Apuntes de la asignatura

Matemáticas Generales Aplicadas a la Bioquímica

Grado en Bioquímica por las Universidades de Sevilla y Málaga
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

Índice

Versión: 18 de octubre de 2019

Tema 4

Análisis de Fourier

Versión: 18 de octubre de 2019

4.1 Conceptos Previos

4.1.1 Series numéricas

De un modo informal puede decirse que una serie numérica es la suma de una cantidad infinita de números. Cuando el resultado es un número finito se dice que la serie es convergente. Por ejemplo, si sumamos las potencias de $1/2$ desde $n=1$ en adelante: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+...$ el resultado es 1. Es un ejemplo de serie convergente. Se suele usar la notación $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

Dada una sucesión de números a_1, a_2, a_3,..., para tratar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se consideran las llamadas **sumas parciales**:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1\\
&S_2 = a_1 + a_2\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&...\\
&S_n = a_1 + ... + a_n \qquad \forall n \geq 1\\
&...
\end{aligned}
$$

Estas sumas parciales forma una sucesión $\{S_n\}$. Una definición formal de serie convergente es la siguiente:

Serie numérica convergente

Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente y su suma es S si existe el limite de S_n cuando n tiende a $+\infty$ y

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

A a_n se le llama término general de la serie. En el primer ejemplo, $\dfrac{1}{2^n}$ sería el término general.

De hecho, la representación decimal de los números reales no es más que una expresión para la suma de una serie. Por ejemplo,

$$\pi = 3'14159.... = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + ...$$

4.1.2 Series de funciones

Dada una sucesión de funciones f_1, f_2, f_3,.... definidas en un intervalo I, para cada $x \in I$ consideramos la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Obsérvese que para cada x fijo, esta expresión es una serie numérica. Diremos que la serie de funciones converge en $x = a$ si la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(a)$ es convergente. Denotamos A al conjunto de puntos a en los que la serie converge.

Función definida por una serie de funciones convergente
Dada la suma parcial $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$ donde $x \in A$, siendo A el conjunto de puntos donde la correspondiente serie numérica converge, la función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$$

es la función suma.

Algunos ejemplos de funciones definidas por series de funciones son:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En estos ejemplos, las series son de tipo Taylor y puede comprobarse que convergen para todo $x \in \mathbb{R}$.
En este tema en cambio, estamos interesados en series de otro tipo llamadas series trigonométricas. En ellas aparecen sumas de senos y cosenos. En general son de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \Big).$$

4.1.3 Integrales impropias de primera especie

Hasta ahora, hemos considerados las integrales definidas sobre intervalos acotados $[a, b]$ para a, b finitos. Veamos el modo de definir integrales en $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, +\infty)$. Es decir vamos a dar sentido a expresiones como

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Integrales en intervalos no acotados

Si existe el límite $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ y es finito se dice que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente y

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si existe el límite $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ y es finito se dice que $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ es convergente y

$$\int_{-\infty}^{a} (x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dado un número $c\in\mathbb{R}$ cualquiera, si existen los límites $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx$ y $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx$ y son finitos se dice que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 4.1
Obtener $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$.

Calculamos la integral $\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1-\frac{1}{b}$. Como $\lim\limits_{b\to+\infty} 1-\frac{1}{b}=0$, se tiene que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

Ejemplo 4.2
Obtener $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Tomamos por ejemplo $c=0$ y calculamos las integrales:

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^b = \arctan b, \qquad \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_a^0 = -\arctan a.$$

Como $\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{a\to-\infty}\arctan a = -\frac{\pi}{2}$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

4.2 Series de Fourier

Bajo ciertas condiciones, una función periódica puede expresarse mediante suma infinita (serie) de senos y/o cosenos.

Por ejemplo, veremos que la función $f(x)=\pi^2-x^2$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y definida en todo $\mathbb{R}$ por periodicidad (es decir, definida del mismo modo en $[\pi,2\pi]$, $[2\pi,3\pi]$,... y en $[-2\pi,-\pi]$, $[-3\pi,-2\pi]$,...), puede desarrollarse en serie de la forma

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Las primeras sumas parciales de la serie son:

$$S_1 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos x,$$

$$S_2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos x - \cos(2x),$$

$$S_3 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos x - \cos(2x) + \frac{4}{9}\cos(3x),$$

$$S_4 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos x - \cos(2x) + \frac{4}{9}\cos(3x) - \frac{1}{4}\cos(4x).$$

Cuanto mayor sea la suma parcial considerada, más "se parece" a la función. Obsérvese por ejemplo las gráficas de $y = \pi^2 - x^2$ (en azul) y S_4 (en rojo) en la Figura 4.2.

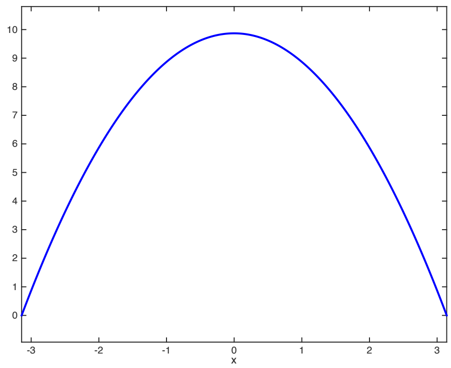


Figura 4.1: $f(x) = \pi^2 - x^2$ en $[-\pi, \pi]$

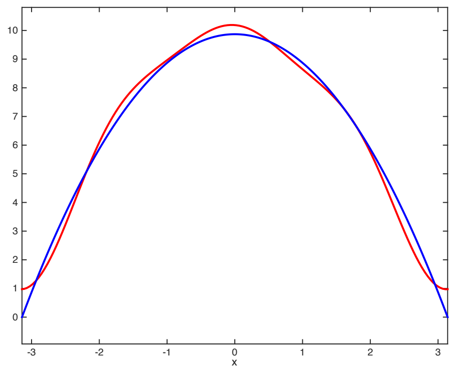


Figura 4.2: $f(x)$ y S_4 en $[-\pi, \pi]$

El significado matemático de decir que "se parecen" es el siguiente: Dada f, se puede probar que, para cada $n \geq 1$, la correspondiente S_n es la función de la forma $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + ... + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ que hace mínima la cantidad

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + ... + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))|^2\, dx.$$

A lo largo de esta Sección vamos a estudiar cómo y bajo qué condiciones podemos expresar una función periódica de periodo T como una serie cuyos sumandos son combinaciones de senos y cosenos, esto es, como una serie trigonométrica del siguiente tipo:

$$f(x) \stackrel{?}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right).$$

En teoría de la comunicación, la variable independiente es el tiempo t y la función $f(t)$ se dice que es una señal periódica en tiempo continuo. Cuando esta representación es posible, decimos que hemos descompuesto la señal en armónicos o modos de vibración.

4.2.1 La serie de Fourier de una función periódica

Las series de Fourier se suelen definir para un conjunto de funciones más general que el de funciones continuas. Recordemos que una **función continua a trozos** es una función continua salvo quizás en algunos puntos x_i, $i = 1, ..., n$, donde los límites laterales son finitos. Una función continua es un caso particular de esta situación.

Las series de Fourier se definen en primer lugar para funciones periódicas.

Serie de Fourier de f Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función continua a trozos y periódica de periodo T. Se llaman coeficientes de Fourier de f en el intervalo $[-T/2, T/2]$ a los siguientes números:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx, \qquad n = 1, 2, ...$$

Se llama serie de Fourier asociada a f a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right).$$

De manera análoga pueden definirse los coeficientes de Fourier en el intervalo $[0, T]$.

En general, la serie no tiene por qué ser convergente en cualquier x y en caso de que lo sea, no sabemos si la suma en x coincide con $f(x)$.

Ejemplo 4.3

Obtener la serie de Fourier para la función $f(x) = \pi^2 - x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y definida en todo $\mathbb{R}$ por periodicidad.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[(\pi^2 - x^2)\frac{1}{n}\,\text{sen}(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)\,dx.$$

Integrando nuevamente por partes,

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\left[\frac{\text{sen}(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{4}{n^2}\cos(n\pi).$$

Por tanto, $a_n = -\frac{4}{n^2}(-1)^n$. Análogamente, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,\text{sen}(nx)\,dx = 0$. En consecuencia, la serie de Fourier asociada a la función dada es

$$\frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

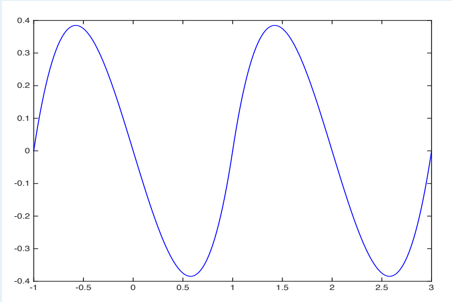
Casos particulares: Funciones pares o impares

Si f es **par**, entonces todos los $b_n = 0$ y la serie de Fourier asociada es $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$,

si f es **impar**, entonces todos los $a_n = 0$ la serie de Fourier asociada es $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$,

donde a_n y b_n se definen del mismo modo que en el caso general.

Ejemplo 4.4
Obtener los dos primeros sumandos de la serie de Fourier asociada a la función $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 1]$ y periódica de periodo $T = 2$.



Se ha representado la función en el intervalo $[-1, 3]$. Puesto que es impar, la serie es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\pi n x)$.

Calculamos los primeros coeficientes de Fourier:

$$b_1 = \int_{-1}^{1} (x^3 - x) \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \left[-(x^3 - x) \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1) \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (3x^2 - 1) \cos(\pi x)\, dx = \frac{1}{\pi^2} \left[(3x^2 - 1) \operatorname{sen}(\pi x) \right]_{-1}^{1} - \frac{6}{\pi^2} \int_{-1}^{1} x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$$
$$= -\frac{6}{\pi^2} \int_{-1}^{1} x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \frac{6}{\pi^3} \left[x \cos(\pi x) \right]_{-1}^{1} - \frac{6}{\pi^3} \int_{-1}^{1} \cos(\pi x)\, dx = -\frac{12}{\pi^3}$$

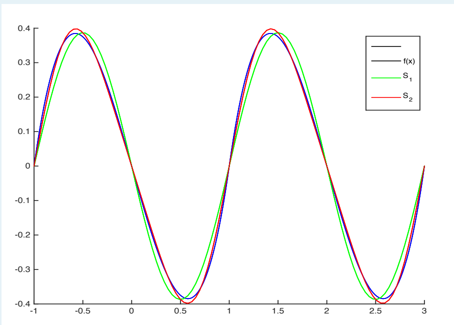
Por tanto,

$$S_1 = -\frac{12}{\pi^3} \operatorname{sen}(\pi x).$$

Análogamente,

$$S_2 = -\frac{12}{\pi^3} \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{3}{2\pi^3} \operatorname{sen}(\pi 2x).$$

En la figura se observa que la suma parcial S_1 y más aún S_2, aproximan la función.



Veamos ahora cuándo la serie de Fourier define una función y bajo qué condiciones es igual a $f(x)$.

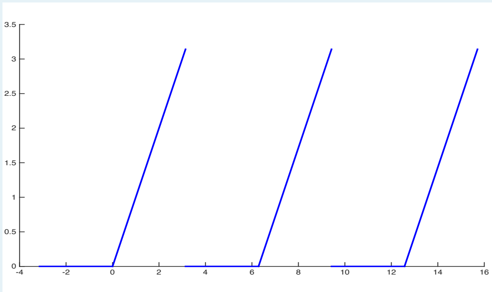
Los ejemplos que hemos visto corresponden a funciones continuas. Estas funciones siempre pueden aproximarse por sumas de senos y/o cosenos.

Cuando la función es periódica de periodo $T > 0$ y continua en todo $\mathbb{R}$ entonces, la serie de Fourier asociada converge en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)$$

Veamos un ejemplo de una función periódica que no es continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.5
Obtener la serie de Fourier asociada a la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \textbf{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ **y que es periódica de periodo** 2π**.**



Calculamos los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx.$$

Integrando por partes,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\text{sen}(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

Análogamente,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi} 0 f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)\,dx.$$

Integrando por partes,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n} + \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Así pues, la serie de Fourier es

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}(nx)\,.$$

Calculemos los primeros sumandos de esta serie:

$$S_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \text{sen}\,x,$$
$$S_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \text{sen}\,x - \frac{1}{2}\,\text{sen}(2x),$$
$$S_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \text{sen}\,x - \frac{1}{2}\,\text{sen}(2x) - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\,\text{sen}(3x).$$

En las Figuras 4.3-4.6 observamos que las sumas parciales S_1, S_2, S_3 se van pareciendo cada vez más a $f(x)$ salvo en las proximidades de los extremos del intervalo, donde la función es discontinua.

Diremos que una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es **continua a trozos** cuando es continua salvo quizás en algunos puntos

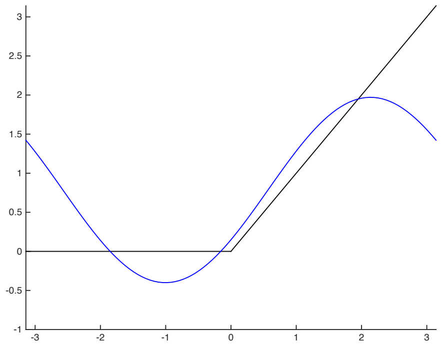


Figura 4.3: S_1 y $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

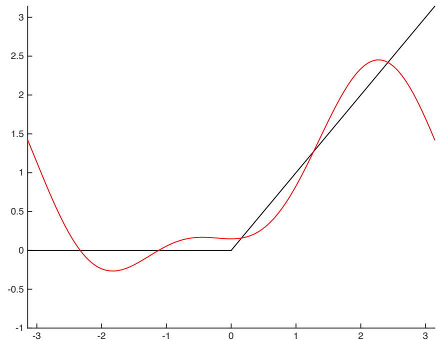


Figura 4.4: S_2 y $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

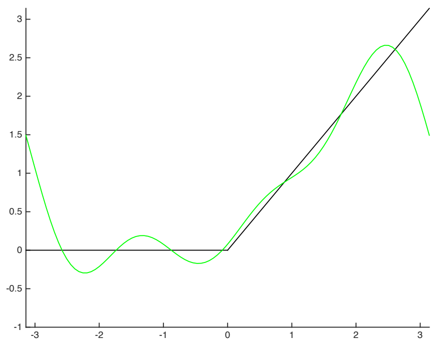


Figura 4.5: S_3 y $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

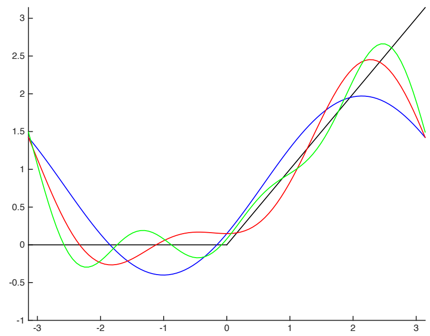


Figura 4.6: S_1, S_2, S_3 y $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$

x_i, $i = 1...n$, donde los límites laterales para la función existen y son finitos. El ejemplo anterior es de este tipo. En este caso, la serie de Fourier también converge. En los puntos x en que la función es continua, la serie coincide con $f(x)$ y en los puntos de discontinuidad, la serie toma como valor la media del límite por la derecha y del límite por la izquierda de la función en esos puntos.

Supongamos que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es periódica de periodo $T > 0$ y continua a trozos. Entonces, la serie de Fourier asociada converge en cada $x \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{\lim\limits_{y \to x^+} f(y) + \lim\limits_{y \to x^-} f(y)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right)$$

En particular, en los puntos donde la función es continua se tiene que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right).$$

4.2.2 Variantes en la expresión de las series de Fourier

En algunos campos de la ciencia, por cuestiones de interpretación, interesa escribir las series de Fourier con una expresión distinta a la que hemos presentado aquí. Algunas opciones son las siguientes:

- Como hemos mencionado, los coeficientes de Fourier también se pueden definir en el intervalo $[0, T]$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- El término general de la serie de Fourier se puede escribir como un coseno. En efecto, si consideramos el número complejo $z_n = a_n - ib_n$ y denotamos F_n a su módulo y α_n a su argumento,

$$F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \alpha_n = \mathrm{arc\,tg}(-b_n/a_n),$$

  utilizando propiedades de las razones trigonométricas y denotando $F_0 = a_0/2$, se obtiene la siguiente expresión para la serie de Fourier:

$$F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x + \alpha_n\right).$$

- Podemos encontrar la serie de Fourier escrita utilizando la exponencial compleja $e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ del modo siguiente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \quad \text{donde } c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}\,dx.$$

  Los coeficientes c_n se conocen como **coeficientes de Fourier**.

- En teoría de la comunicación se suele escribir $w = 2\pi/T$. Esta variable representa la **frecuencia** y mide el número de repeticiones por unidad de tiempo de un suceso periódico. Entonces la serie de Fourier es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n\,\mathrm{sen}\,(n\omega x) \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$

4.2.3 Funciones definidas en un intervalo

Supongamos ahora que f no es periódica pero está definida en un intervalo acotado $[0, L]$ y es continua a trozos. Podemos definir una nueva función periódica que coincida con f en $[0, L]$ y obtener la serie de Fourier correspondiente. Esta nueva función puede definirse de forma par, en cuyo caso obtendremos una serie en cosenos, o de forma impar y obtendremos una serie en senos.

Serie de Fourier en senos o en cosenos

Sea $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[0, L]$. Entonces, la serie de Fourier en cosenos es convergente en el intervalo $[0, L]$ y

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \qquad \forall x \in [0, L]$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Asimismo, si f es continua en $[0, L]$ y $f(0) = f(L) = 0$, entonces la serie de Fourier en senos es convergente y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \qquad \forall x \in [0, L]$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 4.6
Obtener la serie de Fourier en cosenos para la función $f(t) = t$ definida en el intervalo $[0, L]$.

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L t\,dt = \frac{2}{L}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^L = L.$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L t\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\cos u\,du = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[u\,\mathrm{sen}\,u + \cos u\right]_0^{n\pi} = \begin{cases} -\dfrac{4L}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia, la serie de Fourier en cosenos asociada a la función dada es

$$t = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\Big(\cos\frac{\pi t}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi t}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi t}{L} + \ldots\Big).$$

4.2.4 Una aplicación de la series de Fourier

Las series de Fourier se utilizan, por ejemplo, para determinar una función denominada **densidad electrónica**, la cual informa sobre la estructura de una molécula cristalina (la posición de sus moléculas) observando la difracción producida por el choque de ondas de rayos x sobre sus átomos, véase la Figura 4.7. La densidad electrónica es la función periódica suma resultante de las contribuciones de los distintos átomos. En la Figura 4.8 se muestra el caso de solo dos átomos. En la práctica, esta función es la suma de una enorme cantidad de funciones sinuosidales (senos y cosenos) de manera que puede ser considerada como una serie de Fourier.

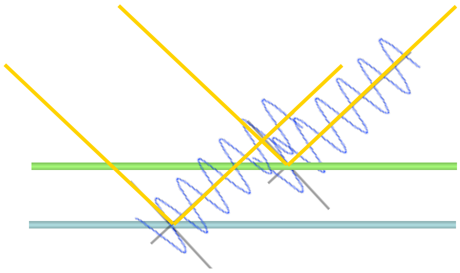


Figura 4.7: Reflexión de los rayos X sobre los átomos

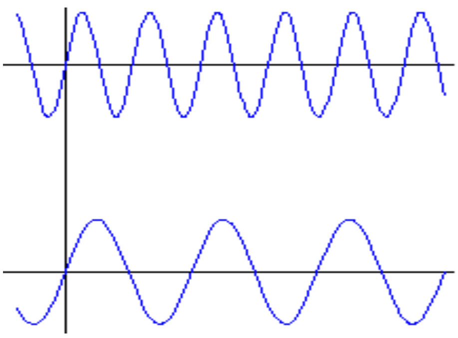


Figura 4.8: Contribución de dos átomos

$\Longrightarrow$

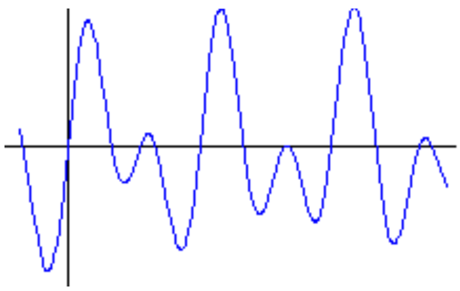


Figura 4.9: Función periódica resultante

4.3 La transformada de Fourier

La transformada de Fourier se usa para transformar funciones que están definidas sobre una determinada variable, x, en funciones definidas sobre otra variable, α. Lo habitual es que la función resultante sea más fácil de manejar. Después de tratarla, se puede volver al dominio original en x, usando la transformada de Fourier inversa. Generalmente, x es una variable física (espacial o temporal) y α es otra variable que se puede interpretar como una frecuencia.

En este apartado consideramos funciones $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continuas a trozos tal que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ sea finita.

La transformada de Fourier de f se define como

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y}\, dy.$$

Obsérvese que la variable independiente para la función original es x, mientras que para la transformada de Fourier es α. Por ejemplo, si interpretamos x como una variable espacial y f denota una magnitud física, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ la cantidad $\hat{f}(\alpha)$ indica cuánta parte de f está sometida a fluctuaciones con frecuencia α.

Las definiciones de los coeficientes c_n que vimos en las series de Fourier, se pueden mirar como una versión discreta de la definición de $\hat{f}$ (allí, en vez de valores asociados a cada $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos valores asociados a los $n = 0, 1, 2, ...$).

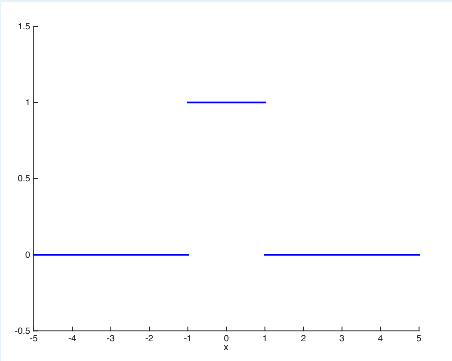
Algunos autores definen la transformada de Fourier sin que aparezca el coeficiente $1/\sqrt{2\pi}$ o con $1/2\pi$ en su lugar. También podemos encontrar $e^{-i2\pi\alpha y}$ en vez de $e^{-i\alpha y}$.

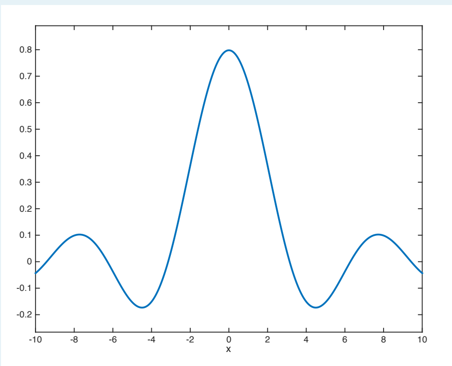
Recordemos que $e^{-i\alpha y} = \cos(-\alpha y) + i \operatorname{sen}(-\alpha y) = \cos(\alpha y) - i \operatorname{sen}(\alpha y)$.

Ejemplo 4.7
Obtener la transformada de Fourier de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \textbf{en otro caso.} \end{cases}$

Obsérvese que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 < +\infty.$
La transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\alpha y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-i\alpha y}}{i\alpha} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}.$$





En la figura de la izquierda podemos ver la función y en la de la derecha su transformada.

