + C \iff C = 100$$

Así pues, la función $p(t)$, que nos da el número de insectos en cada instante t es

$$p(t) = t^2 + t^3 + 100$$

Pasado un día, el número de insectos será:

$$p(1) = 1 + 1 + 100 = 102$$

Pasados 10 días será de

$$p(10) = 10^2 + 10^3 + 100 = 1200$$

Ejemplo 3.45
El área de una herida en curación, medida en $\mathbf{cm^2}$, cambia a una tasa de

$$Q(t) = \frac{-4}{(t+1)^3}$$

siendo t el tiempo medido en días. Suponiendo que el área inicial de la herida era de 2 $\mathbf{cm^2}$, calcular la superficie al cabo de 10 días.

Sea $A(t)$ la superficie de la herida en el instante t. La función $Q(t)$ nos dice cómo cambia la superficie de la herida, es decir, nos da la tasa de variación instantánea de la función $A(t)$:

$$A'(t) = Q(t) = \frac{-4}{(t+1)^3}$$

Integrando aquí tendremos

$$A(t) = \int \frac{-4}{(t+1)^3}\,dt = \int -4(t+1)^{-3}\,dt = -4\,\frac{1}{-2}\,(t+1)^{-2} + C = \frac{2}{(t+1)^2} + C$$

Determinamos el valor de C a partir del dato inicial:

$$2 = A(0) = \frac{2}{(0+1)^2} + C \iff C = 0. \qquad \text{Luego } \boxed{A(t) = \frac{2}{(t+1)^2}}$$

Al cabo de 10 días la superficie de la herida será: $A(10) = \dfrac{2}{(10+1)^2} = \dfrac{2}{11^2} = \dfrac{2}{121} \approx 0.165\,\text{cm}^2$

Obsérvese que en este último ejemplo, podíamos haber escrito

$$A(10) = A(0) + \int_0^{10} Q(t)\, dt \tag{3.1}$$

es decir: $A(10)$ es igual al área inicial, $A(0)$, más el cambio acumulado de $A(t)$ entre $t = 0$ y $t = 10$.

Esto no es más que una forma diferente de escribir la Regla de Barrow:

$$A(10) - A(0) = \int_0^{10} Q(t)\, dt$$

Si, en vez de escribir la fórmula anterior para el valor particular 10 la escribimos para un tiempo t cualquiera, obtenemos

$$A(t) = A(0) + \int_0^{t} Q(s)\, ds \tag{3.2}$$

que se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo. En la integral definida utilizamos la variable s para indicar la variable con respecto a la cual se integra para distinguirla de la variable t.

Lo mismo es cierto para un límite inferior distinto de 0.

Teorema Fundamental del Cálculo
Si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una primitiva cualquiera de f, entonces se tiene

$$F(x) = F(a) + \int_a^{x} f(s)\, ds \quad \forall x \in [a, b]$$

3.3.4 Valor medio de una función en un intervalo

Volviendo al ejemplo de la fiebre aftosa, con los datos de la Figura 3.12, supongamos que queremos calcular el promedio de nuevos casos diagnosticados durante los 10 primeros días: habría que sumar el número de casos durante los días 1, 2, 3 ... hasta 10 y dividir por el número de días:

$$\text{Promedio de casos en los 10 primeros días } = \frac{1+4+1+4+3+3+6+2+11+4}{10} = \frac{39}{10} = 3.9 \text{ casos.}$$

Entonces, si lo que tenemos es una función continua $D(t)$ (Figura 3.12), lo que habrá que hacer es integrar entre 0 y 10 y dividir por la longitud del intervalo de integración:

$$\bar{D} = \frac{\displaystyle\int_0^{10} D(t)\, dt}{10-0} = \frac{1}{10}\int_0^{10} D(t)\, dt$$

Valor medio de una función en un intervalo
Si f es una función continua en $[a, b]$, el valor medio o promedio de f en un intervalo (a, b) es

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^{b} f(x)\, dx$$

Ejemplo 3.46
El tiempo de supervivencia de náufragos en agua depende de la temperatura del agua y viene dado (aproximadamente) por

$$t(T) = \frac{0.2}{0.1 - 0.004\,T} \quad \textbf{horas}$$

donde la variable independiente T es la temperatura de la superficie del agua (grados Celsius). Determinar el tiempo medio de supervivencia en aguas a temperaturas entre $10°$C y $15°$C.

Lo que tenemos que calcular es el valor promedio de t para T variando entre 10 y 15:

$$\bar{t} = \frac{1}{15-10}\int_{10}^{15} \frac{0.2}{0.1-0.004\,T}\,dT = \frac{1}{5}\int_{10}^{15} \frac{0.2}{0.1-0.004\,T}\,dT$$

$$= \frac{0.2}{5}\,\frac{1}{0.004}\int_{10}^{15} \frac{0.004}{0.1-0.004\,T}\,dT = \frac{-0.2}{0.02}\left[\ln|0.1-0.004T|\right]_{10}^{15}$$

$$-10\Big[\ln|0.1-0.004\times 15| - \ln|0.1-0.04|\Big] \approx 4.05 \text{ horas.}$$

Obsérvese que de la definición del valor medio se deduce que $\bar{f}$ es el valor que hace que

$$\bar{f}\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

es decir, es el valor que hace que el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX sea igual al área del rectángulo de base el intervalo $[a,b]$ y altura $\bar{f}$.