Si f es par o impar se pueden obtener expresiones simplificadas de su transformada

Si f es **par**, entonces

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \cos(\alpha y)\, dy.$$

Si f es **impar**, entonces

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \operatorname{sen}(\alpha y)\, dy.$$

Ejemplo 4.8
Obtener la transformada de Fourier de la función definida en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \textbf{si } x \in [-1/2, 0) \\ -2x+1 & \textbf{si } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \textbf{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-1/2}^{0} (2x+1)\, dx + \int_{0}^{1/2} (-2x+1)\, dx = 1/2 < +\infty.$
Como $f(-x) = f(x)$, podemos calcular la transformada de Fourier como

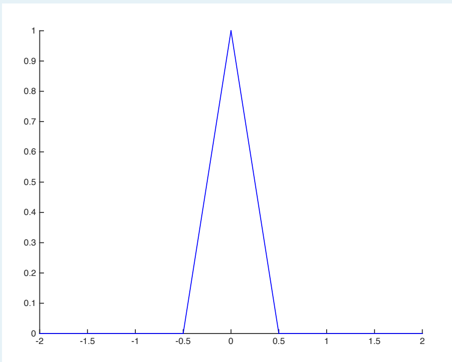
$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(y) \cos(\alpha y)\, dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2} (-2y+1) \cos(\alpha y)\, dy.$$

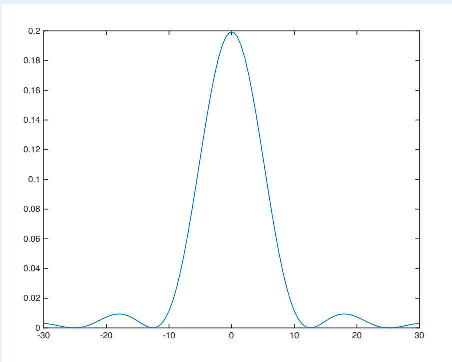
Integrando por partes,

$$\int (-2y+1)\cos(\alpha y)\, dy = (-2y+1)\frac{\operatorname{sen}(\alpha y)}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \int \operatorname{sen}(\alpha y)\, dy = (-2y+1)\frac{\operatorname{sen}(\alpha y)}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}\cos(\alpha y).$$

Por tanto,

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(-2y+1)\frac{\operatorname{sen}(\alpha y)}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}\cos(\alpha y) \right]_0^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2}{\alpha^2}\,(1 - \cos\frac{\alpha}{2}).$$





En la figura de la izquierda podemos ver la función y en la de la derecha su transformada.

La transformada de Fourier Inversa de $\hat{f}$ se define como

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha.$$

La transformada inversa “deshace” lo que “hace” la transformada de Fourier y pasa de funciones definidas en el espacio de α a funciones definidas en el espacio de x.

La fórmula precedente indica que $f(x)$ es la suma (o integral) de infinitas contribuciones, correspondientes a las distintas frecuencias de $\alpha \in \mathbb{R}$.

La transformada de Fourier es lineal, es decir, si a y b son constantes y f y g son funciones, se cumple que

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

4.3.1 Transformada de Fourier de funciones generalizadas

Para describir algunos fenómenos físicos necesitamos conceptos que se salen del marco establecido. En este apartado vamos a trabajar de un modo informal, realizando algunos cálculos sin justificar. Comenzamos por introducir un ejemplo de función generalizada o distribución, llamada **Delta de Dirac**, denotada $\delta(x)$. Aunque $\delta(x)$ no es una función en el sentido clásico, puede ser aproximada por una sucesión de funciones ordinarias como

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

algunas de las cuales se han representado en la Figura 4.10. Se supone entonces que $\delta(x)$ es el límite (en un sentido adecuado) de las $\delta_n(x)$:

$$\delta(x) = \lim_{n \to +\infty} \delta_n(x).$$

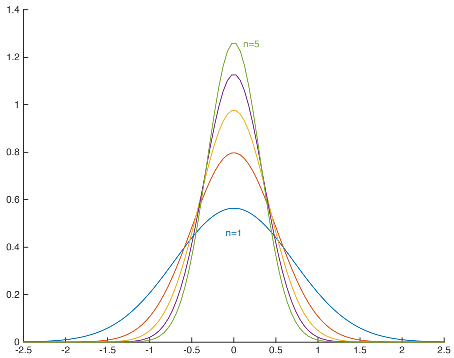


Figura 4.10: Representación de las funciones $\delta_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

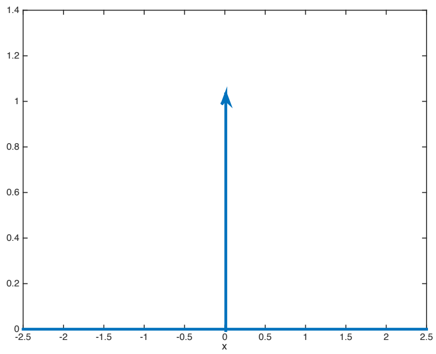


Figura 4.11: Representación figurada de la Delta de Dirac centrada en el origen: $\delta(x)$

Delta de Dirac

Se suele decir que esta función generalizada, también llamada impulso, se caracteriza por las siguientes propiedades:

- $\delta(x) \geq 0$ para todo x.
- $\delta(x) = 0$ para todo $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$

Estas propiedades se pueden justificar teniendo en cuenta que

- $\delta_n(x) \geq 0$ para todo x y todo n.
- $\delta_n(x) \to 0$ cuando $n \to +\infty$ para todo $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\, dx = 1$ para todo n.

De modo análogo, podemos definir la **Delta de Dirac trasladada a $x = a$**:

$$\delta_a(x) = \delta(x-a).$$

De nuevo, $\delta_a(x)$ es siempre positiva, verifica $\delta(x-a) = 0$ para todo $x \neq a$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\, dx = 1$.

Propiedades de la Delta de Dirac: Se suelen aceptar las siguientes propiedades:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx = f(a)$.
- $\displaystyle\mathcal{F}(\delta)(\alpha) = \hat{\delta}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}\, dy = 2\pi\delta(x)$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-a)y}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)y}\, dy = 2\pi\delta(x-a)$.

Veamos cómo justificar, de modo informal, algunas de las propiedades anteriores. Una comprobación más detallada puede verse en la correspondiente hoja de problemas.

- La primera, puede entenderse usando la definición de la delta de Dirac
- $\displaystyle\mathcal{F}(\delta)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) e^{(-\alpha y i)}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
- En tercer lugar, vamos a comprobar únicamente que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}\, dy = 2\pi\delta(x)$.

  Tomando transformada inversa en la igualdad $\displaystyle\hat{\delta}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ del apartado anterior,

  $$\mathcal{F}^{-1}(\hat{\delta})(x) = \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x}\, d\alpha.$$

  Por tanto, $\displaystyle\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\, d\alpha$.

En este nuevo contexto, el de las distribuciones, podemos obtener la transformada de Fourier de funciones que no cumplen la condición $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$.

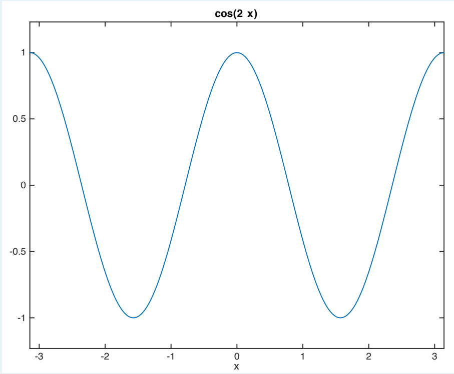
Ejemplo 4.9
Obtener la transformada de Fourier de la función constante $f(x) = 1$

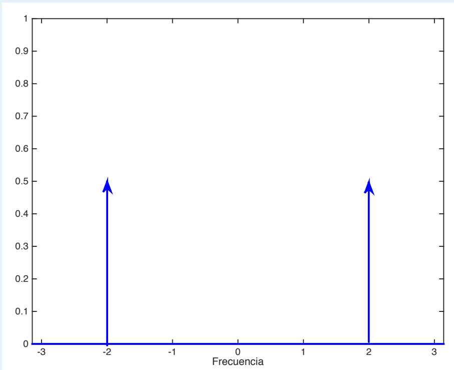
$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-i\alpha y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi\delta(\alpha) = \sqrt{2\pi}\, \delta(\alpha).$$

Ejemplo 4.10
Obtener la transformada de Fourier de $f(x) = \cos(ax)$ siendo a una constante positiva.

Para obtener la transformada de Fourier utilizamos la igualdad $\cos(ax) = \dfrac{e^{axi} + e^{-axi}}{2}$ y la cuarta de las propiedades anteriores.

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\alpha y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ayi} + e^{-ayi}}{2} e^{-\alpha yi}\, dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha-a)yi}\, dy$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+a)yi}\, dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} [2\pi\delta(\alpha-a) + 2\pi\delta(\alpha+a)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, [\delta(\alpha-a) + \delta(\alpha+a)]$$





En la figura de la izquierda podemos ver la representación de $y = \cos(2x)$ y en la de la derecha, la representación figurada de su transformada de Fourier que corresponde a dos Deltas de Dirac centradas en $x = -2$ y en $x = 2$, respectivamente.

Análogamente puede probarse que si $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$ entonces $\hat{f}(\alpha) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, [-\delta(\alpha-a) + \delta(\alpha+a)]$

4.3.2 Transformada de Fourier generalizada de una función periódica

Consideremos una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo $T > 0$. Entonces, la podemos desarrollar en serie de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \tag{4.1}$$

con $\omega = 2\pi/T$. En este caso hemos usado la expresión compleja en términos de la frecuencia. Su transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega x} e^{-i\alpha y}\, dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha-n\omega)y}\, dy = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\alpha - n\omega).$$

La suma de deltas de Dirac obtenidas ocurren en los valores que hacen $\alpha - n\omega = 0$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ es decir, en $\alpha = ..., -2\omega, -\omega, 0, \omega, 2\omega, ...$ y se llama tren de impulsos o espectro correspondiente a $y = f(x)$.

Obsérvese que la función $y = f(x)$ se representa en el espacio de las x (x suele representar espacio o tiempo) mientras que el tren de impulsos se representa en el espacio de las frecuencias. En la Figura 4.12 se representa un ejemplo de tren de impulsos.

Podemos interpretar que f es una función periódica caracterizada por los coeficientes de Fourier, c_n. La igualdad (4.1) muestra que c_n indica cuánto de $e^{-in\omega x}$ hay en $f(x)$. Análogamente, la igualdad

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\alpha - n\omega)$$

muestra que los valores 'importantes" de $\hat{f}$ son aquellos en que α toma los valores $n\omega$.

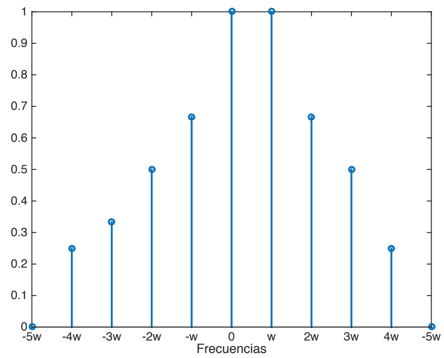


Figura 4.12: Tren de impulsos o espectro

4.3.3 Una aplicación de la transformada de Fourier

Una señal luminosa, acústica o electromagnética puede ser descrita por una función $y = f(t)$ periódica. A veces interesa hacer un tratamiento a estas señales, por ejemplo, filtrar graves o agudos en un sonido o eliminar manchas en una imagen proyectada. La manipulación directa sobre la señal no siempre es posible a causa de su complejidad. Lo que se hace entonces es descomponer la señal compleja obtenida en el dominio del tiempo en señales simples y obtener a continuación el tren de impulsos correspondiente en el espacio de frecuencias como se ha hecho en el apartado anterior. La representación de la frecuencia conlleva una reducción de datos con respecto a la representación del tiempo, aunque la información sea la misma en ambos dominios, en el dominio de frecuencia es más compacta. Utilizando la transformada inversa de Fourier es posible volver nuevamente al dominio del tiempo.

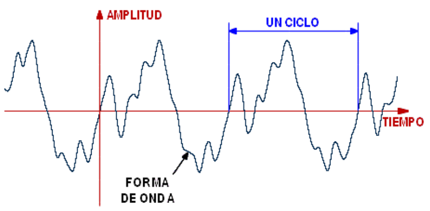


Figura 4.13: Señal que representa un sonido

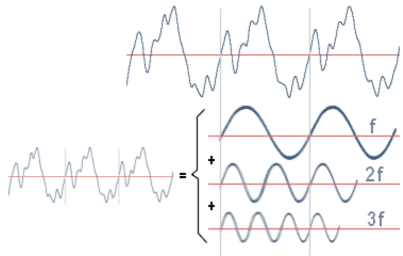


Figura 4.14: Señales simples obtenidas

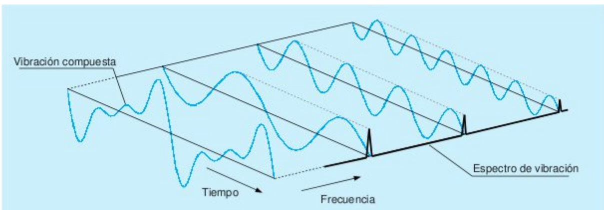


Figura 4.15: Descomposición de $f(x)$ en señales simples y tren de impulsos correspondiente

Un ejemplo de señal compleja aparece en la Figura 4.13. En la Figura 4.14[1] puede verse su descomposición en señales simples, para ello se utilizaría la serie de Fourier. En ambas se ha representado el tiempo como variable independiente. En la Figura 4.15[2] puede verse una señal que representa una vibración, su descomposición en vibraciones simples y el espectro correspondiente, en negro. Para obtener este último se aplica la transformada de Fourier.

[1]http://www.yio.com.ar/curso-sonido.php
[2]http://www.sinais.es/Recursos/Curso-vibraciones/fundamentos/fundamentos_vibraciones.html

Tema 5

Funciones de varias variables

Versión: 18 de octubre de 2019

En este tema introducimos algunos elementos básicos del cálculo diferencial en varias variables. Muchos procesos (físicos, biológicos, ...) dependen de varias variables. Muy frecuentemente, estas son la posición espacial y el tiempo, pero también pueden ser otras. Por ejemplo, la temperatura de un ser vivo puede variar en tiempo (según las horas del día), pero también en espacio (el punto del cuerpo que se considere). También en la concentración de nutrientes en el interior y en torno a una célula, la concentración de una determinada droga en el cuerpo, la velocidad y la presión del viento en el aire, o la intensidad de un campo eléctrico o magnético generado por una corriente eléctrica, entre otros muchos ejemplos.

Al igual que ocurre con las funciones de una variable, las derivadas de una función de varias variables permiten obtener información valiosa sobre ésta: Permiten conocer y estimar cómo varía y permiten obtener aproximaciones mediante polinomios, por ejemplo. Aprender a obtener este tipo de información van a ser el objetivo básico de este capítulo.

5.1 Dominio y recorrido de una función de varias variables

Recordamos la notación que usamos para funciones de una variable. Sea, por ejemplo,

$$f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{definida por} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

Dominio es el conjunto de números x para los cuales la función está bien definida, es decir, se puede calcular.

Recorrido es el conjunto de todos los valores $y = f(x)$ que se obtienen al evaluar f para todos los puntos x de su dominio.

En el caso del ejemplo, el dominio de f es $[0, 4]$ y el recorrido es el intervalo $[0, 2]$.

Consideramos ahora funciones de dos variables, definidas para pares de números reales (x, y), con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Se denomina también a estos pares **puntos** y se suele escribir

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

para indicar que ambas componentes pertenecen a $\mathbb{R}$. Se identifican con los puntos del plano. A cada par (x, y) la función asocia un número real $z = f(x, y)$.

Igual que para funciones de una variable, el dominio de una función

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

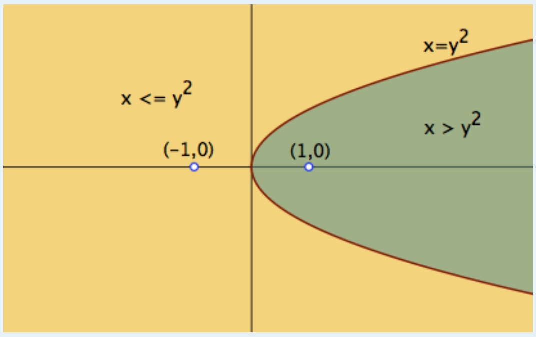
es el subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ sobre el que consideramos la función o sobre el que está bien definida, y el recorrido es el conjunto de valores z que se obtienen al evaluar f en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo 5.1
Determinar el dominio de la función $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$.

El dominio de esta función es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales se puede calcular $\sqrt{y^2 - x}$. Para ello tiene que ocurrir

$$y^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq x$$

Trataremos de identificar la región del plano OXY en la cual se verifica $x \leq y^2$. Está claro la región en la que $x \leq y^2$ está separada de la región en la que $x > y^2$ por la curva $x = y^2$. Esta curva divide el plano OXY en dos partes.
Para saber en cuál de ellas se verifica $x \leq y^2$ se puede evaluar la función en algún punto de cada región.
Por ejemplo, en el punto $(-1, 0)$ se tiene $x = -1 < y^2 = 0$ mientras que en el punto $(1, 0)$ se tiene $x = 1 > y^2 = 0$
El dominio de $f(x, y)$ es, por lo tanto, la parte "exterior" a la parábola:

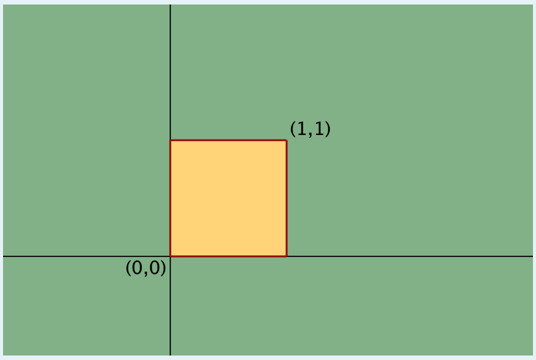


$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \leq y^2\}$$

El recorrido de f es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que cero.

Ejemplo 5.2
Determinar el dominio de la función $f(x, y) = [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$.

La notación $[0, 1] \times [0, 1]$ indica que la primera componente del par (x, y), es decir, x, varía en el primero de los intervalos, $[0, 1]$ y lo mismo la segunda, (ya que en este caso ambos intervalos son iguales).
Es decir, que f está definida en el cuadrado de la figura, que incluye sus fronteras
¿Qué conjunto de valores toma f?
Está claro que el valor mínimo lo toma en el punto $(x, y) = (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, y que el valor máximo lo toma cuando $(x, y) = (1, 1)$, $f(1, 1) = 2$.
Luego el recorrido de f es el intervalo $[0, 2]$.



5.2 Representación gráfica de una función de dos variables

En el caso de las funciones de una variable, el dibujo de su gráfica resulta de enorme ayuda para comprender el comportamiento de una función.

Veamos ahora de qué forma se puede representar gráficamente una función real de dos variables reales.

5.2.1 Representación como una superficie en el espacio tridimensional

Una forma de hacerlo es poner

$$z = f(x, y)$$

e interpretar que, a cada punto (x, y) del plano OXY la función f le hace corresponder una "altura" dada por $z = f(x, y)$. La representación, en el espacio tridimensional, de los puntos

$$\big\{(x, y, z) \, : \, (x, y) \in D, \; z = f(x, y)\big\}$$

constituye *una superficie*.

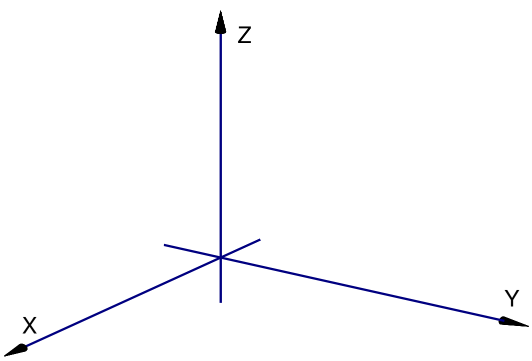


Figura 5.1: Los ejes de coordenadas en el espacio 3D. En la parte de abajo los ejes OX y OY, con la orientación relativa habitual.

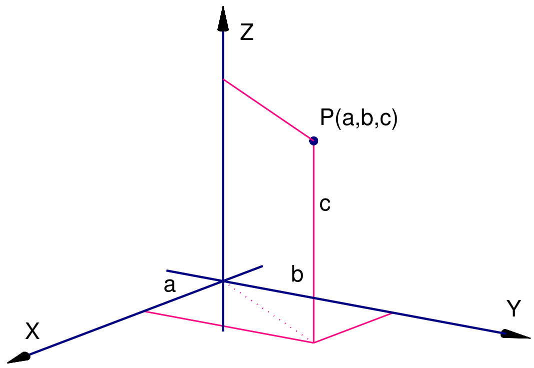
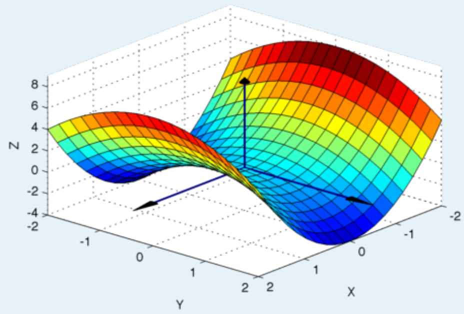


Figura 5.2: Un punto en el espacio 3D viene definido por tres coordenadas.

Ejemplo 5.3

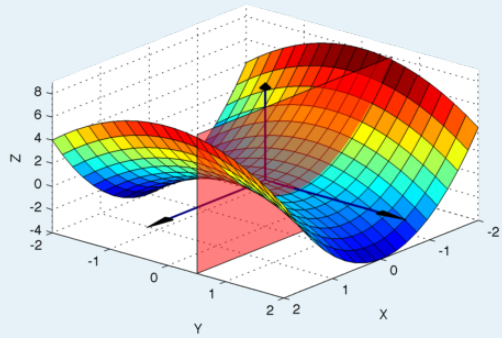
Se considera la función $f(x, y) = 2x^2 - y^2$.
El dominio de esta función es todo el plano $\mathbb{R}^2$. La gráfica adjunta está realizada para $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ (obsérvese la graduacion de los ejes). También se observa que, para estos valores de (x, y), la función toma valores entre -4 y 8 (véase la graduación del eje OZ (eje vertical).



Si se mantiene constante una de las variables, por ejemplo la variable $y = 0.5$, entonces, sobre esta línea recta $y = 0.5$ la función depende sólo de la variable x:

$$f(x, 0.5) = 2x^2 - (0.5)^2 = 2x^2 - 0.25$$

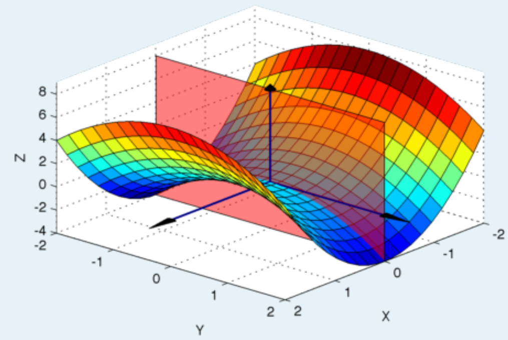
que es la expresión de una parábola convexa, como se puede confirmar en la gráfica adjunta, observando que el corte de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $y = 0.5$ es una parábola «hacia arriba».



Si, en cambio, se mantiene constante la variable x, por ejemplo $x = 0$, entonces sobre esta recta $x = 0$ la función depende sólo de la variable y:

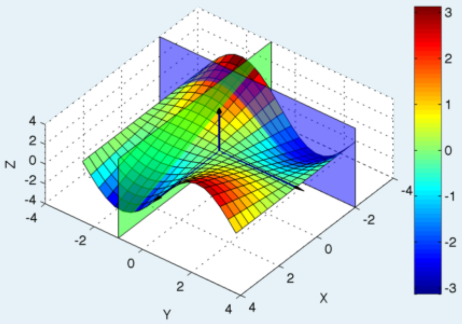
$$f(0, y) = 0 - y^2 = -y^2$$

y su gráfica es una parábola invertida, como puede observarse en la gráfica adjunta.



Ejemplo 5.4

Superficie $z = f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.
Cuando la gráfica se puede representar en un medio que admita color, es frecuente acompañarla de una «barra de color» que ayuda a identificar los valores de la función.
Como se puede corroborar con el dibujo adjunto, cuando se mantiene la x constante, por ejemplo $x = 2$, la función se reduce a



$$f(2, y) = 2 \operatorname{sen} y$$

mientras que si se mantiene constante la y, por ejemplo $y = -2$, la función se reduce a una recta

$$f(x, -2) = x \operatorname{sen}(-2) = \text{constante} \times x$$

5.2.2 Representación mediante curvas de nivel

Otra forma habitual de visualizar funciones es representar sus curvas de nivel: curvas que unen los puntos del dominio en los que la función toma el mismo valor.
Es decir, para

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

la **curva de nivel de valor** k es la que forman los puntos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; f(x, y) = k\}$$

Estas curvas se dibujan en el plano OXY. También se llaman **curvas de isovalores**.

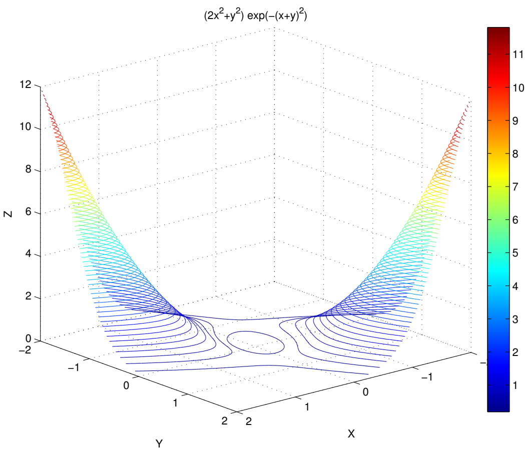


Figura 5.3: En esta figura están dibujadas, sobre la superficie de ecuación $z = (2x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)^2}$, sus curvas de igual.

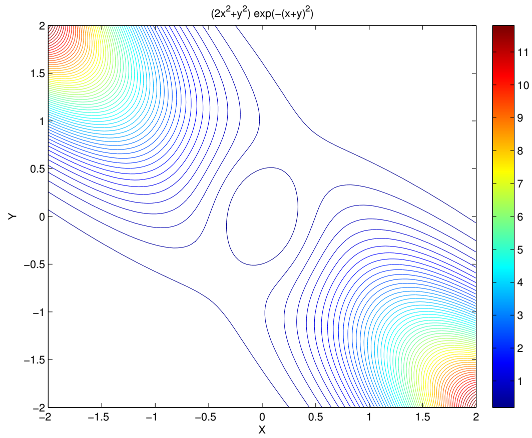


Figura 5.4: Cuando las curvas de la Figura anterior se proyectan sobre el plano OXY se obtienen las curvas de nivel. Si el dibujo es en color, con frecuencia se acompaña de una «barra de color» para identificar los distintos valores.

Con frecuencia se dibujan las curvas de nivel correspondientes a un conjunto de valores regularmente espaciados, como en el caso de la Figura 5.4. En este caso, la separación entre las curvas da una idea de la variación de la función: cuanto más próximas estén las curvas de nivel, más rápidamente crece o decrece la función en esa zona.

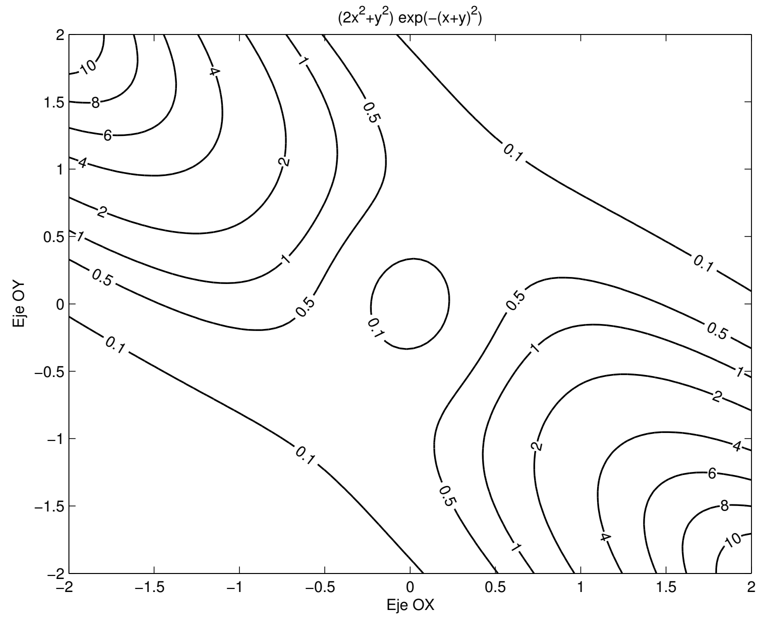


Figura 5.5: Algunas curvas de nivel de la función $z = (2x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)^2}$. Las curvas están marcadas con los valores a los que corresponden. Obsérvese que, en este caso, no todos los valores elegidos están regularmente espaciados: 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10.

Cuando se dibuja sin utilizar color, se suelen marcar las curvas de nivel con los valores correspondientes, como se hace en la Figura 5.5.

Este tipo de gráficas son habituales, por ejemplo, en meteorología y en topografía.

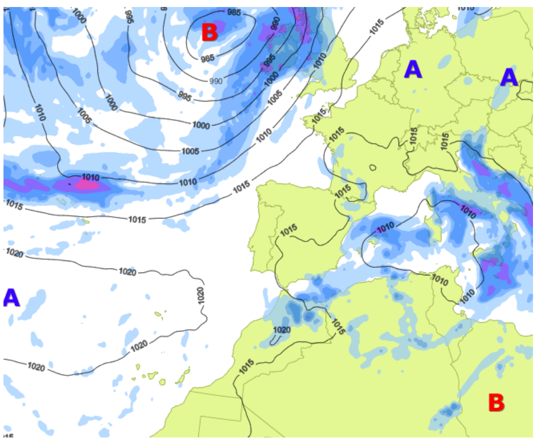


Figura 5.6: En los mapas meteorológicos con frecuencia se dibujan las **isobaras**, curvas de nivel de la presión atmosférica.

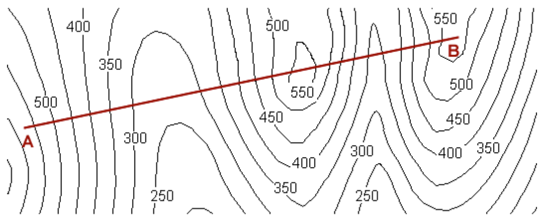
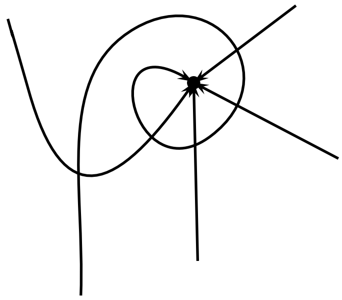


Figura 5.7: Mapa topográfico: se representa la altitud (sobre el nivel del mar) en cada punto. Con ayuda de este mapa se podría representar el «perfil» de una ruta, por ejemplo, entre los puntos A y B.

5.3 Límites y continuidad de funciones de dos variables

El concepto de límite se puede generalizar a funciones de dos o más variables. Informalmente, se dice que el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) es L si $f(x, y)$ toma valores tan próximos a L como se quiera sin más que acercarse lo suficiente a (x_0, y_0) (sin llegar hasta él).

El cálculo de límites en dimensión 2 es, lógicamente, más complicado que en el caso unidimensional. Sin embargo, en algunos casos sencillos, cuando los límites existen, se pueden calcular de manera sencilla.



En el caso unidimensional sólo es posible acercarse a un punto de dos formas: por la izquierda o por la derecha. Sin embargo, en el caso bidimensional hay infinitas maneras de acercarse a un punto: «caminando» sobre cualquier curva que pase por dicho punto.

Llamamos a dichos «caminos» **trayectorias**. Cuando nos acercamos al punto (x_0, y_0) «caminando» sobre una trayectoria, el límite se convierte en realidad en un límite unidimensional.

Ejemplo 5.5
Calcular el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy}{xy+y^3}$ **sobre la trayectoria** $y = 5x$**.**

Sobre la trayectoria $y = 5x$ las variables x e y no son independientes una de la otra, sino que, para cada x la y viene dada por $y = 5x$. Al sustituir en la expresión del límite encontraremos un límite en una sóla variable:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=5x}} \frac{4xy}{xy+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\cdot 5x}{x\cdot 5x+(5x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{20x^2}{5x^2+125x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{20x^2}{x^2(5+125x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{20}{5+125x} = \frac{20}{5} = 4$$

Para que el límite de una función en un punto exista es necesario que exista el límite sobre todas las trayectorias posibles y que todos coincidan.

Desde luego, para demostrar que un límite existe no se pueden utilizar las trayectorias, ya que no podemos comprobar todas (son infinitas). El límite por trayectorias es útil para probar que un límite **no** existe: basta encontrar una trayectoria sobre la cual no exista el límite o bien encontrar dos trayectorias con dos límites diferentes. En ambos casos la conclusión es que no existe el límite de la función en el punto.

Ejemplo 5.6
Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy}{xy+y^3}$ **sobre la trayectoria** $y = \sqrt{x}$**.**

Para calcular el límite sobre la trayectoria $y = \sqrt{x}$, sustituímos y por $\sqrt{x}$, encontrando así un límite en una sóla variable:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\sqrt{x}}} \frac{4xy}{xy+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\cdot\sqrt{x}}{x\cdot\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4}{1+1} = 2$$

Como consecuencia de esto y del resultado del Ejemplo 5.5, se tiene que no existe el límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ de la función $\dfrac{4xy}{xy+y^3}$.

El concepto de continuidad es también análogo al caso unidemensional:

Definición 5.7 (Continuidad de una función de dos variables)
Una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $(x_0, y_0) \in D$ si:

a) *f está definida en (x_0, y_0),*

b) *Existe* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$

c) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

5.4 Derivadas parciales de funciones de dos variables

Supongamos que queremos estudiar la asimilación de CO_2 de una cierta planta y, más concretamente, la respuesta a los cambios de temperatura y de luminosidad. ¿Cómo se haría esto experimentalmente?

Denotemos T a la temperatura, L a la lumnosidad y A a la cantidad de CO_2 asimilada, de forma que se tiene

$$A = A(T, L)$$

Lo más natural sería estudiar las variaciones de A en función de la temperatura T, manteniendo constante la intensidad de la luz y haciendo esto para distintas intensidades. Luego, habría que estudiar las variaciones de A en función de la luminosidad manteniendo constante la temperatura.

Esto ilustra la idea en que se basan las derivadas parciales de una función. Para saber cómo varía una función $f(x, y)$ cuando cambian x e y, en vez de hacer variar las dos variables a la vez, se hacen variar sólo una de ellas, manteniendo la otra constante

Definición 5.8 (Derivada parcial)
Sea f una función de dos variables independientes x e y.

Se define la ***derivada parcial de f con respecto a x****:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Análogamente, se define la ***derivada parcial de f con respecto a y****:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Para indicar que se trata de una derivada parcial en lugar de una derivada ordinaria (la de funciones de una variable) se utiliza el símbolo ∂ en lugar de la d habitual. También son usuales las notaciones siguientes, que tienen el mismo significado:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \equiv \partial_x f(x, y) \equiv f_x(x, y)$$

(y análogamente para la derivada parcial con respecto de y).

El cálculo de derivadas parciales no presenta ninguna dificultad adicional: para obtener la derivada parcial de f con respecto de x (por ejemplo) sólo hay que derivar de la forma habitual la expresión de $f(x, y)$ considerando la x como variable independiente y tratando la y como si fuera una constante. Recíprocamente, para obtener la derivada parcial de f con respecto de y hay que derivar de la forma habitual la expresión de $f(x, y)$ considerando la y como variable independiente y tratando la x como si fuera una constante.

Ejemplo 5.9
Calcular las derivadas parciales de la función $f(x,y) = y\,e^{xy}$.
Consideramos y como si fuera una constante y derivamos la función con respecto de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\,e^{xy}\Big) = y\,e^{xy}\,y = y^2\,e^{xy}$$

Ahora, para calcular la derivada parcial con respecto de y, consideramos x como si fuera una constante y derivamos la función con respecto de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\,e^{xy}\Big) = e^{xy} + y\,x\,e^{xy} = (1+xy)\,e^{xy}$$

Ejemplo 5.10
Calcular las derivadas parciales de la función $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{\cos(y)}$.
Consideramos y como si fuera una constante y derivamos la función con respecto de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\operatorname{sen}(xy)}{\cos(y)} = \frac{y\cos(xy)\cdot\cos(y) - \operatorname{sen}(xy)\cdot 0}{\cos^2 y} = \frac{y\cos(xy)}{\cos y}$$

Ahora calculamos la derivada parcial con respecto de y, considerando x como si fuera una constante y derivando la función con respecto de y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\operatorname{sen}(xy)}{\cos(y)} = \frac{\cos(xy)\cdot x\cdot\cos(y) - \operatorname{sen}(xy)\cdot(-\operatorname{sen}(y))}{\cos^2(y)} \\ &= \frac{x\cos(y)\cos(xy) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(xy)}{\cos^2(y)}\end{aligned}$$

Las derivadas parciales representan, como en el caso unidimensional, pendientes de rectas tangentes a ciertas curvas.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x,y) = 2x^2 - y^2$, representada en la Figura **??**, y sus derivadas parciales en el punto $(x,y) = (0,1/2)$. Si en $z = f(x,y)$ mantenemos constante $y = 1/2$ obtenemos una curva: la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano vertical $y = 1/2$ (plano vertical paralelo al plano OXZ). La ecuación de dicha curva es $z = 2x^2 - 1/4$. El valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x$ en el punto $(x,y) = (0,1/2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1/2) = 0$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $x = 0$.

De forma análoga, si en $z = f(x,y)$ mantenemos constante $x = 0$ obtenemos la curva intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano vertical $x = 0$ (plano vertical paralelo al plano OYZ), de ecuación $z = -y^2$. La pendiente de la tangente a esta curva en el punto $y = 1/2$ es el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$ en el punto $(x,y) = (0,1/2)$, es decir, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1/2) = -1$.

5.5 Derivadas parciales de orden superior

Como en el caso de las funciones de una variable, es posible definir derivadas de orden superior. Por ejemplo, la derivada parcial con respecto de x de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ se escribe:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)$$

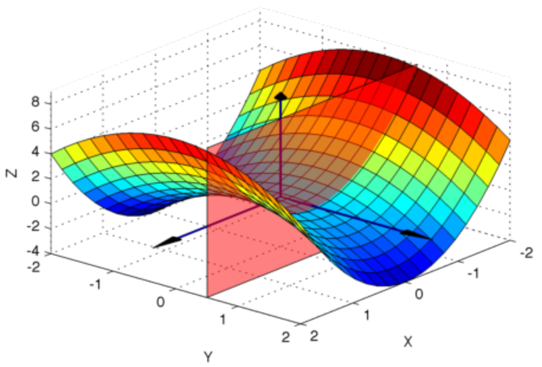


Figura 5.8: Intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $y = 1/2$.

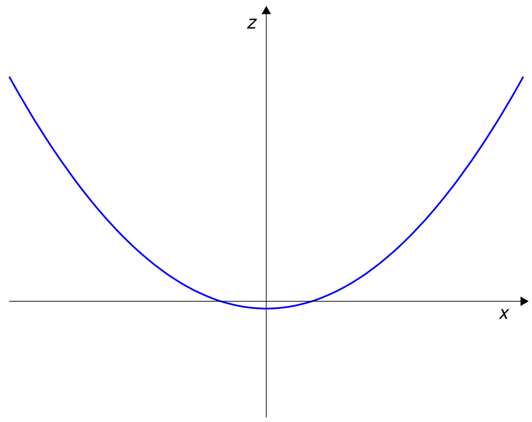


Figura 5.9: Curva $z = 2x^2 - 1/4$, intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $y = 1/2$.

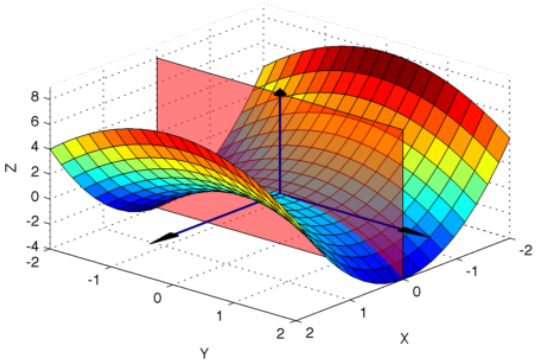


Figura 5.10: Intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $x = 0$.

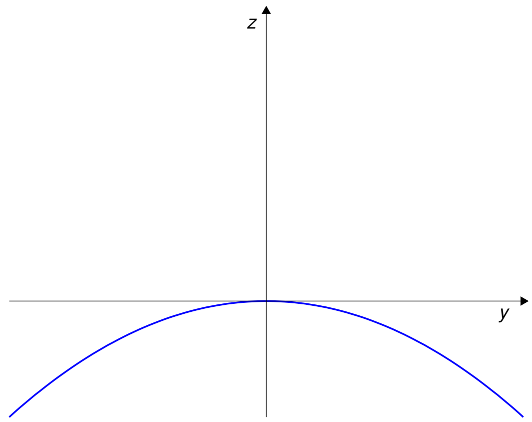


Figura 5.11: Curva $z = -y^2$, intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ con el plano vertical $x = 0$.

(También se puede escribir f_{xx}). Análogamente,

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big),$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big).$$

Obsérvese en esta última derivada que el subíndice xy en f_{xy} significa que se deriva en primer lugar respecto de x y en segundo lugar respecto de y. Esto implica que, en principio, f_{xy} no es lo mismo que f_{yx}

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Sin embargo, en las condiciones adecuadas sí se puede garantizar que el orden de derivación es irrelevante:

Teorema 5.11 (Igualdad de las derivadas cruzadas)
Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0), entonces las derivadas cruzadas en dicho punto son iguales:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Se pueden definir de forma similar derivadas de orden superior a 2, por ejemplo

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_{yy})$$

Como en el caso de las derivadas de orden 2, el orden de derivación no importa si la función y sus derivadas hasta el orden utilizado existen y son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0).

Ejemplo 5.12
Calcular la derivada $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ para la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(3xy)$ y comprobar la igualdad de todas las derivadas cruzadas del mismo orden.

- $f_x = 3y\cos(3xy)$
- $f_y = 3x\cos(3xy)$
- $f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(3y\cos(3xy)\Big) = 3\cos(3xy) + 3y\cdot\big(-3x\operatorname{sen}(3xy)\big) = 3\cos(3xy) - 9xy\operatorname{sen}(3xy) = f_{yx}$
- $f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(3x\cos(3xy)\Big) = 3x\cdot\big(-3x\operatorname{sen}(3xy)\big) = -9x^2\operatorname{sen}(3xy)$
- $f_{xyy} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}(f_{xy}) = \dfrac{\partial}{\partial y}\big(3\cos(3xy) - 9xy\operatorname{sen}(3xy)\big) = -18x\operatorname{sen}(3xy) - 27x^2y\cos(3xy)$
- $f_{yxy} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(f_{yx}) = \dfrac{\partial}{\partial y}\big(3\cos(3xy) - 9xy\operatorname{sen}(3xy)\big) = -18x\operatorname{sen}(3xy) - 27x^2y\cos(3xy)$
- $f_{yyx} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(f_{yy}) = \dfrac{\partial}{\partial x}\big(-9x^2\operatorname{sen}(3xy)\big) = -18x\operatorname{sen}(3xy) - 27x^2y\cos(3xy)$

Definición 5.13 (Derivadas de funciones de más de dos variables)
Los conceptos anteriores se pueden generalizar para funciones que dependen de tres, cuatro o más variables. Así podríamos definir las derivadas f_x, f_y, f_z, f_{xz}, f_{zyx}, etc. de una función $f = f(x,y,z)$.

5.6 Regla de la cadena para funciones de varias variables

La Regla de la Cadena, que ya se conoce para funciones de una variable, se puede extender a funciones de más de una variable.
Consideremos la función

$$z = f(x,y)$$

Supongamos que x e y son funciones que, a su vez, dependen de una tercera variable t. Entonces, z también dependerá de t:

$$z = f(x(t), y(t))$$

Nos planteamos, pues, calcular la expresión de la derivada de z con respecto de t.

Teorema 5.14 (Regla de la Cadena para funciones de dos variables)
Si la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales y son continuas, y $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son a su vez funciones dependientes de t y derivables, entonces la derivada de

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

viene dada por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.15
Sea $z = f(x, y) = x^2y^3$ y sean

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \\ y(t) = \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Calcular la expresión de la derivada de z con respecto de t en el punto $t = \frac{\pi}{2}$.

Utilizando la fórmula (5.1) se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}$$

Calculamos las derivadas involucradas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2, \qquad \frac{dx}{dt} = \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{e}^t$$

$$\frac{dz}{dt} = 2\operatorname{sen} t\big(\mathrm{e}^t\big)^3 \cdot \cos t + 3\big(\operatorname{sen} t\big)^2\big(\mathrm{e}^t\big)^2 \cdot \mathrm{e}^t = 2\,\mathrm{e}^{3t}\operatorname{sen} t \cos t + 3\,\mathrm{e}^{3t}\operatorname{sen}^2 t = \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{3t}\Big(2\cos t + 3\operatorname{sen} t\Big)$$

$$\frac{dz}{dt}\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{3\pi/2}\Big(2\cos\frac{\pi}{2} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\Big) = \boxed{3\,\mathrm{e}^{3\pi/2} \approx 333.95}$$

5.7 Plano tangente

Recordamos el concepto de recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$. La generalización al caso de una función de dos variables es el **plano tangente** a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$.