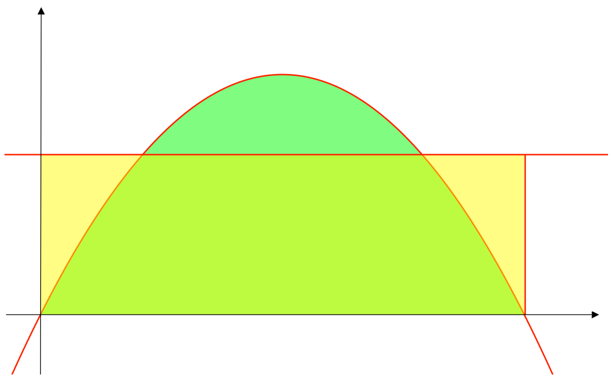


Figura 3.13: El valor medio de una función es el que hace que el área entre la curva y el eje OX coincida con al área del rectángulo de base $[a,b]$ y altura dicho valor medio.

3.3.5 Longitud de un arco de curva

Un *arco* es la parte de una curva que está entre dos puntos dados A y B. Estamos aquí interesados en calcular su longitud.

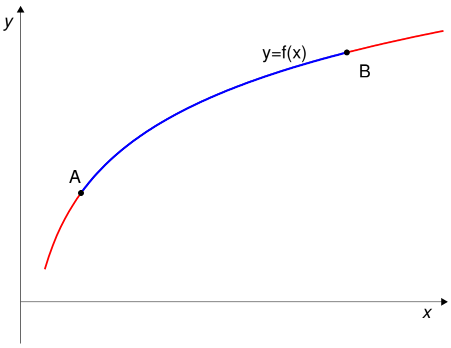


Figura 3.14: Un arco es un trozo de curva, comprendido entre dos puntos A y B.

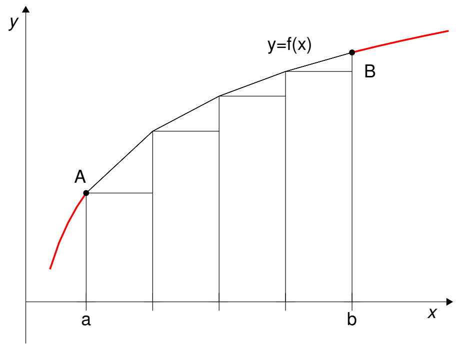


Figura 3.15: Para calcular la longitud del arco de curva, se aproxima este mediante una concatenación de segmentos rectos. La suma de sus longitudes aproxima la longitud del arco.

Para ello, comenzamos aproximando la curva mediante una sucesión de segmentos rectos, como en la Figura 3.15 y sumando sus longitudes. Luego veremos cuál es el límite de esa suma cuando los segmentos se hacen cada vez más pequeños.

En cada uno de los pequeños triángulos que se ven en la Figura 3.15 se puede aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar la longitud de la hipotenusa, y se tiene

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

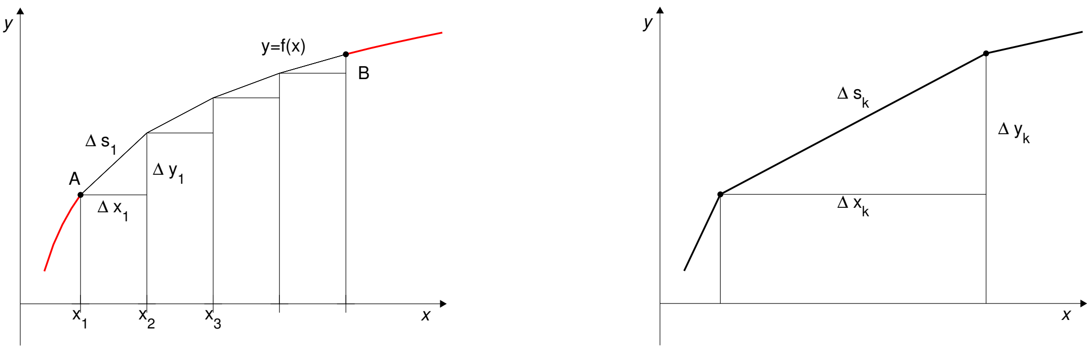


Figura 3.16: En cada triángulo se tiene $(\Delta s_k)^2 = (\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2$.

Sumando Δs para todos los segmentos se obtendría una aproximación de la longitud del arco. Cuanto mayor sea el número de segmentos con que aproximamos el arco de curva, mejor será la aproximación que se obtiene sumando sus longitudes.