Ecuación del plano tangente a una superficie
Si la función $f(x, y)$ es continua y derivable en el punto (x_0, y_0), y sus derivadas parciales son también continuas en un entorno del punto (x_0, y_0), entonces existe el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) $(z_0 = f(x_0, y_0))$ y su ecuación es

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ (y - y_0)$$

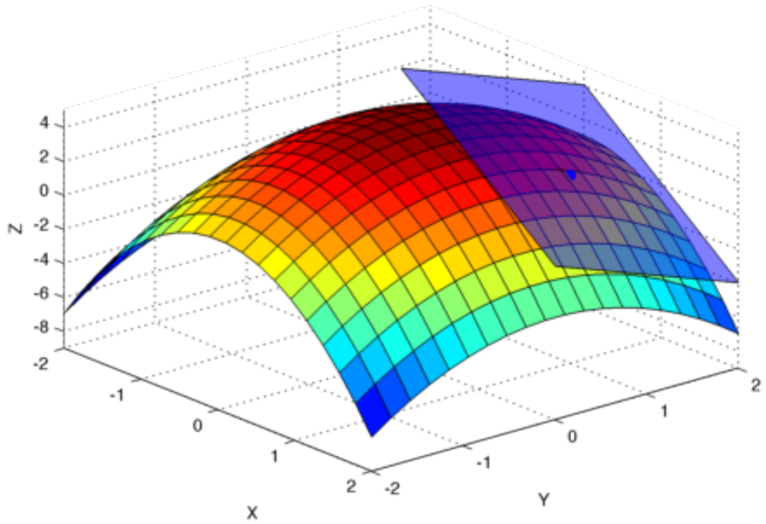


Figura 5.12: Plano tangente a una superficie.

Ejemplo 5.16
Calcular el plano tangente en $(x_0, y_0) = (2, 0)$ a la superficie de ecuación

$$z = f(x, y) = x^2 y + 2x\,\mathrm{e}^y\,.$$

Ejemplo 5.17
Calcular el plano tangente en $(x_0, y_0) = (3, 1)$ a la superficie de ecuación

$$z = f(x, y) = \ln(x - 2y^2)$$

5.8 Aproximación lineal

De la misma manera que en el caso unidimensional era posible aproximar una función $f(x)$, cerca de un punto x_0 dado, por la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en dicho punto, también es posible aproximar una función $f(x, y)$, cerca del punto (x_0, y_0), por el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en dicho punto.

Aproximación lineal de una función de dos variables

Sea $f(x, y)$ una función derivable y con derivadas continuas en un entorno del punto (x_0, y_0). Se llama **aproximación lineal** o **linealización** de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) a la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

La bondad de la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ viene determinada por los valores de las derivadas de segundo orden de f cerca del punto (x_0, y_0).

Ejemplo 5.18
Calcular una aproximación lineal de la función

$$f(x,y) = x^2y + 2x\,\mathrm{e}^y$$

en el punto $(2,0)$.
La linealización de f en el punto $(2,0)$ viene dada por

$$L(x,y) = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\,(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\,(y-0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2\,\mathrm{e}^y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x\,\mathrm{e}^y$$

$$f(2,0) = 4\,\mathrm{e}^0 = 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 2\,\mathrm{e}^0 = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 4 + 4\,\mathrm{e}^0 = 8$$

Luego la aproximación lineal de $f(x,y)$ cerca de $(2,0)$ es

$$L(x,y) = 4 + 2(x-2) + 8(y-0) = \boxed{2x + 8y}$$

Ejemplo 5.19
Calcular una aproximación lineal de la función

$$f(x,y) = \ln(x - 2y^2)$$

en el punto $(3,1)$. Utilizar esta función para calcular una aproximación del valor de f en el punto $(3.05, 0.95)$, cercano al punto $(3,1)$ y compararlo con el valor exacto (utilizar una calculadora).
La linealización de f en $(3,1)$ es:

$$L(x,y) = f(3,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)\,(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)\,(y-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-2y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y}{x-2y^2}$$

$$f(3,1) = \ln(3-2) = \ln 1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = \frac{1}{3-2} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{-4}{3-2} = -4$$

La aproximación lineal es

$$\boxed{L(x,y) = 0 + (x-3) - 4(y-1) = 1 + x - 4y}$$

En el punto $(3.05, 0.95)$ se tiene

$$L(3.05, 0.95) = 1 + 3.05 - 4 \times 0.95 = 0.25, \qquad f(3.05, 0.95) = \ln\left(3.05 - 2 \times 0.95^2\right) \approx 0.2191$$

El error de aproximación es pues $|f(3.05, 0.95) - L(3.05, 0.95)| = |0.25 - 0.2191| = 0.031$

5.9 Gradiente de una función de dos variables

El vector **gradiente** de una función es de uso muy habitual en ciencias. Se refiere de un modo general a variaciones apreciables de una determinada magnitud física que pueden generar un flujo de ésta de unas zonas a otras. Es frecuente, por ejemplo, hablar de un gradiente de temperaturas, que generará una transmisión de calor de zonas de temperatura más alta a zonas de temperatura más baja; de gradiente de presión, que genera el paso de un fluido de zonas de mucha presión a zonas de menor presión, ...

Gradiente de una función de dos variables

Se define el **gradiente** de una función $f(x, y)$ como el vector

$$\nabla f(x,y) = \left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array} \right)$$

siempre que existan ambas derivadas parciales.

Ejemplo 5.20

Calcular el vector gradiente de la función $f(x, y) = 3x^2 - y - 2y^2$ en el punto $(1, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 6$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 - 4y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1$$

El vector gradiente en $(1, 0)$ es, pues

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.10 Derivadas direccionales

El concepto de derivada direccional se puede explicar fácilmente con el ejemplo siguiente:

Supongamos que nos encontramos sobre una superficie inclinada, por ejemplo, sobre la ladera de una montaña. Dependiendo de la dirección en que caminemos, descenderemos o ascenderemos e incluso nos encontraremos con una mayor o menor pendiente.

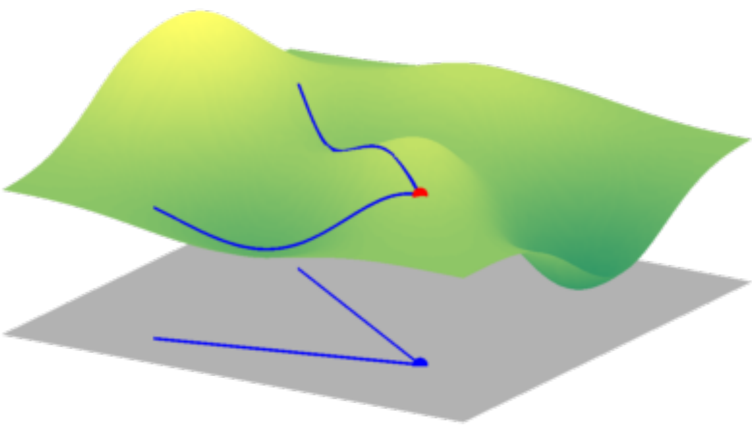


Figura 5.13: Distintos caminos sobre una superficie inclinada partiendo de un mismo punto.

Ahora imaginemos que dicha ladera viene dada por la superficie de ecuación $z = f(x, y)$: (x, y) son las coordenadas a nivel del mar del punto donde nos encontramos y z representa la altitud de dicho punto. Las distintas direcciones que parten de ese punto vienen dadas por los distintos vectores (en el plano OXY) que parten del punto (x, y). La elección de una cierta dirección nos da un cierto control sobre la inclinación del camino a seguir. Dicha inclinación se puede describir mediante la pendiente de la recta tangente al punto de arranque en la dirección del camino. Esto es lo que se llama **derivada direccional**.

Las derivadas parciales de la función $f(x, y)$, f_x y f_y, como ya se ha visto, son las derivadas direccionales en las direcciones de los ejes coordenados, esto es, cuando nos movemos en direcciones paralelas a los eje coordenados OX y OY, y en el sentido positivo de los mismos.

¿Cómo se puede expresar la pendiente cuando elegimos una dirección arbitraria? En primer lugar, dicha dirección se debe expresar mediante un vector **unitario** $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ (unitario significa que su longitud es 1).

Derivada direccional de una función de dos variables

La derivada direccional de la función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ es el **producto escalar**:

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ u_2 \tag{5.2}$$

Obsérvese que la elección de un vector unitario para definir la dirección hace que la derivada direccional coincida con las derivadas parciales cuando la dirección $\mathbf{u}$ es la de uno de los ejes coordenados en sentido positivo.

En efecto, el vector que designa la dirección del eje OX en sentido positivo es $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y la derivada direccional en esta dirección sería

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Análogamente, para la dirección del eje OY es $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y la derivada direccional en esta dirección sería

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

De la misma manera que las derivadas parciales “miden” la variación de la función en el sentido positivo de los ejes coordenados, la derivada direccional “mide” la variación de la función en la dirección y sentido del vector $\mathbf{u}$. Si, por ejemplo, $D_u f(x_0, y_0)$ es un valor positivo, se tendrá que, si nos movemos, a partir del punto (x_0, y_0) en la dirección y sentido de $\mathbf{u}$, la función f crecerá, tanto más rápidamente cuanto mayor sea dicho valor. Si, por el contrario, $D_u f(x_0, y_0)$ toma un valor negativo, esto indicará que la función decrece en dicha dirección.

Ejemplo 5.21
Se consideran la función $f(x,y) = x^2y + y^2$ y el punto $(-1,1)$.

(a) Calcular el gradiente de la función.

(b) Calcular la derivada direccional en la dirección $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. ¿Crece o decrece la función en esa dirección?

(c) Calcular las derivadas direccionales en las direcciones $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ¿En cuál de ellas crece la función más rápidamente?

(a) Calculamos las derivadas parciales y el gradiente

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+2y \end{pmatrix}; \qquad \nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Comenzamos por construir un vector unitario con la misma dirección que el vector **u**. Para ello sólo hay que dividir **u** por su módulo:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}. \quad \text{Así, el vector } \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{u} \text{ es unitario.}$$

Calculamos ahora la derivada direccional en el punto $(-1,1)$ en la dirección $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{u}$:

$$D_u f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\big((-2)\cdot 1 + 3\cdot(-2)\big) = \frac{-8}{\sqrt{5}}$$

Esto significa que en dicha dirección la función f **decrece**, puesto que la derivada es negativa.

(c) Comenzamos también aquí por normalizar los vectores **v** y **v**:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$D_v f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2+3) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$D_w f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+3) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Es decir, la función crece en ambas direcciones, aunque lo hace más rápidamente en la dirección de **w**.

5.11 Propiedades del vector gradiente

El vector gradiente de una función en un punto (x_0, y_0) tiene la importante propiedad de que señala la dirección de máximo crecimiento de la función en dicho punto. Es decir, de entre todas las (infinitas) direcciones que parten del punto (x_0, y_0) la dirección definida por el gradiente es aquélla en la que la función f crece (localmente) más rápidamente. Como consecuencia, la dirección opuesta al gradiente es aquélla en la que la función **decrece** más rápidamente.

Esta propiedad es de una importancia primordial en muchas situaciones reales. Por ejemplo, la **quimiotaxis**,

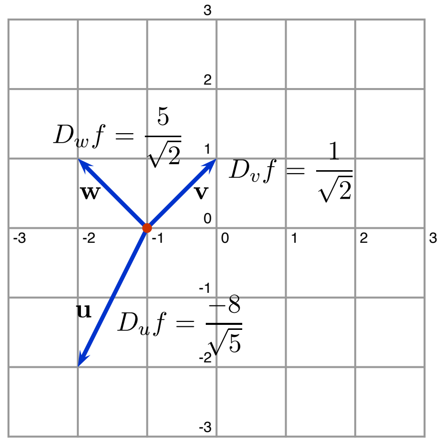


Figura 5.14: Derivadas direccionales del Ejemplo 5.21.

que es el mecanismo por el que algunas células se mueven de acuerdo con la concentración de ciertas sustancias químicas en su medio ambiente, eligiendo para ello la dirección del gradiente de la concentración, si se busca, por ejemplo, alimento, o la opuesta al gradiente, si se busca, por ejemplo, alejarse de un veneno. En los organismos multicelulares es fundamental tanto en las fases tempranas del desarrollo (por ejemplo en el movimiento de los espermatozoides hacia el óvulo) como en las fases más tardías (como la migración de neuronas o linfocitos).

Otra propiedad importante del vector gradiente es que es perpendicular a la curva de nivel de la función f que pasa por el punto (x_0, y_0).

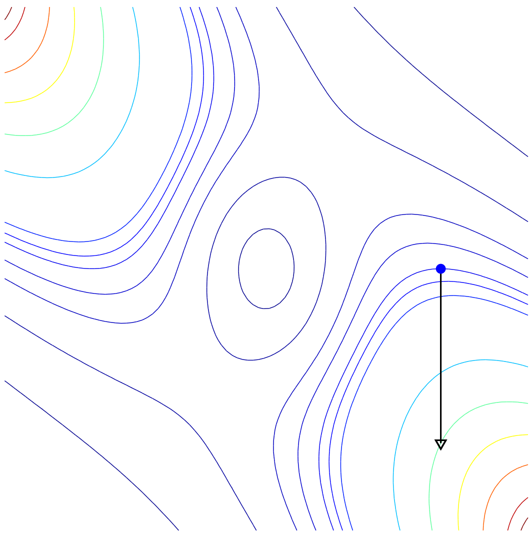


Figura 5.15: El vector gradiente en un punto es perpendicular a la curva de nivel que pasa por ese punto.

Propiedades del vector gradiente

Sea $f(x, y)$ una función derivable. El vector gradiente $\nabla f(x, y)$ tiene las propiedades siguientes:

(a) En cualquier punto (x_0, y_0), el máximo crecimiento de la función f se produce en la dirección del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

(b) El vector gradiente en un punto (x_0, y_0) es perpendicular a la curva de nivel que pasa por ese punto.

5.12 Máximos y mínimos relativos

De modo informal, un máximo local o relativo de una función es un punto es un punto en el que el valor de función es mayor que en todos los puntos "de alrededor".

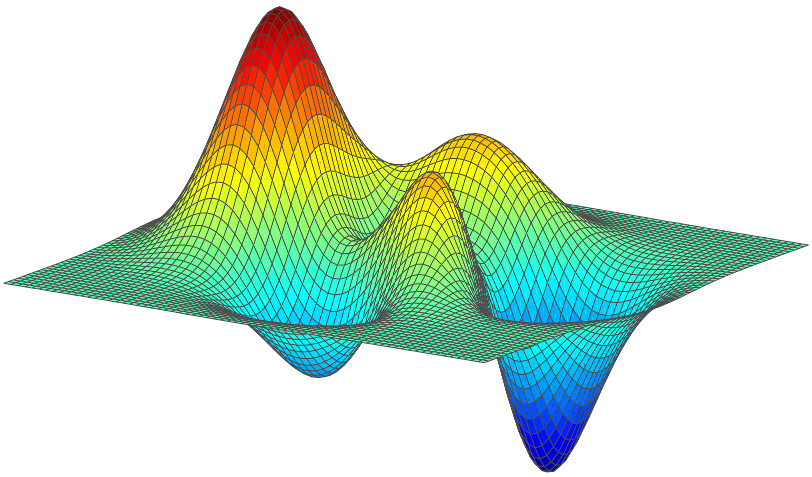
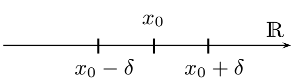
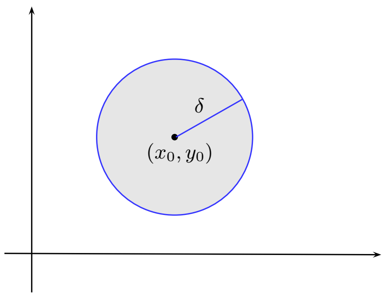


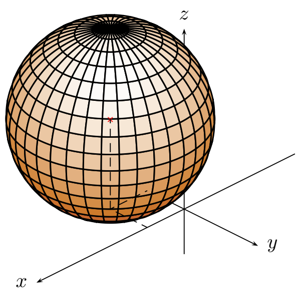
Figura 5.16: Una función con varios máximos y mínimos relativos.

La noción "de alrededor" se puede formalizar escribiendo en todos los puntos de un entorno.

- En dimensión 1 un entorno de un punto x_0 es un intervalo centrado en x_0 y de radio δ
- En dimensión 2, un entorno de radio δ de un punto (x_0, y_0) es un círculo de radio δ centrado en el punto (x_0, y_0).
- En dimensión 3, sería una esfera centrada en el punto y de radio δ







Recordamos que, en dimensión 1, una condición necesaria para que una función derivable tenga un extremo relativo en un punto x_0 era que

$$f'(x_0) = 0$$

lo que significa que la tangente a $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0)$ es horizontal. Esta idea se generaliza a funciones de más de una variable:

Teorema 5.22 (Condición necesaria de extremo local de una función de dos variables)
Una condición necesaria para que la función $f(x, y)$ tenga un extremo local en el punto (x_0, y_0) es que sea

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que geométricamente significa que el plano tangente a $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es horizontal.

En efecto, la ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) con $\nabla f = 0$ es:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - x_0) = f(x_0, y_0),$$

es decir $z = \text{constante} = f(x_0, y_0)$ que efectivamente, es la ecuación de un plano horizontal (paralelo al plano OXY).

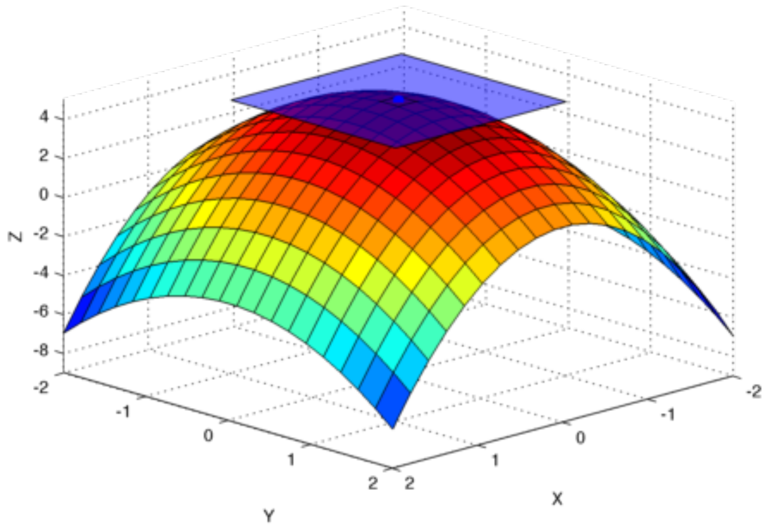


Figura 5.17: Los puntos que verifican $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ son los puntos en los que el plano tangente es horizontal.

A los puntos que verifican $\nabla f = 0$ se les suele denominar **puntos críticos**. También son puntos críticos los puntos en los que f no es derivable.

Ejemplo 5.23
Hallar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$$

La función f está bien definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y es continua y derivable en $\mathbb{R}^2$.
Los únicos puntos críticos serán los que anulen el gradiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3x^2 = 3(y - x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3y^2 = 3(x - y^2) = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos son pues los puntos que verifican el **sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 = (x^2)^2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Este sistema tiene por lo tanto dos soluciones, que son los puntos críticos de la función f:

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (1, 1)$$

De forma análoga a como sucede en dimensión 1, los puntos críticos son sólo **candidatos** a ser extremos relativos: Los extremos relativos, si existen, están entre ellos, pero no todos lo son.

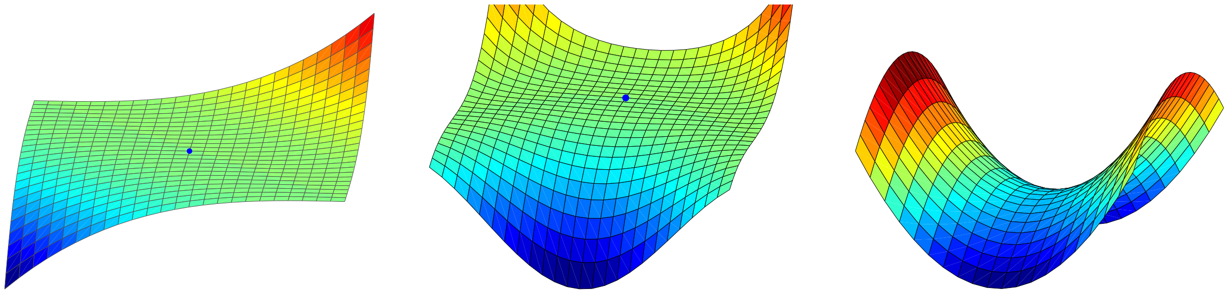


Figura 5.18: Ejemplos de puntos con gradiente nulo que no son máximos ni mínimos. En el primer caso, se trata de un punto de inflexión en ciertas direcciones que pasan por él, mientras que en otra dirección la función es constante. En el segundo caso la función tiene un mínimo en ciertas direcciones mientras que tiene un punto de inflexión en otras. El tercer caso se trata de un **punto de silla**, en el que la función tiene un máximo en unas direcciónes y un mínimo en otras.

5.13 Uso de las derivadas segundas para determinar máximos y mínimos relativos

Recordemos que en dimensión 1 el valor de la derivada de segundo orden de la función en un punto crítico permite, a veces, determinar si dicho punto es un máximo o un mínimo:

- Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
- Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

En dimensión 2 también existen criterios, que involucran las derivadas parciales de segundo orden, que permiten, en ocasiones, decidir si un punto crítico es un máximo o un mínimo.

Definición 5.24 (Matriz hessiana)
Se denomina ***matriz hessiana*** *de $f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0) a la matriz*

$$\mathrm{Hess}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

(Recuérdese que si la función f es suficientemente regular las derivadas cruzadas son iguales, es decir $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$).

Teorema 5.25
Sea $f(x,y)$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas en un entorno del punto (x_0,y_0), en el que se tiene $\nabla f(x_0,y_0) = 0$, lo que geométricamente significa que el plano tangente a $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es horizontal. Sea D el determinante de la matriz hessiana de f en (x_0,y_0):

$$D = \det \mathrm{Hess}(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - \big(f_{xy}(x_0,y_0)\big)^2$$

(a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, entonces f tiene un ***mínimo local*** *en (x_0,y_0).*

(b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, entonces f tiene un ***máximo local*** *en (x_0,y_0).*

(c) Si $D < 0$, entonces f tiene un ***punto de silla*** *en (x_0,y_0).*

En los demás casos este criterio no permite sacar conclusiones.

Ejemplo 5.26
Clasificar los punto críticos de la función $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.
Los puntos críticos son (véase el Ejemplo 5.23) $(0,0)$ y $(1,1)$

$$f_x = 3y - 3x^2, \qquad f_y = 3x - 3y^2$$

$$f_{xx} = -6x, \quad f_{xy} = 3, \quad f_{yy} = -6y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Hess}(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

1. Punto $(x_0, y_0) = (0,0)$: $\quad \mathrm{Hess}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad$ y $\quad \det \mathrm{Hess}(0,0) = -9 < 0$.

   En consecuencia, $(0,0)$ es un **punto de silla** de f.

2. Punto $(x_0, y_0) = (0,0)$: $\quad \mathrm{Hess}(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad$ y $\quad \det \mathrm{Hess}(0,0) = 27 > 0$.

   Como, además, $f_{xx}(1,1) = -6 < 0$, se tiene que $(1,1)$ es un **máximo** de f.

Ejemplo 5.27
Calcular y clasificar los punto críticos de la función $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^4$.
Esta función está bien definida y es continua y derivable en todo $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales son:

$$f_x = 4x - y, \qquad f_y = -x + 4y^3 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - y \\ -x + 4y^3 \end{pmatrix}$$

$$f_{xx} = 4, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = 12y^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Hess}(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

1. Punto críticos son los puntos que verifican el **sistema de ecuaciones**:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 4x \\ \\ 4y^3 - x = 4\,(4x)^3 - x = x(256x^2 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \\ x^2 = \dfrac{1}{256} \;\Leftrightarrow \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{16} \\ x = \dfrac{1}{16} \end{array} \right.$$

   A cada uno de estos valores para la variable x hay que asociar el correspondiente valor de $y = 4x$:

   - A $x = 0$ le corresponde $y = 4 \cdot 0 = 0$
   - A $x = \dfrac{-1}{16}$ le corresponde $y = 4\,\dfrac{-1}{16} = \dfrac{-1}{4}$
   - A $x = \dfrac{1}{16}$ le corresponde $y = 4\,\dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{4}$

   En consecuencia, f tiene tres puntos críticos: $\boxed{\begin{array}{l} (x_1,y_1) = (0,0) \\ (x_2,y_2) = (\frac{-1}{16}, \frac{-1}{4}) \\ (x_3,y_3) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{4}) \end{array}}$

2. Tratamos ahora de clasificar los puntos críticos.

- Para $(x_1, y_1) = (0, 0)$: $\text{Hess}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \text{Hess}(0, 0) = -1 < 0$, luego $\boxed{(x_1, y_1) = (0, 0) \text{ es un punto de silla}}$.
- Para $(x_2, y_2) = (\frac{-1}{16}, \frac{-1}{4})$: $\text{Hess}(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \text{Hess}(x_2, y_2) = 2 > 0$ y $f_{xx}(x_2, y_2) = 4 > 0$, luego $\boxed{(x_2, y_2) = (\frac{-1}{16}, \frac{-1}{4}) \text{ es un mínimo}}$.
- Para $(x_3, y_3) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$: $\text{Hess}(x_3, y_3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \text{Hess}(x_3, y_3) = 2 > 0$ y $f_{xx}(x_3, y_3) = 4 > 0$, luego $\boxed{(x_3, y_3) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{4}) \text{ es un mínimo}}$.

Tema 6

Ecuaciones diferenciales

Versión: 18 de octubre de 2019

6.1 Introducción

Existen numerosos modelos matemáticos de diversa índole que se utilizan para el estudio de problemas en Biología y otras ciencias experimentales; sus objetivos principales son describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en dichas áreas. Una gran parte de esos modelos se expresan mediante ecuaciones diferenciales.

El objetivo de este tema es describir brevemente algunos de los conceptos básicos relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias, mostrar técnicas elementales de su resolución, así como exponer ejemplos prácticos de aplicaciones.

Ecuación diferencial

Es una ecuación en que la **incógnita** es una función y que, además, involucra también las **derivadas** de la función hasta un cierto orden.

La incógnita no es el valor de la función en uno o varios puntos, sino la función en sí misma.

Cuando la incógnita es una función de una sola variable se dice que la ecuación es **ordinaria**, debido a que la o las derivadas que aparecen son derivadas ordinarias (por contraposición a las derivadas parciales de las funciones de varias variables).

Por ejemplo,

$$y'(t) = -y(t) \tag{6.1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, ya que la máxima derivada que aparece en ella es la de primer orden. Aquí, t es la **variable independiente** e $y = y(t)$, que es una función desconocida que depende de t, es la **incógnita**. Si no resulta confuso se suele escribir también esta ecuación en la forma $y' = -y$, omitiendo la mención expresa a la dependencia de y respecto a la variable independiente t.

Naturalmente, la utilización de las letras t e y, aunque es la que se utiliza en estas notas, es arbitraria. Por ejemplo, la ecuación anterior se podría escribir también $A'(x) = -A(x)$, siendo aquí x la variable independiente y A la incógnita.

Lo que interesa, con respecto a la ecuación (6.1), es encontrar una o varias funciones $y = \varphi(t)$ que verifiquen la igualdad

$$\varphi'(t) = -\varphi(t) \quad \text{para todo } t \text{ perteneciente a un cierto intervalo } I$$

Una tal función se dice que es una **solución** de la ecuación (6.1) en el intervalo I.

Con carácter general, una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** se escribe:

$$y' = f(t, y) \tag{6.2}$$

y se dice que $y = \varphi(t)$ es **solución en el intervalo** I de esta ecuación si se verifica

$$\varphi'(t) \left(= \frac{d\varphi}{dt}(t) \right) = f(t, \varphi(t)), \quad \forall\, t \in I. \tag{6.3}$$

es decir, si cuando se sustituye en la ecuación y por su expresión e y' por la expresión de la derivada, lo que se obtiene es una identidad, algo que es cierto **para todo t** $\in$ **I**.

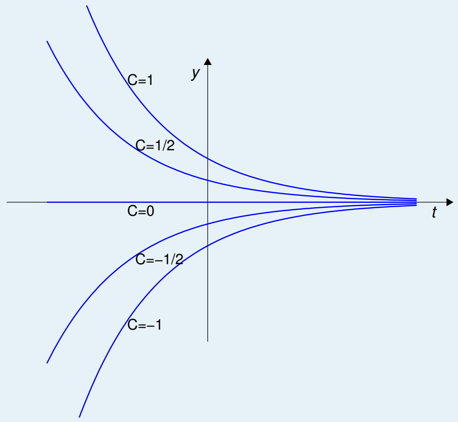
Ejemplo 6.1

La función $y = e^{-t}$ es solución de la ecuación $y' = -y$ en todo $\mathbb{R}$, ya que

$$y'(t) = -e^{-t} = -y(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Pero también es solución cualquier función de la forma $y = Ce^{-t}$ siendo C una constante arbitraria, puesto que

$$y'(t) = -Ce^{-t} = -y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Así pues, la ecuación del Ejemplo (6.1) tiene infinitas soluciones, lo que no es una particularidad de esta ecuación concreta. La ecuación diferencial ordinaria (6.2) posee, en general, una «familia» de infinitas soluciones dependientes de una constante arbitraria, a la que se llama **solución general** de (6.2). Para cada valor de dicha constante arbitraria se obtiene una **solución particular**.

Se llama **resolver una ecuación diferencial** a encontrar su solución general. En realidad, esto sólo es posible para unas cuantas (pocas) ecuaciones sencillas. Para la inmensa mayoría de las ecuaciones diferenciales es necesario recurrir a **métodos numéricos** y calcular soluciones aproximadas con ayuda de un ordenador.

Con frecuencia lo que interesa en las aplicaciones es encontrar una solución particular que verifique alguna condición adicional. Por ejemplo, que toma un valor dado para un valor, también dado, de la variable independiente.

Problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0\,, \end{cases}$$

Este problema consiste en:

> Encontrar, de entre todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$, aquella que para $t = t_0$ toma el valor $y = y_0$ o, lo que es lo mismo, aquella que "pasa" por el punto (t_0, y_0).

El nombre proviene del hecho de que, con frecuencia, la variable independiente, t, representa el tiempo, y el valor t_0 es el instante en que comienza un experimento, observación o simulación.

En general, si se verifican ciertas condiciones razonables de regularidad de la función f, un problema de valor inicial tiene solución única.

Ejemplo 6.2
El problema de valor inicial, asociado a la ecuación (6.1),

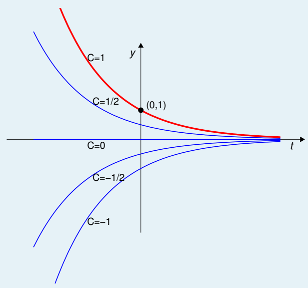
$$\left\{\begin{array}{l} y' = -y \\ y(0) = 1\,, \end{array}\right. \tag{6.4}$$

tiene una única solución, $y = e^{-t}$, que se puede encontrar imponiendo la condición inicial, $y(0) = 1$, a las funciones de la familia de soluciones, $y = Ce^{-t}$, y deduciendo para qué valor de la constante arbitraria C se cumple la condición inicial. Es decir:

$$y(0) = C \cdot e^0 = C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

La solución del problema de valor inicial es, pues,

$$y = e^{-t}$$



Ejemplo 6.3
Comprobar que, sea cual sea el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$, la función $y = 20 - 3e^{-kt}$ es solución de la ecuación $y' = k(20 - y)$.
Para comprobarlo se han de sustituir y e y' en la ecuación y verificar que el resultado es una **identidad** en t, es decir, que la igualdad es cierta para todos los valores posibles de t.
Se tiene:

$$\left\{\begin{array}{ll} y' & = 3ke^{-kt} \\ k(20 - y) & = k\big(20 - (20 - 3e^{-kt})\big) = 3ke^{-kt} \end{array}\right. \tag{6.5}$$

luego, efectivamente, es solución.

A continuación se explica cómo se pueden resolver varios ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden sencillas.

6.2 Resolución de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = a(t)$

En muchas aplicaciones, la variable independiente t representa el tiempo. Si la velocidad de variación de una magnitud depende sólo del tiempo, la ecuación diferencial que verifica es de la forma

$$y' = a(t), \tag{6.6}$$

donde $a = a(t)$ es una función que depende sólo de la variable independiente t, definida en un intervalo I.

Resolución de $y' = a(t)$

1. Utilizando la notación $\dfrac{dy}{dt}$, se escribe $y' = \dfrac{dy}{dt} = a(t)$, y de aquí
$$dy = a(t)\,dt.$$
2. A continuación, se integra separadamente en ambos miembros de esta ecuación, en el primer miembro respecto de y y en el segundo miembro respecto de t.
$$\int dy = \int a(t)\,dt.$$
3. Denotemos por $A(t)$ una primitiva (cualquiera, pero fija) de $a(t)$. Se tiene entonces, recordando que todas las demás primitivas de $a(t)$ se pueden obtener a partir de ésta sumándole una constante,
$$y = A(t) + C$$
siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria, es la **solución general** de la ecuación.

Resolución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = a(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Ahora lo que se desea es averiguar cuál es la solución de la ecuación diferencial $y' = a(t)$ que verifica $y(t_0) = y_0$. Para ello el procedimiento a seguir es:

1. Calcular la solución general de la ecuación $y' = a(t)$ que, por lo visto antes, es $y = A(t) + C$ siendo $A(t)$ una primitiva de $a(t)$.
2. Para hallar cuál, entre todas las soluciones, es la que verifica $y(t_0) = y_0$, hay que averiguar para qué valor de C se tiene
$$y_0 = y(t_0) = A(t_0) + C \Longleftrightarrow C = y_0 - A(t_0)$$
3. Por lo tanto la solución del problema de valor inicial es
$$y = A(t) + y_0 - A(t_0)$$

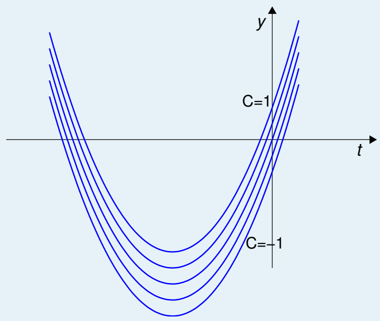
Ejemplo 6.4
Calcular la solución general de $y' = 3 + t$

$$y' = \frac{dy}{dt} = 3 + t \;\Leftrightarrow\; \int dy = \int (3+t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow\; y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$$

La solución general de la ecuación es, pues,

$$y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$$



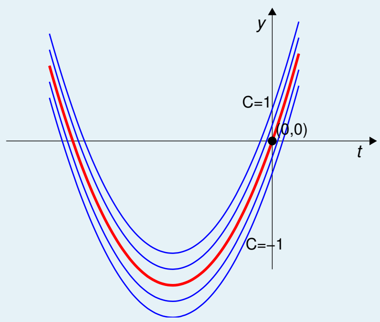
Ejemplo 6.5
Resolver el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 3 + t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Hay que hallar el valor de C que hace que $y = 3t + \frac{1}{2}t^2 + C$ verifique $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 = C \;\Leftrightarrow\; C = 0$$

La solución del problema de valor inicial es, por lo tanto

$$y = 3t + \frac{1}{2}t^2$$



Ejemplo 6.6
Resolver el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = t^2 \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$

Se calcula, en primer lugar, la solución general de $y' = t^2$:

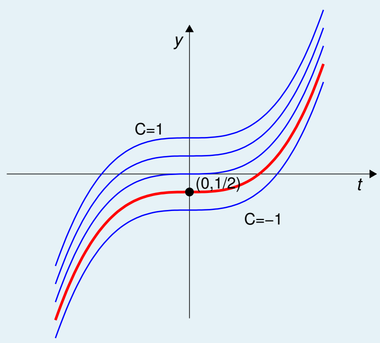
$$y' = \frac{dy}{dt} = t^2 \;\Leftrightarrow\; \int dy = \int t^2\,dt \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}t^3 + C$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = \frac{1}{3}t^3 + C$$

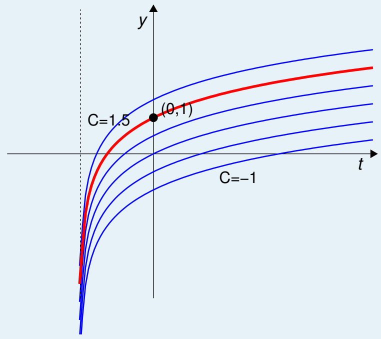
Para obtener la solución particular que verifica $y(0) = 1/2$, se impone esta condición y se despeja C:

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{3}0^3 + C = C \;\Leftrightarrow\; C = \frac{1}{2}$$



Ejemplo 6.7
Resolver el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y' = \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow \int dy = \int \frac{1}{1+t}\, dt$$
$$\Leftrightarrow y = \ln|1+t| + C$$



La solución general de la ecuación es, pues,

$$y = \ln|1+t| + C$$

Se impone ahora la condición inicial:

$$1 = y(0) = \ln(1+0) + C = C \Leftrightarrow C = 1$$

Luego la solución del problema es

$$y = \ln(1+t) + 1 \quad \forall t \in (-1, +\infty)$$

6.3 Ecuaciones diferenciales de variables separables $\mathbf{y}' = \mathbf{a}(\mathbf{t})\,\mathbf{g}(\mathbf{y})$

Son ecuaciones de la forma

$$y' = a(t)g(y),$$

donde $a(t)$ es una función, definida en un intervalo I, que depende sólo de la variable independiente, t, y $g(y)$ es una función que depende sólo de la variable dependiente, y.

Para resolverla se procede como sigue:

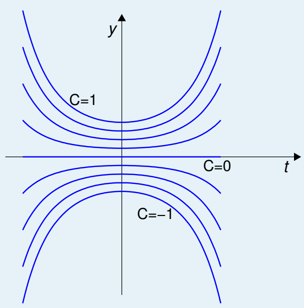
Resolución de $y' = a(t)g(y)$

1. Utilizando la notación $\dfrac{dy}{dt}$, se escribe $y' = \dfrac{dy}{dt} = a(t)\,g(y)$
2. A continuación, se "separan" las variables, de forma que a un lado del signo "=" esté sólo lo que depende de y y al otro lado esté sólo lo que depende de t: si $g(y) \neq 0$ se puede poner (en caso contrario, véase el punto 5):
$$\frac{1}{g(y)}\,dy = a(t)\,dt$$
3. Se integra separadamente en ambos miembros de esta ecuación, en el primer miembro respecto de y y en el segundo miembro respecto de t.
$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int a(t)\,dt$$
4. Sean
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy \qquad A(t) = \int a(t)\,dt$$
dos primitivas de $\dfrac{1}{g(t)}$ y $a(t)$ respectivamente. Entonces la solución general viene dada por
$$G(y) = A(t) + C$$
De esta expresión, si se puede, se despeja y. Si no se puede, se deja como está.
5. Si hay algún valor de y que anule la función g, por ejemplo, $g(\alpha) = 0$, entonces la ecuación $y' = a(t)g(y)$ tiene la solución constante $y = \alpha$, que puede estar, o no, incluida en la solución general $G(y) = A(t) + C$. Se debe comprobar esto.

Ejemplo 6.8
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = yt$.

$$y' = yt \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int t\,dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\Leftrightarrow\; |y| = e^{t^2/2+C} = e^{t^2/2}\cdot e^C \;\Leftrightarrow\; y = \pm e^{t^2/2}\cdot e^C = e^{t^2/2}\cdot\left(\pm e^C\right)$$



Comentario importante: Puesto que C representa aquí un valor cualquiera, también $\pm e^C$ es un valor cualquiera. Por lo tanto, y con el fin de no complicar inútilmente la notación, seguiremos usando la letra C para designar el valor arbitrario $\pm e^C$.

Queda entonces

$$y = C\,e^{t^2/2}$$

La solución constante $y = 0$ que la ecuación, evidentemente, tiene, está incluida en esta última expresión para el valor de la constante $C = 0$.

La constante arbitraria en la resolución de ecuaciones diferenciales.

En la resolución de ecuaciones diferenciales se aplica de forma sistemática el comentario del Ejercicio 6.8:

Debido a las operaciones que se realizan para expresar adecuadamente la solución, con frecuencia la constante aparece inmersa en alguna expresión.

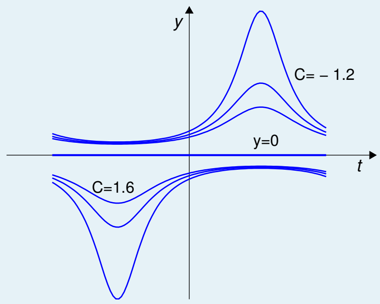
Sin embargo, para no complicar sin necesidad la notación, se sigue denotando por C a dicha expresión.

Ejemplo 6.9

Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = y^2 \cos t$.

$$y' = y^2 \cos t \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \cos t\,dt \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{y} = \operatorname{sen} t + C$$

$$\Leftrightarrow\; y = \frac{-1}{\operatorname{sen} t + C}$$



La ecuación $y' = y^2 \cos t$ tiene, además, la solución constante $y = 0$, que no está incluida en la familia de funciones anterior : no se obtiene de su expresión para ningún valor de la constante C. Resumiendo, las soluciones de la ecuación son:

$$y = \frac{-1}{\operatorname{sen} t + C} \quad \text{y además } y = 0$$

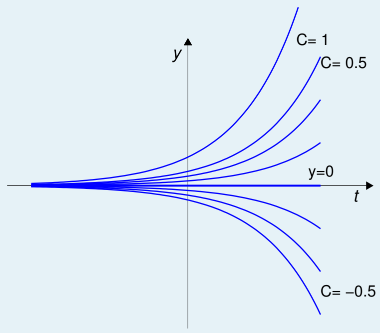
Ejemplo 6.10

Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2y$.

$$y' = 2y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int 2\,dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = 2t + C$$

Para despejar la incógnita, y, se toman exponenciales en ambos miembros de la igualdad anterior, y se obtiene

$$y = \pm\, e^{2t+C} = \pm e^{2t} \cdot e^{C} = e^{2t} \cdot (\pm e^{c})$$



Aquí, como en el Ejemplo (6.8), si C es una constante arbitraria, $\pm e^{C}$ también lo es, y la seguimos llamando C para no complicar la notación. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$y = C\, e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{arbitraria}$$

La solución constante $y = 0$ está incluida para el valor $C = 0$.

Ejemplo 6.11
Hallar la solución del problema $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{t} \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$

$$y' = \frac{y^2-1}{t} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt$$

La integral del primer miembro se calcula escribiendo el integrando como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) = \ln|t| + C$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) = 2(\ln|t| + C) = 2\ln|t| + 2C = \ln t^2 + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros:

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{\ln t^2 + C} = e^{\ln t^2}\,e^C = C\,t^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{y-1}{y+1} = (\pm C)\,t^2 = C\,t^2$$

$$\Leftrightarrow\; y - 1 = C\,t^2(y+1) = Ct^2y + Ct^2 \;\Leftrightarrow\; y - Ct^2y = y(1-Ct^2) = 1 + Ct^2$$

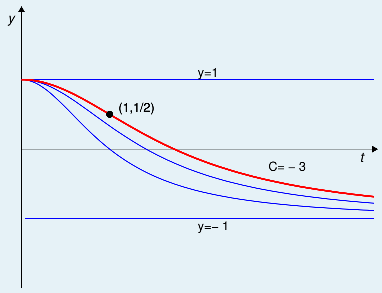
$$y = \frac{1+Ct^2}{1-Ct^2} = 1 + \frac{2Ct^2}{1-Ct^2} = 1 + \frac{2t^2}{C-t^2}$$

La ecuación tiene también las soluciones constantes $y = 1$ e $y = -1$, la segunda incluida para $C = 0$, la primera no.
Para hallar la solución que verifica $y(1) = 0.5$ imponemos esta condición en la solución general y despejamos C:

$$\frac{1}{2} = y(1) = 1 + \frac{2}{C-1} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2} = \frac{2}{C-1} \;\Leftrightarrow\; C = -3$$

Así pues, la solución del problema es

$$y = 1 + \frac{2t^2}{-3-t^2} = 1 - \frac{2t^2}{3+t^2}$$



Ejemplo 6.12
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2 - 3y$**.**

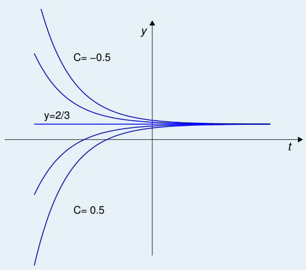
Se comienza dividiendo en ambos miembros por $2-3y$ (se debe recordar que luego hay que comprobar si la solución constante $y = 2/3$ está contenida en la solución general) y se integra en ambos miembros por separado (las integrales son inmediatas):

$$y' = 2 - 3y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{2-3y}\,dy = \int dt \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\ln|2-3y| = t + C \;\Leftrightarrow\; \ln|2-3y| = -3(t+C) = -3t + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros:

$$2 - 3y = e^{-3t+C} = e^{-3t}\,e^C = C\,e^{-3t} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}\left(2 - C\,e^{-3t}\right)$$

La solución constante $y = \dfrac{2}{3}$ está contenida en esta familia de funciones para el valor de $C = 0$.



Ejemplo 6.13
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = y - 2y^2$

El segundo miembro, que se puede factorizar en la forma $y - 2y^2 = y(1-2y)$, se anula claramente para $y = 0$ y para $y = 1/2$ que son soluciones constantes de la ecuación.

Para resolverla se pasa $y(1-2y)$ al primer miembro dividiendo y se integra en ambos lados. La integral del primer miembro se hace por descomposición en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{y(1-2y)}\,y' = 1 \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y(1-2y)}\,dy = \int dt \;\Leftrightarrow\; \int \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{1-2y}\right)dy = \int dt$$

$$\Leftrightarrow\; \ln|y| - \ln|1-2y| = \ln\left|\frac{y}{1-2y}\right| = t + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros de la última igualdad se tiene

$$\frac{y}{1-2y} = C\,e^t \;\Leftrightarrow\; y = C\,e^t(1-2y) = Ce^t - 2Ce^t y \;\Leftrightarrow\; y + 2Ce^t y = y(1+2Ce^t) = Ce^t$$

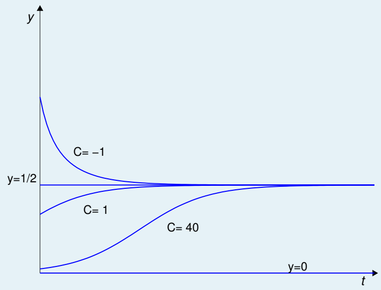
y, finalmente, despejando aquí la incógnita

$$y = \frac{Ce^t}{1+2Ce^t}$$

que es mejor escribir dividiendo numerador y denominador por Ce^t:

$$y = \frac{1}{\dfrac{1}{Ce^t} + 2} = \frac{1}{Ce^{-t} + 2}$$

La solución constante $y = 0$ no está incluida en esta expresión. En cambio, sí lo está la solución $y = 1/2$ (para $C = 0$).