Finalmente, al tomar límite cuando el número de subintervalos tiende a infinito, es decir, cuando la longitud de los Δx tiende a cero, se tendrá que los incrementos $(\Delta x, \Delta s)$ se convierten en diferenciales (dx, ds), el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ se convierte en la derivada $f'(x)$, y la suma se convierte en la integral:

$$\sum_{k=1}^{N} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\, \Delta x \overset{N \to \infty}{\to} \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

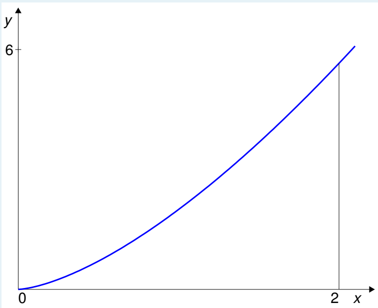
Longitud de un arco de curva

La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ comprendido entre los puntos $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Ejemplo 3.47

Hallar la longitud del arco de la curva $y = 2x^{3/2}$ comprendido entre los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$



Calculamos la derivada de la función $f(x) = 2x^{3/2}$:

$$f'(x) = 2\,\frac{3}{2}\,x^{1/2} = 3\,x^{1/2}$$

Según la fórmula anterior, la longitud del arco de curva mencionado es:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + (3x^{1/2})^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 9x}\, dx \\ &= \frac{1}{9}\int_0^2 9\,(1 + 9x)^{1/2}\, dx = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{3/2}(1 + 9x)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2}{27}\left[(1 + 18)^{3/2} - 1\right] \approx 6.0607 \end{aligned}$$

No todas las curvas pueden ser descritas mediante una relación del tipo $y = f(x)$. En muchas ocasiones, vienen descritas por **ecuaciones paramétricas**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right. \qquad \text{para } t \in [a, b]$$

La variable t es llamada *parámetro*, y para cada valor de t en el intervalo $[a, b]$ se obtiene un valor de x y un valor de y, que son las coordenadas de un punto de la curva. Cuando el parámetro t recorre el intervalo $[a, b]$, el punto (x, y) recorre la curva.

Longitud de un arco de curva descrita mediante ecuaciones paramétricas

La longitud del arco de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right.$ comprendido entre los puntos correspondientes a $t = t_a$ y $t = t_b$ viene dada por:

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

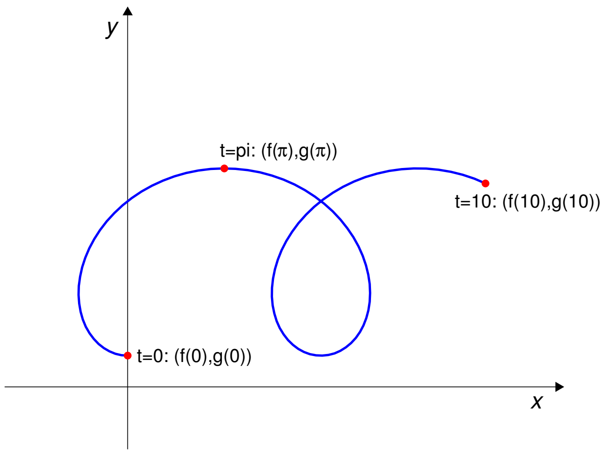


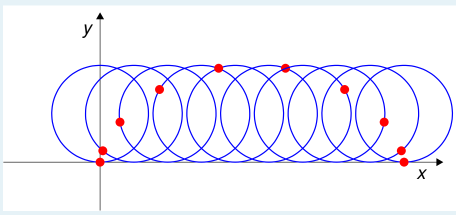
Figura 3.17: Curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t) = t - 3\,\mathrm{sen}(t)$, $y = g(t) = 4 - 3\cos(t)$, para $t \in [0, 10]$.

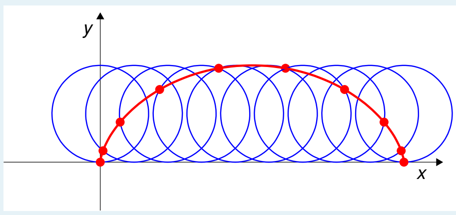
Ejemplo 3.48

La *cicloide* es la curva trazada por un punto fijo sobre una circunferencia cuando esta rueda sobre una línea recta. Las ecuaciones paramétricas de una cicloide, para una circunferencia de radio 1 son:

$$\begin{cases} x = t - \mathrm{sen}\, t \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

Calcular la longitud de un arco de cicloide correspondiente a una vuelta completa de la circunferencia, es decir, para $t \in [0, 2\pi]$.





Calculamos las derivadas de las funciones:

$$\begin{cases} x = f(t) = t - \mathrm{sen}\, t; & f'(t) = 1 - \cos(t) \\ y = g(t) = 1 - cos(t); & g'(t) = \mathrm{sen}(t) \end{cases}$$

Según la fórmula anterior, la longitud del arco de curva mencionado es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\mathrm{sen}(t))^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(t) - 2\cos(t) + \mathrm{sen}^2(t)}\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\,\frac{1-\cos(t)}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{2}}\, dt \overset{(**)}{=} 2\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= -4\left[\cos\frac{2\pi}{2} - \cos 0\right] = -4(-1-1) = 8 \end{aligned}$$

(*) Recuérdese que $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

(**) Se utiliza la identidad trigonométrica $\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

3.3.6 Área de una superficie de revolución

Para obtener el área de la superficie generada por la rotación de una curva, $y = f(x)$, en torno al eje X, entre las rectas $x = a$ y $x = b$, se divide el intervalo $[a, b]$ en partes iguales de longitud Δx, aproximamos la curva por una sucesión de segmentos rectos, Δs_k, obsérvese la figura 3.16, y hacemos girar ese conjunto de segmentos en torno al eje X. Cada Δs_k genera un tronco de cono.