6.4 Ecuaciones diferenciales lineales $\mathbf{y' = a(t)\,y + b(t)}$

Son las ecuaciones de la forma

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{6.7}$$

donde $a = a(t)$ y $b = b(t)$ son funciones que dependen de la variable independiente t.

Cuando $b(t) \equiv 0$ se dice que la ecuación (6.7) es **lineal homogénea**:

Dada la ecuación no homogénea (6.7), se denomina **ecuación homogénea asociada** a la ecuación que se obtiene eliminando el término no homogéneo, es decir

$$y' = a(t)y. \tag{6.8}$$

El método de resolución de estas ecuaciones está basado en la siguiente propiedad fundamental de sus soluciones:

Solución general de una ecuación lineal.
La solución general de la ecuación diferencial lineal (6.7) se puede escribir como la suma de la solución general de su ecuación homogénea asociada, (6.8), y una solución particular cualquiera de la ecuación completa (6.7):

$$y = y_h(t) + y_p(t),$$

donde

$y_h(t)$ es la solución general de $y' = a(t)\,y$

$y_p(t)$ es una solución particular cualquiera de $y' = a(t)\,y + b(t)$

En consecuencia, la resolución de la ecuación (6.7) se lleva a cabo en dos etapas:

1. Se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada (6.8).
2. Se calcula **una** solución particular (cualquiera) de la ecuación completa (6.7).

Se explica a continuación, con más detalle, cómo se ponen en práctica estas etapas.

1. La ecuación homogénea asociada
$$y' = a(t)y$$
es una ecuación de variables separables. Procediendo a separar las variables, e integrando en ambos miembros, se tiene
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int a(t)\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = A(t) + C \;\Leftrightarrow\; y = \pm e^{A(t)+C} = C\,e^{A(t)}$$
donde $A(t)$ es una primitiva de $a(t)$. Así, la solución general de la ecuación homogénea (6.8) es
$$y_h(t) = C\,e^{A(t)}$$
Denotemos $G(t) = e^{A(t)}$.
2. La solución general de la ecuación homogénea asociada siempre es de la forma
$$y_h(t) = C\,G(t), \qquad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria,}$$
donde $G(t) = e^{A(t)}$ y por tanto verifica $G'(t) = A'(t)\,e^{A(t)} = a(t)\,e^{A(t)}$, puesto que $A(t)$ es una primitiva de $a(t)$.

El cálculo de **una** solución particular de la ecuación (6.7) se puede llevar a cabo por el **método de Lagrange de variación de la constante**, que consiste en "buscar" dicha solución sabiendo que es de la forma:

$$y_p(t) = K(t)\,G(t). \tag{6.9}$$

Para encontrar la función $K(t)$ adecuada, se sustituye en la ecuación (6.7), y así se encontrará la condición que debe verificar $K(t)$ para que $y_p(t)$ sea solución, es decir, que verifique $y_p'(t) = a(t)\,y_p(t) + b(t)$:

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= K'(t)G(t) + K(t)G'(t) = K'(t)G(t) + K(t)a(t)G(t) \\ a(t)y_p(t) + b(t) &= a(t)K(t)G(t) + b(t) \end{aligned}$$

$$y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t) \iff K'(t)G(t) = b(t) \iff K'(t) = b(t)\,\frac{1}{G(t)}$$

luego, para que (6.9) sea solución de (6.7), tiene que ser

$$K(t) = \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt.$$

de donde la solución particular de (6.7) que se busca es

$$y_p(t) = G(t)\int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt.$$

Finalmente, según la propiedad antes explicada, la solución general de la ecuación lineal es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\,G(t) + G(t)\int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \left(\int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt + C\right)G(t).$$

El resumen de este proceso es, pues, el siguiente

Cálculo de la solución general de la ecuación diferencial lineal $\mathbf{y' = a(t)y + b(t)}$.

1. Calcular y_h, la solución general de la ecuación homogénea asociada $y' = a(t)y$, que será de la forma

$$y_h(t) = C\,G(t)$$

2. Calcular

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt$$

3. La solución general es

$$y(t) = (\,K(t) + C\,)\;G(t), \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ cualquiera.}$$

Ejemplo 6.14
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2y + t$.

En primer lugar se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada, $y' = 2y$, que es de variables separables:

$$\frac{1}{y}y' = 2 \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = 2\int dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = 2t + C \;\Leftrightarrow\; y = C\,e^{2t}$$

Así pues, la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h(t) = C\,e^{2t}$. Ponemos ahora $G(t) = e^{2t}$ y calculamos

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int t\frac{1}{e^{2t}}\,dt = \int te^{-2t}\,dt$$

Esta última integral se hace por partes:

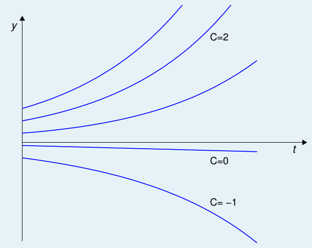
$$\int te^{-2t}\,dt = \begin{bmatrix} u=t & u'=1 \\ v'=e^{-2t} & v=-\frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

Con esto ya se tiene la solución particular buscada:

$$y_p(t) = K(t)\,G(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2t} = -\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

y, por tanto, también la solución general:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\,e^{2t} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$



Ejemplo 6.15
Hallar la solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 2y+t \\ y(0)=1 \end{cases}$

La solución general de la ecuación $y' = 2y + t$ ya se ha calculado en el Ejemplo anterior y es

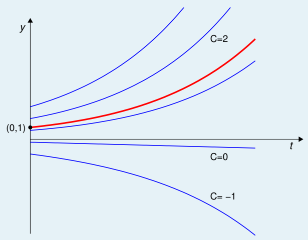
$$y = C\,e^{2t} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

Para hallar la solución del problema de valor inicial, sólo hay que imponer la condición inicial y deducir para qué valor de C se cumple:

$$1 = y(0) = Ce^0 - \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) = C - \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Luego la solución buscada es:

$$y = \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$



Ejemplo 6.16
Calcular la solución general de $y' = ty + te^{t^2}$**.**

Se calcula en primer lugar la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = ty \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int t dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \frac{1}{2}t^2 + C \;\Leftrightarrow\; y = C\,e^{t^2/2}$$

Así pues, la solución general de la homogénea es $y_h(t) = C\,e^{t^2/2}$. Ponemos $G(t) = e^{t^2/2}$.
Ahora, para hallar una solución particular de la ecuación completa, se calcula

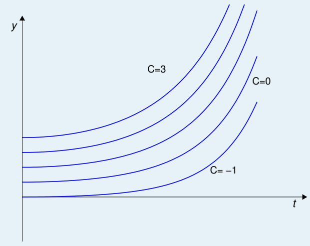
$$K(t) = \int b(t)\,\frac{1}{G(t)}\,dt = \int t\,e^{t^2}\,\frac{1}{e^{t^2/2}}\,dt = \int t\,e^{t^2}\,e^{-t^2/2}\,dt = \int t\,e^{t^2/2}\,dt = e^{t^2/2}$$

En consecuencia, la solución particular buscada es

$$y_p(t) = e^{t^2/2} e^{t^2/2} = e^{t^2}$$

y la solución general de la ecuación completa es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\, e^{t^2/2} + e^{t^2}$$



Ejemplo 6.17
Calcular la solución general de $ty' - y = t$.

La ecuación no aparece escrita en la forma normalizada $y' = a(t)y + b(t)$ para la cual está descrito el procedimiento de resolución. Lo primero que hay que hacer, en consecuencia, es escribirla en dicha forma estándar.

Para ello dividimos toda la ecuación por t y pasamos el término en y al segundo miembro:

$$ty' - y = t \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{t}y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{t}y + 1$$

Ahora calculamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{t}y \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|t| + C \;\Leftrightarrow\; y_h = C\,t \Rightarrow G(t) = t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| \Rightarrow y_p(t) = t\,\ln|t|.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,t + t\,\ln|t|, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Ejemplo 6.18
Calcular la solución general de $y' + y\cos(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}$.

La ecuación no aparece escrita en la forma normalizada $y' = a(t)y + b(t)$ para la cual está descrito el procedimiento de resolución. Lo primero que hay que hacer, en consecuencia, es escribirla en dicha forma estándar.

Para ello pasamos el término en y al segundo miembro:

$$y' + y\cos(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)} \quad \Rightarrow \quad y' = -y\cos(t) + e^{-\operatorname{sen}(t)}$$

Ahora calculamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = -\cos(t)\,y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \cos(t)\,dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = -\operatorname{sen}(t) + C \;\Leftrightarrow$$

$$y_h = C\,e^{-\operatorname{sen}(t)} \Rightarrow G(t) = e^{-\operatorname{sen}(t)}.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int e^{-\operatorname{sen}(t)} e^{\operatorname{sen}(t)}\,dt = \int dt = t \Rightarrow y_p = t\,e^{-\operatorname{sen}(t)}.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,e^{-\operatorname{sen}(t)} + t\,e^{-\operatorname{sen}(t)} = (C+t)\,e^{-\operatorname{sen}(t)} \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Ejemplo 6.19
Calcular la solución general de $y' = \frac{1}{t}y + 2t + 1$.

Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{t}\,y \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|t| + C \;\Leftrightarrow\; y = C\,t \Rightarrow G(t) = t.$$

Solución particular de la ecuación completa:

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt = \int \frac{2t+1}{t}\,dt = \int \left(2 + \frac{1}{t}\right)\,dt = 2t + \ln|t|$$

$$\Rightarrow y_p = K(t)G(t) = (2t + \ln|t|)\,t = 2t^2 + t\ln|t|.$$

Solución general de la ecuación completa dada:

$$y = C\,t + 2t^2 + t\ln|t| \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

6.5 Linealización de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria

Supongamos que necesitamos hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

y no sabemos/podemos resolver la ecuación diferencial $y' = f(t,y)$. La aproximación lineal de funciones de dos variables, estudiada en el tema anterior puede servirnos de ayuda.
Recordamos que una función $f(t,y)$, cerca de un punto (t_0,y_0), se puede aproximar por su plano tangente:

$$L(t,y) = f(t_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial t}\,(t-t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(y-y_0)$$

En el ejemplo siguiente se utiliza esta técnica para sustituir un problema de valor inicial por otro más fácil de resolver.

Ejemplo 6.20
Aproximar el siguiente problema de valor inicial mediante un problema lineal y calcular la solución de éste:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{t+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La ecuación $y' = \sqrt{t+y}$ no es de ninguno de los tipos estudiados.
Vamos a aproximar linealmente $f(t,y) = \sqrt{t+y}$ cerca de $(t_0, y_0) = (0,1)$. Se tiene:

$$\begin{cases} f(t,y) = \sqrt{t+y}, & f(0,1) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+y}}, & \dfrac{\partial f}{\partial t}(0,1) = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+y}}, & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La aproximación lineal de $f(t,y)$ es: $\quad f(t,y) \approx L(t,y) = 1 + \frac{1}{2}(t-0) + \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{2}y$

Ahora, en lugar del problema inicial (P), consideramos su *aproximación lineal*:

$$(Q) \quad \begin{cases} y' = L(t,y) = \dfrac{1}{2}\,(t+1) + \dfrac{1}{2}\,y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

que sí sabemos resolver, ya que se trata ahora de una ecuación lineal.

1. Solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y' = \frac{1}{2}\,y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\int dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \frac{t}{2} + C \Rightarrow y_h(t) = C\,e^{t/2}$$

2. Solución particular: $y_p(t) = K(t)\,e^{t/2}$, siendo

$$K(t) = \int \frac{t+1}{2}\,\frac{1}{e^{t/2}}\,dt = \frac{1}{2}\int (t+1)\,e^{-t/2}\,dt = [\text{por partes}] = -(t+3)\,e^{-t/2} \Rightarrow y_p(t) = -(t+3)$$

3. La solución general de la ecuación (Q) es, pues, $y(t) = -(t+3) + C\,e^{t/2}$

Imponemos la condición inicial:

$$1 = y(0) = -(0+3) + Ce^0 = -3 + C$$

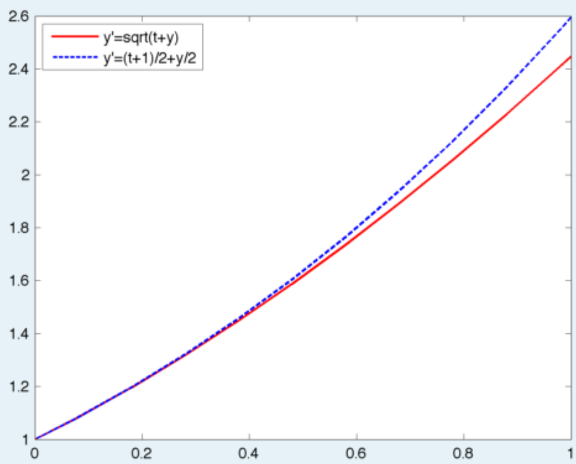
es decir,

$$C = 4$$

Luego, finalmente, la solución del problema aproximado es:

$$\boxed{y = -(t+3) + 4e^{t/2}}$$

En la figura se pueden comparar la solución del problema aproximado (en color azul y línea discontinua) con la solución del problema original calculada por métodos numéricos (en rojo, con línea continua).



6.6 Equilibrio y estabilidad

Ecuaciones diferenciales autónomas

En muchas ocasiones, un sistema (físico, biológico,...), se representa mediante una ecuación de la forma:

$$y' = f(y) \tag{6.10}$$

donde f es una función dada que sólo depende de y, es decir, **en la que no aparece explícitamente la variable independiente t**. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales autónomas**.

Para entender lo que significa que una ecuación sea autónoma, supongamos un modelo simple de crecimiento: supongamos que el número de bacterias en un cultivo viene dado por una solución de la ecuación:

$$y' = 2y \tag{6.11}$$

siendo y una función que depende de la variable independiente t (que no aparece explícitamente), que representa el tiempo medido en horas. La solución general de esta ecuación es

$$y(t) = C\,e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R} \tag{6.12}$$

y la constante C se podrá determinar si se conoce el tamaño de la población de bacterias en algún instante t.

Supongamos que se realiza un experimento comenzando con una población de 100 bacterias en el instante $t = 0$. Entonces la solución que nos interesa es que cumple la condición inicial $y(0) = 100$. Para obtener su expresión, sustituimos en la solución general y hallamos el valor adecuado de la constante arbitraria C:

$$100 = y(0) = Ce^0 \;\Leftrightarrow\; C = 100, \qquad \text{de donde la solución es} \quad y(t) = 100\,e^{2t}$$

Esta solución nos dice que, por ejemplo, 4 horas después de comenzar el experimento, en número de bacterias presentes en el cultivo habrá aumentado hasta

$$y(4) = 100\,e^8 \approx 298100$$

Supongamos ahora que repetimos el mismo experimento, pero 10 horas después, de manera que ahora la condición inicial será $y(10) = 100$. Sustituyendo en la solución general encontraremos:

$$100 = y(10) = Ce^{20} \;\Leftrightarrow\; C = \frac{100}{e^{20}} \approx 0.20612 \times 10^{-6} = 0.00000020612,$$

de donde la solución es

$$y(t) = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{2t}$$

El número de bacterias presentes en el cultivo 4 horas después de empezar este segundo experimento será:

$$y(10+4) = y(14) = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{2\times 14} = 0.20612 \times 10^{-6}\,e^{28} \approx 298100$$

es decir, la misma cantidad que en el caso del primer experimento.

Esto significa que la evolución del sistema que se estudia no depende del momento en que se realiza el experimento. Sólo depende del número de bacterias inicialmente existentes.

Lógicamente, si la forma de evolucionar de un sistema dependiera del tiempo en que se desarrolla, no se podría modelar mediante una ecuación diferencial autónoma. Sería necesaria una dependencia temporal explícita en la ecuación.

Soluciones de equilibrio o puntos fijos

Definición 6.21 (Solución de equilibrio o punto fijo)
Se llaman ***soluciones de equilibrio*** *o también* ***puntos fijos*** *de la ecuación*

$$y' = f(y)$$

a sus ***soluciones constantes****. Son las funciones constantes $y = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(\alpha) = 0$$

Ejemplo 6.22
La ecuación $y' = ky$ tiene la solución de equilibrio $y = 0$.

La ecuación $y = y - 2y^2$ tiene las soluciones de equilibrio $y = 0$ e $y = \dfrac{1}{2}$.

El estudio de las soluciones de equilibrio de una ecuación diferencial tiene interés porque son soluciones "de referencia" para averiguar el comportamiento de las demás soluciones de la ecuación diferencial.

La propiedad básica de las soluciones de equilibrio es que si, inicialmente, el sistema está en un estado de equilibrio, permanecerá en dicho estado en todos los instantes posteriores (a menos que alguna fuerza externa perturbe el sistema). Por ejemplo, si inicialmente $y(0) = K$ y K es una solución de equilibrio, entonces $y(t) = K$ para todo t.

Ejemplo 6.23
Calcular los puntos fijos de la ecuación $y' = 2y - y^3$
Se tiene que $f(y) = 2y - y^3 = y(2 - y^2)$. Luego

$$f(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(2 - y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Luego los puntos fijos o soluciones de equilibrio son $y = 0$, $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$.

Estabilidad de soluciones de equilibrio

Definición 6.24 (Solución estable)
Se dice que la solución de equilibrio $y = \alpha$ de la ecuación diferencial $y' = f(y)$ es ***localmente estable*** *si las soluciones de la ecuación que parten de condiciones iniciales* ligeramente *distintas del equilibrio tienden a* acercarse *a la solución de equilibrio.*

En caso contrario se dice que la solución de equilibrio es ***localmente inestable****.*

Este concepto se entiende claramente con los dos ejemplos de la Figura 6.1.

El término **localmente** se refiere al comportamiento cuando se producen **pequeñas** perturbaciones, pero no se presupone nada de los que sucede cuando se producen grandes perturbaciones.

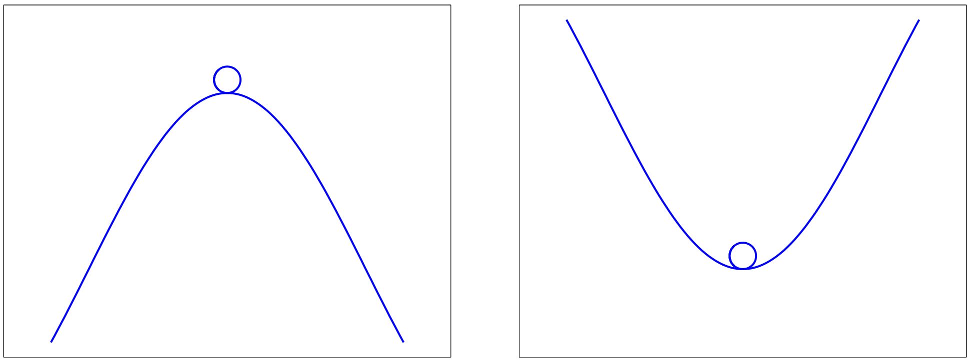


Figura 6.1: Ilustración de los dos tipos de estabilidad mediante el ejemplo de una bola en la cima de una colina y una bola en el fondo de un valle. Ambos son estados de equilibrio: la bola está en reposo. Sin embargo en el caso del valle su situación es estable, ya que una pequeña perturbación de su posición sería momentánea y la bola volvería a su posición inicial. Mientras que en el caso de la colina, la situación de la bola es inestable, ya que una pequeña perturbación de su posición haría que la bola rodase por la ladera de la colina, y sería imposible volver a la cima.

Damos, sin justificación, el siguiente criterio analítico para identificar cuándo una solución de equilibrio es localmente estable o inestable.

Criterio de estabilidad

Se considera la ecuación diferencial autónoma

$$y' = f(y),$$

donde f es una función derivable. Supongamos que $y = \alpha$ es una solución de equilibrio, es decir que $f(\alpha) = 0$. Entonces

- La solución $y = \alpha$ es **localmente estable** si $f'(\alpha) < 0$
- La solución $y = \alpha$ es **localmente inestable** si $f'(\alpha) > 0$

En el caso en que $f'(\alpha) = 0$ no se puede sacar ninguna conclusión.

Ejemplo 6.25
Estudiar la estabilidad de las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial $y' = 2y - y^3$.

Hemos visto en un ejemplo anterior que $y = 0$, $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$ son soluciones de equilibrio de esta ecuación. Para ver si son localmente estables o no aplicamos el criterio de estabilidad. Se tiene que

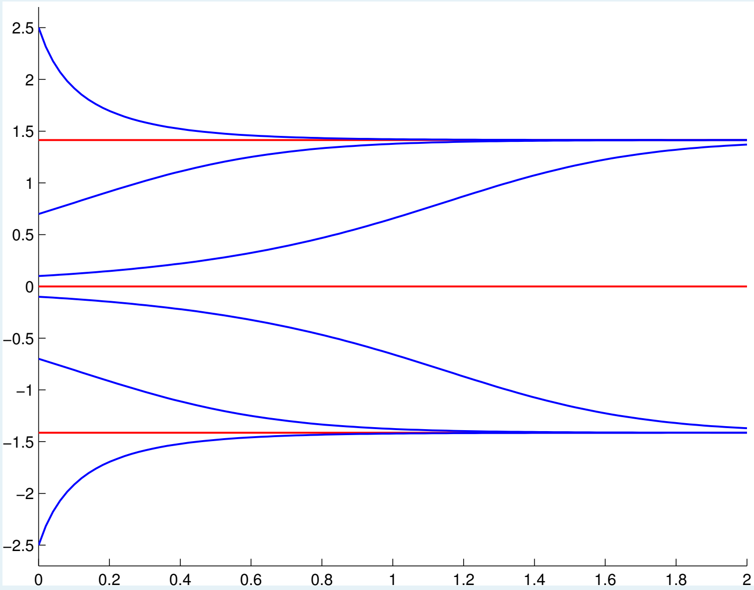
$$f'(y) = 2 - 3y^2.$$

Luego

- $f'(0) = 2 > 0 \Rightarrow y = 0$ es una solución de equilibrio localmente inestable.

- $f'(\sqrt{2}) = 2 - 3 \times 2 = -4 < 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ es localmente estable.
- $f'(-\sqrt{2}) = 2 - 3 \times 2 = -4 < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$ es localmente estable.

En la Figura se puede comprobar el comportamiento de las demás soluciones de esta ecuación diferencial con respecto a las soluciones de equilibrio: vemos que las soluciones $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$ (estables) “atraen” a otras soluciones, mientras que la solución $y = 0$ (inestable) “repele” a las otras soluciones.



6.7 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales, debido a que relacionan los valores de una función con los de su(s) derivada(s), son una herramienta fundamental en el tratamiento matemático de cualquier fenómeno dinámico, es decir, que involucre magnitudes que cambian con el tiempo (o con cualquier otra magnitud). Por ello, sus campos de aplicación son numerosos en física, química, biología, economía, ... Se presentan a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 6.26
En 1990 se arrojaron a un lago 1000 ejemplares de cierta especie de peces, de la que previamente no había ninguno. En 1997 se estimó que la cantidad de peces de esa especie que había en el lago en aquel momento era de 3000. Suponiendo que la velocidad de crecimiento de la población de peces es constante, calcular la cantidad de peces en los años 2000 y 2010.