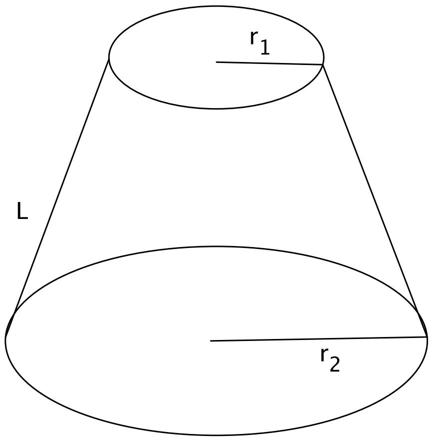


Figura 3.18: Tronco de cono

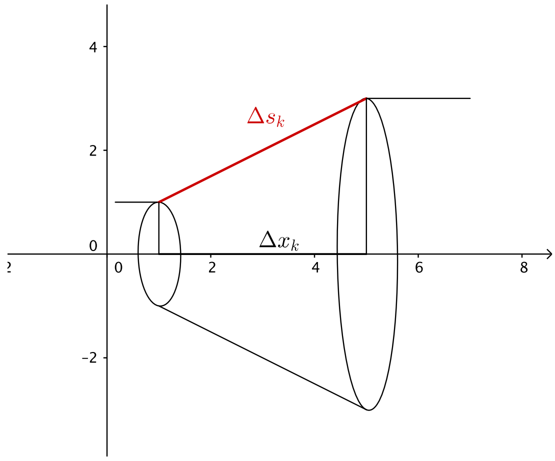


Figura 3.19: Giro de Δs_k en torno al eje X

El área lateral de un tronco de cono de radios r_1 y r_2 y generatriz L es $S = 2\pi r L$, donde $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$. En nuestro caso la medida de la generatriz, como vimos en la subsección 3.3.5, es

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

para cada k y los radios son $f(x_k)$ y $f(x_{k+1})$. Por el teorema del valor medio, existe un d_k en cada intervalo de amplitud Δx_k tal que la media de los radios es $r_k = f(d_k)$. Por tanto, la superficie para cada tronco de cono es

$$\Delta S_k = 2\pi f(d_k)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k.$$

Sumando para todos ellos, obtendremos una aproximación del área buscada, S,

$$S \approx \sum_{k=1}^{N} 2\pi f(d_k)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k.$$

Tomando límite cuando $\Delta x_k \to 0$ obtenemos S,

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

De modo análogo se puede razonar para obtener el área cuando el giro es en torno al eje Y.

Área de una superficie de revolución

El área de la superficie de revolución formada al girar la gráfica de $y = f(x)$ alrededor del eje X entre $x = a$ y $x = b$ viene dada por

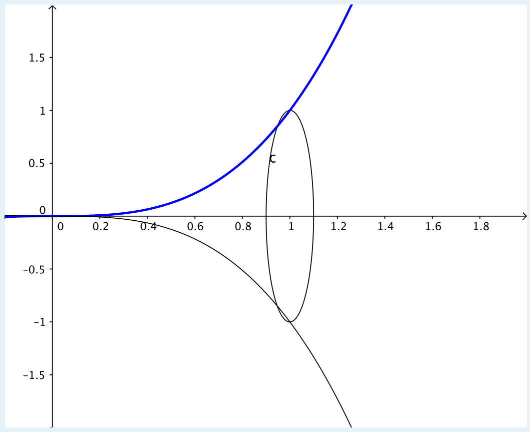
$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

El área de la superficie de revolución formada al girar la gráfica de $x = f(y)$ alrededor del eje Y entre $y = a$ y $y = b$ viene dada por

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (f'(y))^2}\,dy.$$

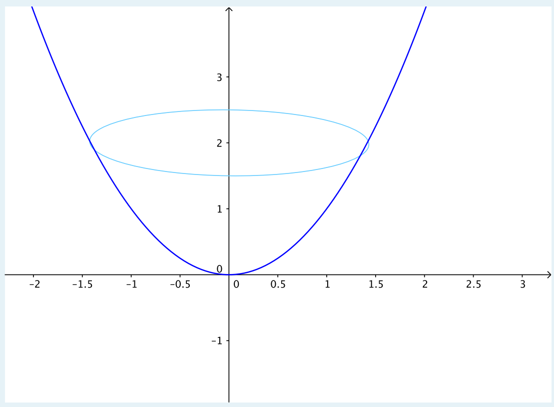
Ejemplo 3.49
Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^3$ alrededor del eje X, en el intervalo $[0, 1]$.

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx \\
&= \frac{2\pi}{36} \int_0^1 (36x^3)(1 + 9x^4)^{1/2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{18} \left[\frac{(1 + 9x^4)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1) = 3.563.
\end{aligned}
$$



Ejemplo 3.50
Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $f(x) = x^2$ alrededor del eje Y, en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$.