Que la velocidad de crecimiento de la población sea constante significa que, si llamamos

$$p(t) \quad \equiv \quad \text{número de peces en el instante } t$$

se tiene que

$$p'(t) = k \qquad \text{(constante)} \tag{6.13}$$

El valor de esta constante, k, no lo conocemos, de momento, pero veremos cómo se puede deducir utilizando adecuadamente el resto de la información de que disponemos.
La ecuación (6.13) se puede resolver (dejando la constante k como un parámetro) y se tiene

$$p(t) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria} \tag{6.14}$$

Ahora tenemos dos constantes "desconocidas": k y C. Pero también tenemos dos informaciones que utilizar: sabemos que

1. $p(0) = 1000$ (inicialmente había 1000 peces)
2. $p(7) = 3000$ (7 años después había 3000 peces)

Sustituyendo estos valores en (6.14) se tiene:

$$\begin{cases} 1000 = p(0) = k \cdot 0 + C = C \Leftrightarrow C = 1000 \\ 3000 = p(7) = k \cdot 7 + C = 7k + 1000 \Leftrightarrow 7k = 2000 \Leftrightarrow k = \dfrac{2000}{7} \end{cases}$$

Con esto ya se tiene la expresión exacta de la función que nos da el número de peces que hay en el lago en cualquier instante t:

$$p(t) = \frac{2000}{7}t + 1000$$

y, con ella, ya se puede calcular lo que nos piden:

$$p(10) = \frac{2000}{7} \cdot 10 + 1000 = \frac{27000}{7} \approx 3857$$

$$p(20) = \frac{2000}{7} \cdot 20 + 1000 = \frac{47000}{7} \approx 6714$$

Así pues, la solución es

$$\boxed{\text{En el año 2000 había 3857 peces.}}$$

$$\boxed{\text{En el año 2010 había 6714 peces.}}$$

Ejemplo 6.27
Si el número de bacterias contenidas en 1 litro de leche se duplica en 4 horas y suponiendo que la tasa de multiplicación es constante, calcular en cuánto tiempo se hará 25 veces mayor.

Sea $y(t)$ el número de bacterias en el instante t.

Suponer que la tasa de multiplicación de la población de bacterias es constante consiste en suponer que

$$y'(t) = k \qquad k = \text{constante} \tag{6.15}$$

El valor de la constante k, que de momento es desconocido, se puede deducir a partir de la información adicional que tenemos.

Comenzamos por resolver la ecuación diferencial (6.15):

$$y(t) = kt + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria} \tag{6.16}$$

La información de que disponemos es

$$\begin{cases} y(0) = y_0 & \text{número inicial de bacterias} \\ y(4) = 2y_0 & \text{el número de bacterias se duplica en 4 horas} \end{cases}$$

Sustituimos estos datos en (6.16)

$$y_0 = y(0) = k \cdot 0 + C \Leftrightarrow C = y_0$$

$$2y_0 = y(4) = k \cdot 4 + C = 4k + y_0 \Leftrightarrow y_0 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{y_0}{4}$$

En consecuencia la función que nos da el número de bacterias en cualquier instante t es

$$y(t) = \frac{y_0}{4}\, t + y_0 = \frac{y_0}{4}(t+4)$$

siendo $y_0 =$ número inicial de bacterias.

Lo que se desea saber es en qué instante, t, el número de bacterias será igual a 25 veces el número que había inicialmente.

$$25\, y_0 = y(t) = \frac{y_0}{4}(t+4) \Leftrightarrow 100 = t + 4 \Leftrightarrow t = 100 - 4 = 96$$

Así pues, la solución es $\boxed{\text{96 horas}}$.

6.7.1 Dinámica de poblaciones: modelo de Malthus o exponencial

El comportamiento de una población de seres vivos cuyo número de individuos varía en el tiempo puede ser matemáticamente modelada mediante ecuaciones diferenciales y constituye, de hecho, uno de los principales campos de aplicación de las Matemáticas a la Biología.

Cuando una población no está sujeta a condicionantes externos (falta de alimentos, competencia por el espacio, por los recursos, ...) su ritmo de crecimiento o decrecimiento es debido únicamente al equilibrio entre su tasa de natalidad y su tasa de mortandad: la velocidad de crecimiento de la población (o de decrecimiento, si nacen menos individuos de los que mueren) es proporcional al número de individuos que la componen.

Para expresar esto matemáticamente, denotemos

$$N = N(t) \quad \text{número de habitantes en el instante } t.$$

Entonces, la velocidad de crecimiento de la población, N'(t), verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$N' = r\,N, \tag{6.17}$$

donde r es una constante, que caracteriza la tasa de crecimiento de la población, y que usualmente se determina experimentalmente.

Si $r > 0$ la población aumentará de tamaño, por ser la velocidad de crecimiento positiva, mientras que si $r < 0$ la población disminuirá de tamaño.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $N(0) = N_0$, entonces $N(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} N' = r\,N \quad t \geq 0 \\ N(0) = N_0\,. \end{cases} \tag{6.18}$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente, ya que es de variables separables (ver la Sección 6.3):

$$\int \frac{1}{N}\,dN = \int r\,dt$$

$$\ln|N| = rt + C$$

$$N = C\,e^{r\,t}$$

e, imponiendo la condición inicial $N(0) = N_0$, se obtiene

$$N = N_0\,e^{r\,t}\,,$$

cuya gráfica, para algunos valores de r, se representa en la Figura 6.2.

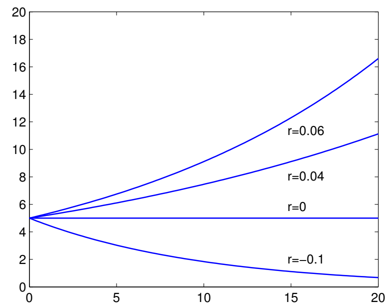


Figura 6.2: Representación gráfica de la función $N = 5\,e^{rt}$, solución de (6.18) con $N_0 = 5$, para varios valores de r.

Obsérvese que cuanto mas grande sea r, mas rápido es el crecimiento de la población, y que cuando $r < 0$ la población decrece. Para $r = 0$ el tamaño de la población permanece constante.

Este modelo de crecimiento de poblaciones recibe su nombre de Thomas Malthus (1766-1843), un clérigo y economista británico considerado el padre de la demografía. Basándose en este modelo, él dedujo que el crecimiento (exponencial) del número de seres humanos sobre la Tierra conduciría a épocas de grandes hambrunas, ya que la cantidad disponible de alimentos no aumentaría en la misma proporción que la población humana.

Este modelo de crecimiento de poblaciones es, como resulta obvio, excesivamente simple para reflejar situaciones tan complejas como la de la población humana sobre la tierra. Sin embargo, resulta útil para modelizar matemáticamente algunos experimentos controlados en laboratorio con determinadas especies de microorganismos, en sus etapas iniciales de desarrollo. Por ejemplo, si se inicia el cultivo de una pequeña colonia de bacterias sobre un sustrato rico en nutrientes, entonces las bacterias pueden crecer y reproducirse sin restricciones, al menos durante un cierto periodo de tiempo. (Un modelo más elaborado de dinámica de poblaciones, en el que se imponen restricciones al crecimiento de la población, teniendo en cuenta otros aspectos vitales, se expone en la Sección 6.7.5).

Ejemplo 6.28 (Cultivo de bacterias en laboratorio)
Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias es directamente proporcional al número de bacterias existentes. Se realiza un cultivo en laboratorio, introduciendo 2.5 millones de bacterias en un recipiente. Se observa que la población se duplica cada 3 horas. Calcular la población existente al cabo de 11 horas.

Denotemos por $P(t)$ al número de bacterias (en millones) que forman la población en el instante de tiempo t. Se comienza a medir el tiempo ($t = 0$) en el instante en que se inicia el cultivo en el laboratorio.

Según se indica en el enunciado, la tasa de crecimiento de la población (velocidad a la que crece), $P'(t)$, es directamente proporcional al número de bacterias de la población, es decir a $P(t)$, lo que significa que es de la forma $kP(t)$ para alguna constante k que, de momento, no conocemos.

Esto significa que la población considerada sigue la ley (de Malthus):

$$P' = kP \quad \text{ecuación diferencial cuyas soluciones son} \quad P(t) = C\,e^{kt}$$

Para determinar las dos constantes C y k hay que utilizar las dos informaciones dadas:

$$\begin{cases} P(0) = 2.5 \text{ (millones de bacterias)} \\ P(3) = 2 \times 2.5 = 5 \text{ (millones de bacterias)} \end{cases}$$

De la primera de ellas se tiene

$$2.5 = P(0) = C \iff P(t) = 2.5\,e^{kt}$$

y de la segunda

$$5 = P(3) = 2.5\,e^{3k} \iff e^{3k} = \frac{5}{2.5} = 2 \iff k = \frac{\ln(2)}{3} \approx 0.231.$$

Luego, finalmente, la ley seguida por la población de bacterias es

$$P(t) = 2.5\,e^{0.231\,t}.$$

El conocimiento de esta función nos permite conocer el número de bacterias que habrá en el cultivo en cualquier instante (siempre y cuando, naturalmente, el modelo siga siendo válido). Por ejemplo, para saber cuántas bacterias habrá 11 horas después de iniciar el experimento, bastará calcular

$$P(11) = 2.5\,e^{0.231\times 11} \approx 31.75.$$

$$\boxed{\text{Al cabo de 11 horas habrá aproximadamente 31.75 millones de bacterias}}$$

Ejemplo 6.29 (Población mundial)
La población mundial en el año 1985 era de aproximadamente 4830 millones de personas y, en aquel momento, crecía a un ritmo de un 1.73 % por año. Suponiendo que el crecimiento de la población se rigiera por el modelo exponencial, calcular el valor estimado de la población mundial en el año 2010.

La ley de Malthus (o de crecimiento exponencial) dice que el número de individuos de la población en el instante t, $P(t)$, verifica la ecuación diferencial:

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{cuya solución general es} \quad P(t) = C\,e^{kt}$$

En esta expresión hay dos constantes que no se conocen (de momento): k y C. Para determinar su valor utilizaremos el resto de la información:

1. $P(1985) = 4830$ millones.
2. La población crece un 1.73 % cada año, de donde, por ejemplo, en el año 1986, la población se habría incrementado en un 1.73 % de 4830 millones, es decir

$$P(1986) = 4830 + \frac{1.73}{100}\,4830 = \left(1 + \frac{1.73}{100}\right) 4830 = 4913 \text{ millones.}$$

De ambos datos se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 4830 = P(1985) = C\,e^{1985\,k} \\ 4913 = P(1986) = C\,e^{1986\,k} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{4830}{4913} = \frac{C\,e^{1985\,k}}{C\,e^{1986\,k}} = \frac{e^{1985\,k}}{e^{1986\,k}} = e^{1985\,k} \cdot e^{-1986\,k} = e^{-k},$$

y de aquí

$$\ln\left(\frac{4830}{4913}\right) = -k \;\Leftrightarrow\; k = -\ln\left(\frac{4830}{4913}\right) \approx 0.0170$$

Ahora, una vez conocido el valor de k, se tiene:

$$4830 = P(1985) = C\,e^{0.0170\times 1985} = C\,e^{33.7450} \;\Leftrightarrow\; C = \frac{4830}{e^{33.7450}} \approx 1.0683 \times 10^{-11}$$

Así, gracias a la información proporcionada se tienen ya los valores de las constantes C y k y por tanto la expresión de $P(t)$:

$$P(t) = 1.0683 \times 10^{-11}\,e^{0.0170\,t}$$

Utilizando esta expresión se deduciría que el número de seres humanos en la tierra en el año 2010 sería:

$$P(2010) = 1.0683 \times 10^{-11}\,e^{0.0170\times 2010} \approx 7388 \text{ millones de personas}$$

(la población real en el año 2010 era de 6972 millones de personas).

Observación: este ejercicio también se puede hacer (y, de hecho, los cálculos son más fáciles) situando el origen, $t = 0$, de la variable independiente en el año 1985, de modo que el año 1986 correspondería a $t = 1$ y el año 2010 correspondería a $t = 25$. Entonces tendríamos la información $P(0) = 4830$ y $P(1) = 4913$ y lo que se desea es calcular $P(25)$.

6.7.2 Desintegración radiactiva

Los núcleos de determinados elementos químicos (radiactivos) se desintegran, transformándose en otros y emitiendo radiaciones. Se sabe que la velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva (es decir, el número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo) en un instante dado es proporcional al número de átomos de dicha sustancia existentes en ese instante. En consecuencia, si se denota por $A(t)$ el número de átomos de la sustancia original presentes en el instante t, se puede escribir:

$$A'(t) = -\lambda A(t), \tag{6.19}$$

donde el signo menos se debe a que la velocidad es negativa (el número de átomos disminuye) y la constante de proporcionalidad, $\lambda > 0$, se llama constante de descomposición o de decaimiento, y es propia de cada sustancia radiactiva. Esta ecuación se conoce con el nombre de **ley de decaimiento exponencial** porque, como se verá a continuación, sus soluciones son exponenciales decrecientes.

Si se conoce el número de átomos presentes en un instante dado, por ejemplo se sabe que en $t = 0$ es $A(0) = A_0$, y se conoce también la constante de decaimiento, λ, entonces se puede predecir el número de átomos presentes en cualquier instante posterior, ya que $A(t)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} A' = -\lambda A \quad t \geq 0, \\ A(0) = A_0\,. \end{cases} \tag{6.20}$$

La ecuación en (6.20) es de variables separables, como la del ejemplo anterior, y la solución del problema de valor inicial viene dada por la exponencial decreciente:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}\,,$$

cuya gráfica, para algunos valores de λ, se representa en la Figura 6.3. Obsérvese que cuanto mas grande sea λ, mas rápidamente se desintegra la sustancia.

Obsérvese también que, para conocer el valor del coeficiente λ de una sustancia determinada, basta conocer el valor de $A(t)$ en dos instantes distintos.

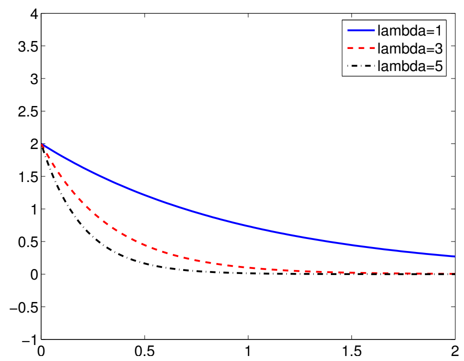


Figura 6.3: Representación gráfica de la función $A = 2e^{-\lambda t}$, solución de (6.20) con $A_0 = 2$, para varios valores de λ.

Por ejemplo, sabiendo que $A(0) = A_0$ y $A(t_1) = A_1$, se tiene, por un lado $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, $\forall\, t \geq 0$, y por el otro:

$$A(t_1) = A_0 e^{-\lambda t_1} = A_1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t_1} = \frac{A_1}{A_0} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t_1 = \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right)\,.$$

Vida media

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda una cierta cantidad de dicha sustancia en **desintegrarse a la mitad**. Es distinta para cada sustancia. Por ejemplo, el Carbono-14, C_{14}, tiene una vida media de 5730 años, lo que significa que una cantidad cualquiera se reduce, al cabo de ese tiempo, a la mitad. La otra mitad se habrá convertido en otras sustancias.

La vida media sólo depende de la constante de descomposición λ, y no depende de la cantidad de sustancia presente inicialmente, A_0.

En efecto, sea V_m la vida media de una sustancia radiactiva. Puesto que

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}\,,$$

y que en el tiempo $t = V_m$ los valores de A serán $A(V_m) = A_0/2$, se deduce que

$$\frac{A_0}{2} = A(V_m) = A_0 e^{-\lambda V_m} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda V_m} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda V_m} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda V_m = \ln(2).$$

Por lo tanto, la vida media para un elemento radiactivo es:

$$V_m = \frac{1}{\lambda} \ln(2). \tag{6.21}$$

Datación por radiocarbono

Es una técnica para determinar la edad de objetos fabricados con sustancias orgánicas que está basada en la ley de decaimiento exponencial (6.20) considerada anteriormente.

El Carbono-14 es producido de forma continua en la atmósfera, como consecuencia del bombardeo de los átomos de nitrógeno, contenidos en el aire, por neutrones cósmicos. Este Carbono-14 se combina con el Oxígeno para formar el dióxido de carbono (CO_2), asimilado por las plantas que, a su vez, son ingeridas por los animales.

Los átomos de Carbono-14 presentes en los seres vivos están constantemente desintegrándose, pero, simultáneamente, son reemplazados por nuevos átomos a un ritmo constante, de modo que el porcentaje de Carbono-14 en la atmósfera y en los animales y plantas se mantiene constante, aunque su cantidad varía de unos seres vivos a otros.

Cuando una planta o animal muere, cesa la asimilación de Carbono-14 del exterior mientras que el que contiene su organismo sigue desintegrándose. Como resultado, la cantidad de Carbono-14 en el organismo comienza a disminuir.

La cantidad de C_{14} que había en un objeto cuando fue fabricado es conocida si se sabe con qué material fue hecho (por ejemplo, madera de pino, tela de lino, papiro, ...).

La técnica llamada del C_{14}, para datar un objeto consiste en medir la cantidad de C_{14} que queda en la actualidad en dicho objeto, y utilizar la forma de las soluciones de la ecuación de decaimiento radiactivo para calcular el tiempo que ha pasado.

Por ejemplo, la técnica de C_{14} se utilizó en el año 1988 para estimar la edad del Sudario de Turín, tela de lino hallada en 1356 que muestra la imagen de un hombre que presenta marcas y traumas físicos (ver la Figura 6.4), y de la que se pensaba que podría ser la tela que cubría a Jesús de Nazaret en el sepulcro, llamada también Sábana Santa.

Se observó que las fibras del tejido contenían entre un 92 % y un 93 % del nivel inicial de C_{14} .

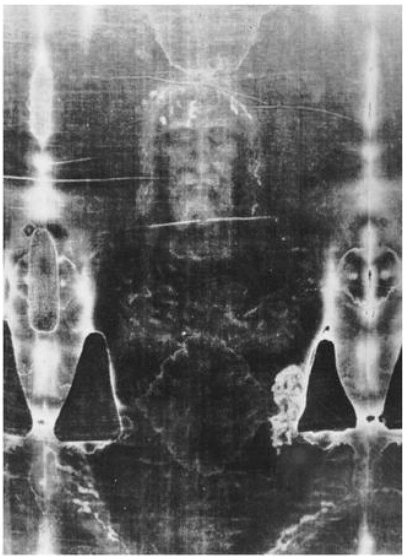


Figura 6.4: Sudario de Turín.

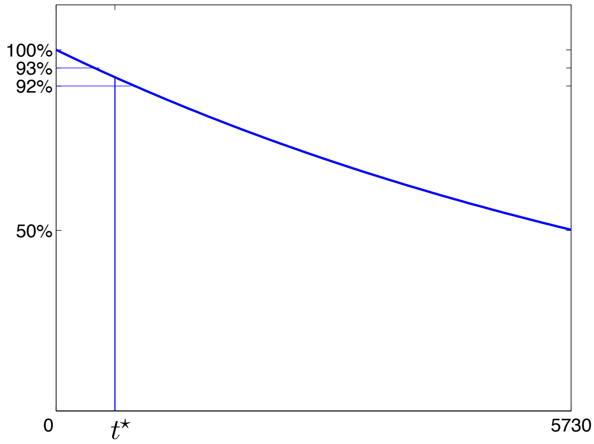


Figura 6.5: Curva de decaimiento del C_{14}.

Teniendo en cuenta que las soluciones de (6.20) son decrecientes, el tiempo transcurrido desde que el Sudario fue confeccionado hasta la fecha de 1988 debería ser un valor $t^\star$ que verifique

$$0.93A_0 \geq A(t^\star) \geq 0.92A_0$$

o, lo que es lo mismo,

$$0.93 \geq \frac{A(t^\star)}{A_0} \geq 0.92.$$

De la expresión de las soluciones se tiene

$$\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0,$$

luego se busca $t^\star$ tal que

$$0.93 \geq e^{-\lambda t^\star} \geq 0.92 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(0.93) \geq -\lambda t^\star \geq \ln(0.92) \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln(0.93) \leq \lambda t^\star \leq -\ln(0.92)$$

es decir, puesto que λ es positiva,

$$-\frac{\ln(0.93)}{\lambda} \leq t^\star \leq -\frac{\ln(0.92)}{\lambda}.$$

La constante de desintegración, λ, del C_{14} vale (ver (6.21))

$$\lambda = \frac{1}{V_m}\ln(2) = \frac{1}{5730} \cdot 0.6931 \approx 0.000121,$$

por consiguiente, se tiene

$$599 \approx -\frac{\ln(0.93)}{\lambda} \leq t^\star \leq -\frac{\ln(0.92)}{\lambda} \approx 689.$$

Este resultado indica que el Sudario fue fabricado entre 689 y 599 años antes del momento en que fueron realizadas las pruebas, en el año de 1988. Es decir, mucho después de la época en que vivió Jesús. Lo que probó que no podía ser la Sábana Santa.

6.7.3 Ley de enfriamiento de Newton

En determinadas condiciones, la velocidad a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del ambiente que lo rodea y su propia temperatura. Si se denota por $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t, la ley anterior se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$T'(t) = k(M - T(t)), \tag{6.22}$$

donde M es la temperatura del medio (que se supone constante) y k es la constante de proporcionalidad, propia del objeto.

Si en el instante inicial, $t = 0$, la temperatura toma el valor T_0, entonces la temperatura del objeto en cualquier instante posterior $T(t)$, viene dada por la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} T' = k(M - T), \\ T(0) = T_0\,. \end{cases} \tag{6.23}$$

Esta ecuación es de variables separables y su solución general es

$$T(t) = M + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

La solución particular que verifica $T(0) = T_0$ es

$$T(t) = M + (T_0 - M)e^{-kt}.$$

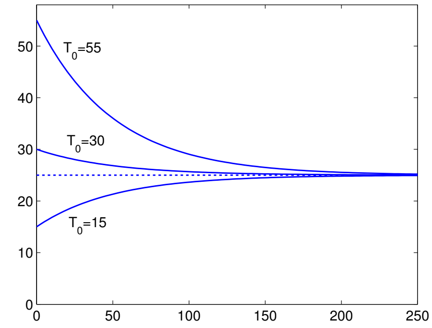


Figura 6.6: Representación gráfica de la solución de (6.23), para $M = 25$, $k = 0.02$ y varios valores del dato inicial T_0.

En la Figura 6.6 están representadas las soluciones del problema (6.23) para diversos valores del dato inicial T_0. Obsérvese que, como es obvio intuitivamente, la temperatura del objeto varía más rápidamente cuanto mayor es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del medio.

Por otro lado, sea cual sea su temperatura inicial, la temperatura del objeto tiende, cuando pasa el tiempo, a igualarse con la temperatura del medio: todas las soluciones tienen una asíntota horizontal en $T = M$.

Ejemplo 6.30 (Ley de enfriamiento de Newton)
Un recipiente con agua hirviendo ($100°$C) se retira del fuego en el instante $t = 0$ y se deja enfriar en una habitación grande que se encuentra a una temperatura constante de $20°$C. Sabiendo que pasados 5 minutos la temperatura del agua se ha enfriado hasta $80°$C:

(a) Determinar la constante de proporcionalidad k.