La función (de x) $y = x^2$ puede expresarse en la forma $x = \sqrt{y}$ como función de y. Cuando $x = \sqrt{2}$ entonces $y = 2$. Por tanto, buscamos el área de la superficie generada por la rotación de $x = \sqrt{2}$ en torno al eje Y entre $y = 0$ y $y = 2$.



$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_0^2 \sqrt{y}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy \\
&= 2\pi \int_0^2 \sqrt{y}\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy \\
&= \pi \int_0^2 \sqrt{4y + 1}\, dy
\end{aligned}
$$

Para obtener una primitiva de $\sqrt{4y+1}$ hacemos el cambio $t^2 = 4y + 1$. Por tanto, $dy = \frac{1}{2}\, t\, dt$ y obtenemos

$$
\int \sqrt{4y + 1}\, dy = \frac{1}{2} \int t^2\, dy + C = \frac{t^3}{6} + C = \frac{1}{6}(4y + 1)^{3/2} + C.
$$

Sustituyendo en la expresión para S,

$$
S = \frac{\pi}{6} \left[(4y + 1)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{6}(9^{3/2} - 1) = \frac{13\pi}{3}.
$$

3.4 Nociones de integración numérica

Como se ha visto antes, si se conoce una primitiva F de la función f, se puede calcular el valor de la integral definida mediante la *Regla de Barrow*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

En la mayoría de los casos, sin embargo, no se puede utilizar esta fórmula, ya que no se conoce dicha primitiva. Es posible, por ejemplo, que no se conozca la expresión matemática de la función f, sino solo sus valores en determinados puntos, recogidos de un experimento. Pero también hay funciones (de apariencia sencilla) para las que se puede demostrar que no tienen ninguna primitiva que pueda escribirse en términos de funciones elementales (por ejemplo e^{-x^2})

La **integración numérica** es una herramienta de las matemáticas que proporciona **fórmulas** y **técnicas** para calcular aproximaciones de integrales definidas. Gracias a ella se pueden calcular, bien es cierto que de forma aproximada, valores de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente y, sobre todo, se puede realizar ese cálculo en un ordenador.

La idea básica para aproximar el valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sin utilizar una primitiva de f ya se expuso en la sección 3.2: calcular la suma de las áreas de los rectángulos que "recubren" el área.

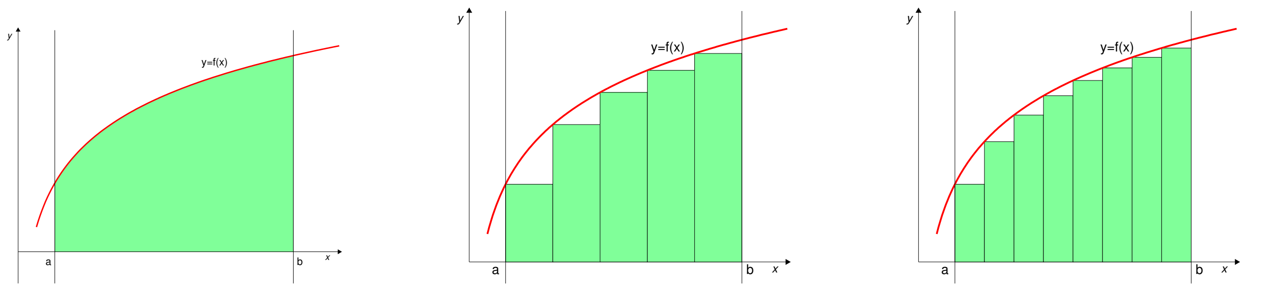


Figura 3.20: La integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, que es el valor del área bajo la curva sombreada en la primera figura, se puede aproximar por el resultado de sumar las áreas de los rectángulos.

Como resulta evidente, se comete un error, ya que se desprecian –en este caso– las áreas de las pequeñas zonas triangulares comprendidas entre la curva y los rectángulos. En el caso particular de la función representada en las figuras, el valor de la aproximación **es menor** que el valor exacto. Pero en otros casos puede ser mayor; véase, por ejemplo, la figura siguiente.

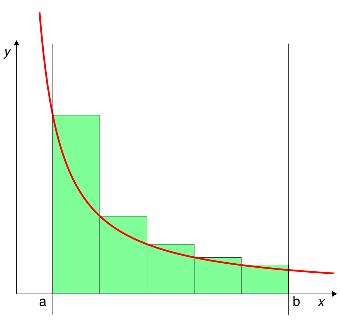


Figura 3.21: En este caso,la suma de las áreas de los rectángulos proporciona un valor **mayor** que el valor exacto, pero igualmente es una aproximación.

Como también resulta evidente, y se puede demostrar matemáticamente, el error que se comete es más pequeño (en valor absoluto, es decir, sin tener en cuenta el signo del mismo) cuanto más "estrechos" sean los rectángulos, es decir, cuanto mayor cantidad de ellos se usen.

¿Cómo se calcula la suma de las áreas de los rectángulos?

Se supone que se usan 5 rectángulos, como en la Figura 3.22 y se denotan $x_1 = a, x_2, x_3, x_4, x_5$ y $x_6 = b$ los puntos que determinan los 5 subintervalos.

Se supone también, para hacer las cosas más fáciles, que estos puntos están regularmente espaciados, es decir, que la distancia entre cada dos puntos consecutivos, que se denota h, es siempre la misma.

El área de los distintos rectángulos es (recordando área = base×altura):

$$\text{Area}(R_1) = \text{Longitud del segmento } [x_1, x_2] \times \text{ Altura del rectángulo} = (x_2 - x_1) \times f(x_1) = h\, f(x_1)$$

$$\text{Area}(R_2) = \text{Longitud del segmento } [x_2, x_3] \times \text{ Altura del rectángulo} = (x_3 - x_2) \times f(x_2) = h\, f(x_2)$$

etc.

Sumando todas se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Area}(R_1) + \cdots + \text{Area}(R_5) &= hf(x_1) + hf(x_2) + hf(x_3) + hf(x_4) + hf(x_5) \\ &= h\Big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\Big) \end{aligned}$$

y esta última expresión proporciona una aproximación (es verdad que no muy buena, de momento) del valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\Big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\Big)$$

Observamos ahora que, puesto que hay 5 subintervalos de igual longitud, debe ser

$$h = \frac{\text{Longitud del intervalo } [a,b]}{5} = \frac{b-a}{5}$$

luego, la fórmula anterior quedaría

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{5}\Big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\Big)$$

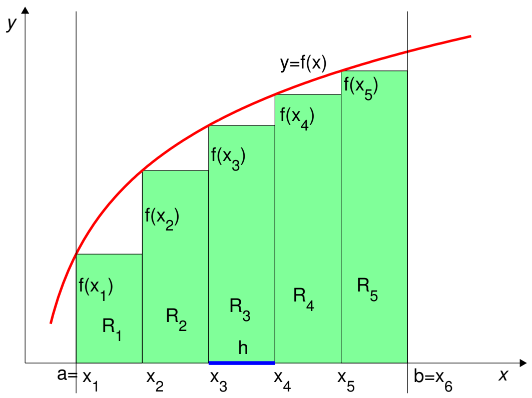


Figura 3.22: La altura del rectángulo de base $[x_1, x_2]$ es $f(x_1)$, el valor de f en x_1; la del rectángulo de base $[x_2, x_3]$ es $f(x_2)$; etc.

Si, en lugar de 5, tuviéramos 6 subintervalos, entonces tendríamos 7 puntos: $x_1 = a, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ y $x_7 = b$ y la aproximación se escribiría:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\Big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)\Big)$$

(obsérvese que el último punto x_7 no se utiliza en esta expresión). Si el número de subintervalos utilizados fuera muy grande, por ejemplo, 100 (es decir, 101 puntos), se podría escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{100}\Big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{100})\Big)$$

Es preferible y más usual, sin embargo, utilizar la expresión siguiente

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{100}\sum_{i=1}^{100} f(x_i)$$

El símbolo $\sum$ (letra griega sigma mayúscula) es muy utilizado en matemáticas: se denomina "sumatorio" y sirve para escribir de forma escueta una suma con un número muy grande o indeterminado de sumandos.

La expresión $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} f(x_i)$ se lee : *suma de* $f(x_i)$ *desde* $i=1$ *hasta* $i=100$.

Ya podemos, pues, escribir de forma general la aproximación de la integral para un número indeterminado de subintervalos.

Fórmula de los rectángulos

Sea f una función continua en $[a,b]$ y sean $x_1=a$, $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}=b$, $n+1$ puntos que definen una partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h=\dfrac{b-a}{n}$.
Entonces la integral definida de f entre a y b se puede aproximar por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

En la deducción de esta fórmula se ha aproximado el área bajo la curva en cada subintervalo por el área del rectángulo con la misma base y altura igual al valor de la función en el extremo inferior del subintervalo, como en la Figura 3.23. Pero también se podría haber utilizado el valor de la función en el extremo superior, como se ve en la Figura 3.24.

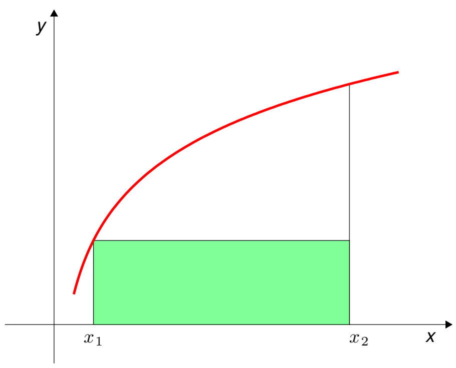


Figura 3.23: Se toma como altura del rectángulo el valor de f en el extremo inferior, x_1.

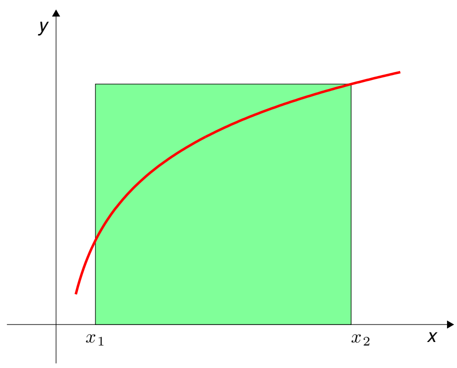


Figura 3.24: Se toma como altura del rectángulo el valor de f en el extremo superior, x_2.

Así se obtendría una variante de la Fórmula de los Rectángulos. Ambas fórmulas dan resultados similares desde el punto de vista del error que se comete en la aproximación.

Fórmula de los rectángulos (variante)

Sea f una función continua en $[a,b]$ y sean $x_1=a$, $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}=b$, $n+1$ puntos que definen una partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h=\dfrac{b-a}{n}$.
Entonces la integral definida de f entre a y b se puede aproximar por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=2}^{n+1} f(x_i)$$

Otra posibilidad, es tomar como altura del rectángulo el valor de la función en el punto medio del subintervalo, como se muestra en la Figura 3.25

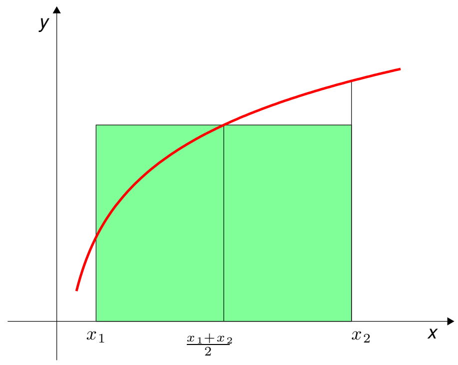


Figura 3.25: En la Fórmula del punto medio, se aproxima el área bajo la curva por el área del rectángulo de altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.

Fórmula del punto medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sean $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = b$, $n+1$ puntos que definen una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Entonces la integral definida de f entre a y b se puede aproximar por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Esta fórmula es de **orden 1**.

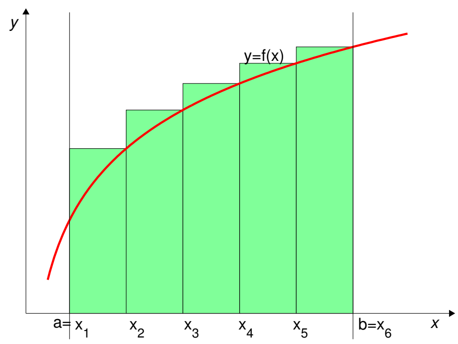


Figura 3.26: Fórmula de los rectángulos tomando como altura el valor de f en el extremos superior de cada subintervalo.

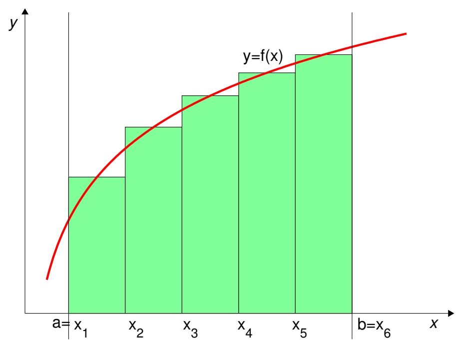


Figura 3.27: En la Fórmula del punto medio elige como altura de los rectángulos en valor de la función los puntos medios de cada subintervalo.

Orden de una fórmula de integración numérica

Se dice que una fórmula de integración es de **orden** k cuando es exacta para polinomios de grado k, es decir, que cuando el integrando es un polinomio de grado k, la fórmula proporciona el **valor exacto** de la integral. El **orden** de una fórmula de integración numérica nos da una medida de su bondad.

La Fórmula de los rectángulos es de orden 0.

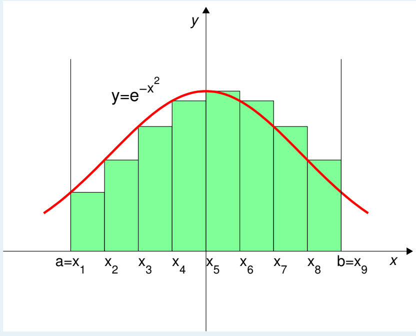
Ejemplo 3.51
Aproximar el valor de la integral definida $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ utilizando la fórmula de los rectángulos con 8 subintervalos.

Se construye una partición de $[-1,1]$ en 8 subintervalos, de forma que

$$h = \frac{1-(-1)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

y los puntos del soporte de la partición son:

$$\begin{array}{ll} x_1 = -1 \qquad = -1 & x_6 = -1+5h = 0.25 \\ x_2 = -1+h \;= -0.75 & x_7 = -1+6h = 0.5 \\ x_3 = -1+2h = -0.5 & x_8 = -1+7h = 0.75 \\ x_4 = -1+3h = -0.25 & x_9 = -1+8h = 1 \\ x_5 = -1+4h = \;\; 0 & \end{array}$$



Según la Fórmula de los Rectángulos anterior:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \approx h \sum_{i=1}^{8} e^{-x_i^2}$$

Con ayuda de una calculadora, se tiene:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \approx 0.25\Big(0.3679+0.5698+0.7788+0.9394+1+0.9394+0.7788+0.5698\Big) = \boxed{1.4860}$$

Hay que insistir en que el valor calculado es **solo una aproximación** del valor de la integral definida.

Otra posibilidad es aproximar el área bajo la curva en cada subintervalo por el área del trapecio que se muestra en la Figura 3.28.

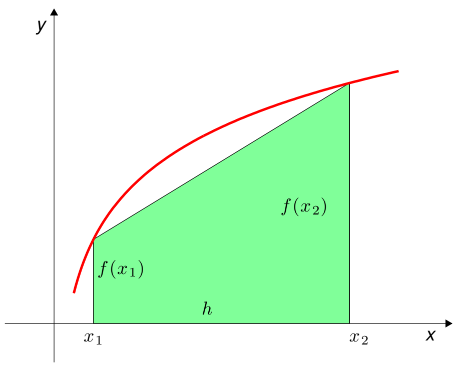


Figura 3.28: En el subintervalo $[x_1, x_2]$, por ejemplo, el área bajo la curva se aproxima por el área del trapecio, que tiene una base de longitud $f(x_1)$, otra base de longitud $f(x_2)$, y altura $h = x_2 - x_1$.

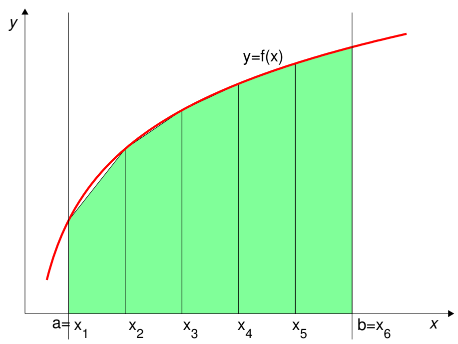


Figura 3.29: En la Fórmula de los trapecios, se aproxima el valor de la integral definida por la suma de las áreas de los trapecios.

Recordando que el área de un trapecio es $= \dfrac{\text{suma de las bases}}{2} \times$ altura, se tiene que el área del trapecio de la Figura 3.28 es

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\,h$$

y que la suma de las áreas de todos los de la Figura 3.29, es decir la aproximación de la integral, es

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}h + \cdots + \frac{f(x_5)+f(x_6)}{2}h \\ &= \frac{h}{2}\Big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_5)+f(x_6)\Big) \\ &= \frac{b-a}{2\times 5}\Big(f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+f(x_6)\Big)\end{aligned}$$

Obsérvese que, en esta suma, el valor de f en los extremos ($x_1 = a$ y $x_6 = b$) aparece una sola vez, mientras que el valor en los puntos internos (x_2, x_3, x_4 y x_5) aparece dos veces.

Generalizando esto al caso general, con un número indeterminado de subintervalos, se tiene:

Fórmula de los trapecios

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sean $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = b$, $n+1$ puntos que definen una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Entonces la integral definida de f entre a y b se puede aproximar por

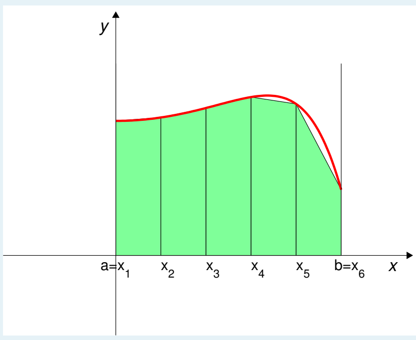
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{i=2}^{n} f(x_i) + f(b)\right)$$

Esta fórmula es de **orden 1**.

Ejemplo 3.52

Aproximar el valor de la integral definida $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(e^{x^2})\,dx$ utilizando la fórmula de los trapecios con 5 subintervalos.

Se considera una partición de $[0, 1]$ en 5 subintervalos, de forma que



$$h = \frac{1}{5} = 0.2$$

y los puntos del soporte de la partición son:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_1^2 = 0 \\ x_2 = 0.2 & x_2^2 = 0.04 \\ x_3 = 0.4 & x_3^2 = 0.16 \\ x_4 = 0.6 & x_4^2 = 0.36 \\ x_5 = 0.8 & x_5^2 = 0.64 \\ x_6 = 1 & x_6^2 = 1 \end{array}$$

La Fórmula de los trapecios anterior:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(e^{x^2})\,dx \approx \frac{h}{2}\left[\operatorname{sen}(e^0) + 2\sum_{i=2}^{5}\operatorname{sen}(e^{x_i^2}) + \operatorname{sen}(e^1)\right]$$

$$= 0.1\left[\operatorname{sen}(e^0) + 2\operatorname{sen}(e^{0.04}) + 2\operatorname{sen}(e^{0.16}) + \operatorname{sen}(e^{0.36}) + 2\operatorname{sen}(e^{0.64}) + \operatorname{sen}(e^1)\right]$$

Se tiene:

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sen}\left(e^{x^2}\right)dx \approx 0.1\Big[0.8415 + 2\big(0.8628 + 0.9221 + 0.9906 + 0.9474\big) + 0.4108\Big]$$

$$= \boxed{0.8698}$$

Hay que insistir en que el valor calculado es **solo una aproximación** del valor de la integral definida.