(b) Determinar el tiempo que tardará el agua del recipiente en descender hasta una temperatura de $30°$C.

(a) Sea $y = y(t)$ la temperatura del agua (en grados Celsius) en el instante de tiempo t (medido en minutos). Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura del objeto sigue la ley

$$y' = k(20 - y),$$

donde k es una constante propia del objeto.

Comenzamos observando que esta ecuación tiene la solución trivial $y = 20$ (constante).

La ecuación es de variables separables y se integra fácilmente:

$$\int \frac{1}{20 - y}\,dy = k\int dt \;\Leftrightarrow\; -\ln|20 - y| = kt + C \;\Leftrightarrow\; y = 20 - C\,e^{-kt}.$$

La solución trivial $y = 0$ está contenida en esta familia para el valor de $C = 0$.

En la expresión de y hay 2 constantes que determinar: k y C. Para determinarlas disponemos de 2 datos:

$$y(0) = 100 \quad \text{e} \quad y(5) = 80$$

- De $100 = y(0) = 20 - C$ se tiene que $C = -80$
- De $80 = y(5) = 20 + 80\, e^{-5k}$ se tiene

$$\frac{80-20}{80} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} = e^{-5k} \Leftrightarrow -5k = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \boxed{k \approx 0.0575}$$

En consecuencia, la función que da la temperatura del agua es:

$$\boxed{y(t) = 20 + 80\, e^{-0.0575\, t}}$$

(b) Se trata ahora de averiguar para qué valor de t alcanza $y(t)$ (descendiendo) el valor 30°C. Es decir, para qué valor de t se tiene

$$30 = 20 + 80\, e^{-0.0575\, t}$$

Operando en esta ecuación se tiene

$$\frac{30-20}{80} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = e^{-0.0575\, t} \Leftrightarrow -0.0575\, t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow t = \frac{-1}{0.0575}\ln\left(\frac{1}{8}\right) \approx 36.1642$$

Es decir, $\boxed{\text{aproximadamente 36 minutos}}$.

Ejemplo 6.31 (Ley de enfriamiento de Newton)
Un cadáver es encontrado en una nave industrial que está a una temperatura constante de 20°C. En el momento de ser encontrado, la temperatura del cadáver es de 35°C. Al cabo de una hora su temperatura ha descendido a 34°C. Suponiendo que en el momento de la muerte la temperatura del cuerpo era de 37°C, y que se cumple la Ley de Enfriamiento de Newton, calcular a qué hora se produjo la muerte.

Denotamos por $T = T(t)$ la temperatura del cadáver en el instante t, comenzando a contar el tiempo en el momento del crimen. Puesto que sigue la ley de Newton y en el momento inicial ($t = 0$) era de 37°C, la función $T(t)$ es la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} T' = k(M - T) = k(20 - T) \\ T(0) = 37 \end{cases}$$

La solución general de la anterior ecuación es (véase el Ejemplo 6.30) $T(t) = 20 - C\, e^{-kt}$. La solución trivial $T = 20$ está incluída para $C = 0$.

Lo que queremos saber es el tiempo pasado desde el momento de la muerte hasta que se encontró el cadaver. Si situamos el momento de la muerte en el instante $t = 0$, y denotamos por $\tilde{t}$ al instante (desconocido de momento) en que se encontró el cadaver, la información que tenemos es la siguiente:

$$\begin{cases} T(0) = 37 \\ T(\tilde{t}) = 35 \\ T(\tilde{t} + 1) = 34 \end{cases}$$

Con estos 3 datos debemos ser capaces de encontrar los valores de k, de C y de $\tilde{t}$.

$$37 = T(0) = 20 - C \Leftrightarrow C = 20 - 37 \implies \boxed{C = -17}$$

$$35 = T(\tilde{t}) = 20 + 17\, e^{-k\tilde{t}} \Leftrightarrow e^{-k\tilde{t}} = \frac{35-20}{17} = \frac{15}{17}$$

$$34 = T(\tilde{t}+1) = 20 + 17\, e^{-k(\tilde{t}+1)} = 20 + 17\, e^{-k\tilde{t}}\, e^{-k} = 20 + 17\,\frac{15}{17}\, e^{-k} = 20 + 15\, e^{-k} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{34-20}{15} = \frac{14}{15}$$

De la última igualdad se tiene que

$$-k = \ln\left(\frac{14}{15}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k = -\ln\left(\frac{14}{15}\right) \approx 0.0690}$$

Una vez conocido el valor de k, de la igualdad $\quad e^{-k\tilde{t}} = \dfrac{15}{17} \quad$ se puede despejar $\tilde{t}$ tomando logaritmos en ambos miembros:

$$e^{-k\tilde{t}} = \frac{15}{17} \;\Leftrightarrow\; -k\tilde{t} = \ln\left(\frac{15}{17}\right) \;\Leftrightarrow\; \tilde{t} = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{15}{17}\right) \;\Leftrightarrow\; \tilde{t} \approx 1.8141 \text{ horas } \approx \boxed{1 \text{ hora } 49 \text{ minutos}}$$

Así pues, el cadáver fué encontrado 1 hora y 49 minutos después de su muerte.

6.7.4 Dinámica de crecimiento de un individuo: modelo de Bertalanffy.

En los años 50 del siglo XX, el biólogo austriaco L. von Bertalanffy (1901-1972) desarrolló un modelo matemático para la talla de un individuo en función de su edad, que se utiliza con frecuencia para predecir el tamaño de los peces.

Sea $L(t)$ la longitud del individuo en la edad t y sea A la talla máxima de la especie, es decir la talla máxima alcanzable por un pez adulto.
La ley de crecimiento de este modelo dice que la velocidad de crecimiento es proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima:

$$L'(t) = k(A - L(t)),$$

siendo $k > 0$, la constante de proporcionalidad, propia de cada especie.
Si en el instante inicial, $t = 0$, la longitud del individuo es $0 < L_0 < A$, entonces la función $L(t)$, talla en el instante t, será solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} L' = k(A - L) \\ L(0) = L_0\,. \end{cases} \tag{6.24}$$

Como la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima alcanzable disminuye con el tiempo, la velocidad de crecimiento disminuye también con el tiempo, lo que implica que los ejemplares de menor edad crecen a mayor velocidad que los de mayor edad. En este modelo, la velocidad de crecimiento es siempre positiva. Esto significa que los peces crecen durante toda su vida, que es lo que ocurre en la realidad.

La ecuación diferencial de (6.24) se puede integrar fácilmente, ya que es de variables separables:

$$\int \frac{dL}{A - L} = \int k\,dt \iff -\ln|A - L| = kt + C \iff A - L = Ce^{-kt}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$L = A + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ arbitraria.}$$

Imponiendo la condición inicial, $L(0) = L_0$, se tiene finalmente la solución del problema (6.24)

$$L_0 = L(0) = A + Ce^0 = A + C \iff C = L_0 - A \implies \boxed{L(t) = A + (L_0 - A)e^{-kt}}.$$

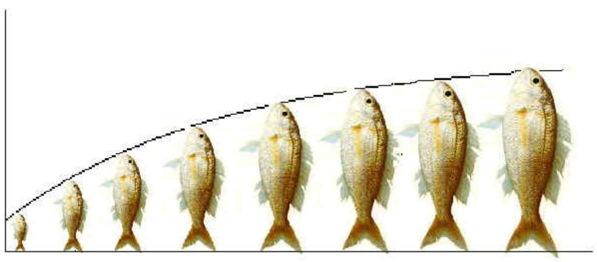


Figura 6.7: Modelo de Bertalanffy.

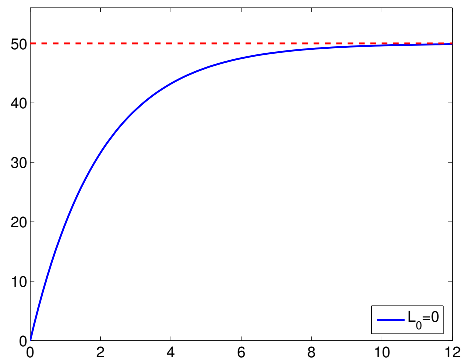


Figura 6.8: Representación gráfica de la solución de (6.24), para $A = 50$, $k = 0.5$ y $L_0 = 0$.

En la Figura 6.8 está representada la solución del problema (6.24) para $A = 50$, $k = 0.5$ y $L_0 = 0$.
Obsérvese que la recta horizontal $L = A$ es una asíntota horizontal de la solución, es decir,

$$\lim_{t \to +\infty} L(t) = A,$$

lo que expresa matemáticamente el hecho de que la talla de los peces tiende, cuando pasa el tiempo, a aproximarse al valor A, pero sin nunca alcanzarlo.

Por ello se puede decir que A es la **longitud asintótica** de la especie.

Ejemplo 6.32 (Modelo de Bertalanffy)
Sea $L(t)$ la longitud (en centímetros) de un pez en el tiempo t, medido en meses. Se supone que el pez crece de acuerdo con la siguiente ley (de von Bertalanffy):

$$\begin{cases} L' = k(34 - L) \\ L(0) = 2. \end{cases}$$

(a) Sabiendo que a la edad de 4 meses, el pez mide 10 centímetros, determinar la constante de crecimiento k.

(b) Calcular la longitud del pez a los 10 meses.

(c) Calcular $\lim_{t\to\infty} L(t)$ y dar una interpretación del resultado en el marco de la dinámica del crecimiento del pez.

La solución del problema de valor inicial se calcula fácilmente por ser la ecuación de variables separables:

$$L' = k(34 - L) \Leftrightarrow \int \frac{1}{34 - L}\, dL = k \int dt \Leftrightarrow -\ln|34 - L| = kt + C$$

de donde se tiene $L = 34 - Ce^{-kt}$ e, imponiendo la condición inicial $L(0) = 2$, se encuentra el valor de la constante $C = 32$.

Luego la longitud del pez viene dada por

$$L(t) = 34 - 32\, e^{-kt}.$$

Para determinar el valor de k es necesario utilizar más información: $L(4) = 10$. Entonces,

$$10 = L(4) = 34 - 32\, e^{-4k} \Leftrightarrow e^{-4k} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0.0719.$$

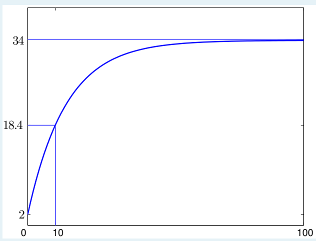
Una vez conocido el valor de k se puede calcular la longitud del pez en cualquier instante $t > 0$:

$$L(10) = 34 - 32\, e^{-10k} \approx 18.4 \text{ cm}.$$

Por último, es obvio que

$$\lim_{t\to+\infty} L(t) = \lim_{t\to+\infty} 34 - 32\, e^{-kt} = 34 - 32 \lim_{t\to+\infty} e^{-kt} = 34,$$

lo cual significa que la curva que representa la longitud del pez tiene una asíntota horizontal en $L = 34$. El pez sigue creciendo, pero cada vez a menor velocidad, y su longitud tiende a acercarse al valor 34, aunque sin nunca llegar a alcanzarlo.



6.7.5 Dinámica de poblaciones: ecuación logística

En la Sección 6.7.1, se ha considerado un modelo simple de la dinámica de poblaciones, en el que se supone que no hay limitaciones de alimentos y, por tanto la población puede crecer de manera exponencial. El modelo que se presenta ahora es un poco más complicado. En él se tiene en cuenta la existencia de circunstancias que limitan el crecimiento exponencial de la población.

En determinadas condiciones, el crecimiento de algunas poblaciones se rige por la siguiente ley, denominada **logística**:

$$p'(t) = r\,p(t) - m\,p^2(t). \tag{6.25}$$

En esta ecuación $p(t)$ representa el número de individuos de la población existentes en el instante t. El primer término de la derecha de esta ecuación $(r\,p(t))$ expresa matemáticamente el crecimiento natural de la población, debido a la reproducción: la población crece de forma proporcional al número de individuos de la misma. El segundo término $(-m\,p^2(t))$ intenta expresar el hecho de que, si los recursos (alimentos) son limitados, entonces los individuos de la población “compiten” por ellos, impidiendo un crecimiento ilimitado. Este término hace disminuir la velocidad a la que crece la población, razón por la que lleva signo menos.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $p(0) = p_0$, entonces $p = p(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} p' = r\,p - m\,p^2, \\ p(0) = p_0\,. \end{cases} \tag{6.26}$$

La ecuación (6.25) es de variables separables, luego:

$$\frac{dp}{dt} = p(r - mp) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{p(r-mp)}\,dp = \int dt.$$

Para calcular la integral de la izquierda hay que escribir el integrando como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{p(r-mp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{r-mp} \;\Leftrightarrow\; 1 = A(r-mp) + Bp \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1/r \\ B = m/r \end{cases}$$

de donde, $A = 1/r$ y $B = m/r$. Por lo tanto:

$$\int \frac{1}{p(r-mp)}\,dp = \int \left(\frac{1/r}{p} + \frac{m/r}{r-mp}\right) dp = \frac{1}{r}\int \left(\frac{1}{p} + \frac{m}{r-mp}\right) dp = \int dt.$$

Integrando, se obtiene

$$\frac{1}{r}\left(\ln|p| - \ln|r-mp|\right) = t + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ln\left|\frac{p}{r-mp}\right| = rt + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.}$$

Tomando ahora exponenciales en ambos miembros de esta igualdad se tiene:

$$\frac{p}{r-mp} = C\,e^{rt} \quad \Longleftrightarrow \quad p = Cr\,e^{rt} - Cm\,e^{rt}p \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{Cr\,e^{rt}}{1 + Cm\,e^{rt}}.$$

Y de aquí, dividiendo numerador y denominador por Ce^{rt} y renombrando la constante arbitraria C, se tiene, finalmente, la expresión siguiente para la solución general de la ecuación logística:

$$p = \frac{r}{m + C\,e^{-rt}}\ .$$

Por tanto, la solución general de (6.25) es:

$$p(t) = \frac{r}{m + C\,e^{-rt}}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria.} \tag{6.27}$$

Esta ecuación tiene, además, las soluciones constantes $p = \beta$, para los valores de β que anulen el segundo miembro de la ecuación diferencial, en este caso:

$$\beta(r - m\beta) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = r/m, \end{cases}$$

La solución constante $p = r/m$ está incluida en la expresión de la solución general, para el valor de $C = 0$. En cambio, la solución constante $p = 0$ no se obtiene de la expresión de la solución general para ningún valor de la constante arbitraria C: la ecuación logística tiene todas las soluciones dadas por (6.27) y, **además**, la solución constante $p = 0$.

La solución particular que verifica la condición inicial $p(0) = p_0$ se obtiene para el valor de la constante arbitraria $C = \dfrac{r - mp_0}{p_0}$ y es:

$$p(t) = \frac{r\,p_0}{mp_0 + (r - mp_0)\,e^{-rt}}\,.$$

Su comportamiento cualitativo puede observarse en la Figura 6.9 para varios valores de la condición inicial p_0 .

Obsérvese que, sea cual sea el número de individuos de la población inicial, esta tiende, con el tiempo, a estabilizarse en el valor constante $P = \dfrac{r}{m}$ (asíntota horizontal de $p(t)$).

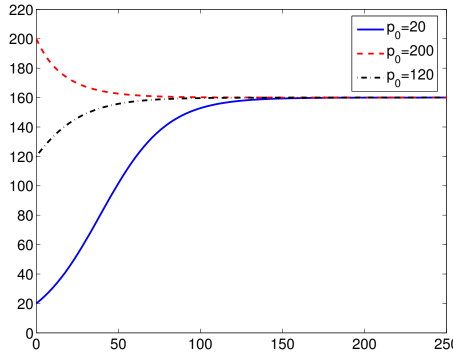


Figura 6.9: Gráfica de la solución del problema (6.26) con $r = 0.05$ y $m = 0.0003125$, para varios valores de p_0.

6.7.6 Dinámica de epidemias

Un modelo simple de propagación de epidemias se obtiene cuando se supone que la rapidez de contagio entre la población es directamente proporcional al número de individuos contagiados multiplicado por el número de individuos no contagiados. Hallar la solución general de esta ecuación.

Denotamos por $I(t)$ el número de infectados por la epidemia en el instante t y por P (constante) el número total de habitantes de la población, de forma que $P - I(t)$ es el número de individuos no infectados. El modelo establece que la velocidad de contagio $I'(t)$ es proporcional al número de infectados $I(t)$ multiplicado por el de no infectados $P - I(t)$. En consecuencia se tiene

$$I' = k\, I\, (P - I) \tag{6.28}$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Esta ecuación es de variables separables y tiene las soluciones triviales $I = 0$ e $I = P$. Para calcular las demás:

$$I' = k\, I\, (P - I) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{I(P-I)}\frac{dI}{dt} = k \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{I(P-I)}\, dI = k \int dt = kt + C$$

Para calcular la integral del primer miembro, que es racional, hay que escribir el integrando como una suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{I(P-I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{P-I} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A = 1/P \\ B = 1/P \end{cases}$$

En consecuencia, se tiene:

$$\int \frac{1}{I(P-I)}\, dI = \int \left(\frac{1/P}{I} + \frac{1/P}{P-I} \right) dI = \frac{1}{P}\left(\ln I - \ln(P-I)\right) = \frac{1}{P} \ln \frac{I}{P-I} = kt + C$$

$$\Leftrightarrow\; \ln \frac{I}{P-I} = P(kt + C) = kPt + PC = kPt + C$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{I}{P-I} = e^{kPt + C} = e^{kPt}\, e^{C} = C\, e^{kPt}$$

Operamos a continuación para despejar I en esta igualdad:

$$I = C\, e^{kPt}\, (P - I) = CPe^{kPt} - Ce^{kPt}\, I$$

$$\Leftrightarrow\; I + Ce^{kPt}\, I = I\,(1 + Ce^{kPt}) = CPe^{kPt} \;\Leftrightarrow\; I = \frac{CPe^{kPt}}{1 + Ce^{kPt}}$$

Con esto ya tenemos la expresión de la solución general de la ecuación (6.28), que es mejor escribir dividiendo numerador y denominador por Ce^{kPt}:

$$I(t) = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}}$$

La solución trivial $I = P$ está contenida en esta familia para $C = 0$. Sin embargo la solución $I = 0$ no lo está: para ningún valor que demos a la constante arbitraria C obtendremos la función $I = 0$. En consecuencia, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación es:

$$I(t) = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}} \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \text{y además } I = 0. \tag{6.29}$$

Ejemplo 6.33
En una granja de 40.000 aves hay un pollo contagiado con la gripe aviar. Si suponemos que la rapidez de contagio es directamente proporcional al número de aves contagiadas multiplicado por el número de no contagiadas, siendo la constante de proporcionalidad $k = 4 \times 10^{-5}$ (midiendo el tiempo en días), determinar en cuánto tiempo quedarían infectados un $75\,\%$ de los pollos de la granja .

Denotando por $I(t)$ el número de pollos contagiados y por P el número total de pollos de la granja (población total) se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$I' = k\,I\,(P - I)$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

En este caso, $P = 40000$ y $k = 4 \times 10^{-5} = 0.00004$ (de donde $kP = 16 \times 10^4 \times 10^{-5} = 1.6$).

Nos dicen, además, que inicialmente hay un pollo infectado, es decir, que se tiene $I(0) = 1$. En consecuencia, el problema que hay que resolver para obtener la expresión de la función que representa el número de individuos infectados en cualquier instante t es:

$$\left\{ \begin{array}{l} I' = k\,I\,(P - I) \\ I(0) = 1 \end{array} \right. \tag{6.30}$$

La solución general de esta ecuación diferencial es (véase Ejemplo **??**):

$$I = \frac{P}{1 + Ce^{-kPt}} \quad \text{(y además } I = 0\text{).}$$

Buscamos ahora la solución que verifica la condición inicial, $I(0) = 1$.

$$1 = I(0) = \frac{P}{1 + C} \;\Leftrightarrow\; C = P - 1 = 39999 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{la solución del problema (6.30) es } I(t) = \frac{40000}{1 + 39999\,e^{-1.6t}}}$$

Buscamos ahora el valor del tiempo $t^\star$ para el cual $I(t^\star) = 0.75\,P = 30000$. Para este $t^\star$ se tendrá

$$30000 = I(t^\star) = \frac{40000}{1 + 39999\,e^{-1.6t^\star}} \;\Leftrightarrow\; 1 + 39999\,e^{-1.6t^\star} = \frac{40000}{30000} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow\; e^{-1.6t^\star} = \frac{1}{39999}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{119997} \;\Leftrightarrow\; -1.6t^\star = \ln\left(\frac{1}{119997}\right) \;\Leftrightarrow\; t^\star = -\frac{1}{1.6}\ln\left(\frac{1}{119997}\right)$$

de donde se deduce que

$$\boxed{\text{El tiempo que tarda en estar contagiados el } 75\,\% \text{ de los pollos es } t^\star \approx 7.3}$$

Ejemplo 6.34
Se sabe que la velocidad de propagación de una epidemia es proporcional al número de personas infectadas multiplicado por el número de personas no infectadas. Si denotamos por $I(t)$ el número de personas infectadas en el tiempo t, medido en días, y por P la población total, la dinámica de la infección viene dada por

$$I' = k\,I(P - I),$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de proporcionalidad. En una población de 10000 habitantes se detecta una enfermedad que afecta inicialmente a 50 personas. Al cabo de tres días, se observa que son 250 las personas afectadas. Averiguar el número de enfermos que habrá pasados 12 días.

La ecuación $I' = k\,I(P - I)$ es de variables separables y su solución es (véase (6.29)):

$$I(t) = \frac{P}{C\,e^{-kPt} + 1} \quad \text{(y además } I = 0\text{).}$$

donde $P = 10000$. Para determinar las constantes C y k disponemos de la siguiente información:

$$I(0) = 50 \quad \text{e} \quad I(3) = 250.$$

En primer lugar,

$$50 = I(0) = \frac{P}{C+1} \Leftrightarrow C = \frac{P}{50} - 1 = 199.$$

En segundo lugar,

$$250 = I(3) = \frac{P}{199\, e^{-3kP} + 1} \Leftrightarrow 199\, e^{-3kP} + 1 = \frac{P}{250} \Leftrightarrow e^{-3kP} = \frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)$$

de donde, tomando logaritmos en ambos miembros de la igualdad se tiene

$$-3kP = \ln\left[\frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)\right] \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3P}\ln\left[\frac{1}{199}\left(\frac{P}{250} - 1\right)\right] = \frac{0.5432}{P}.$$

En consecuencia, el número de infectados en cualquier instante $t > 0$ viene dado por

$$I(t) = \frac{P}{199 \cdot e^{-0.5432t} + 1} = \frac{10^4}{199 \cdot e^{-0.5432t} + 1}$$

y se tiene

$$I(12) = \frac{10^4}{199 \cdot e^{-0.5432 \times 12} + 1} \approx 7730$$

$$\boxed{\text{Pasados 12 días habrá 7730 enfermos.}}$$

Ejemplo 6.35
En un campus universitario que tiene 1000 estudiantes hay un único estudiante portador del virus de la gripe. Sea $y(t)$ el número de estudiantes contagiados en el día t. Si la velocidad con la que el virus se propaga es proporcional al producto entre el número de estudiantes contagiados y el número de estudiantes no contagiados, se pide:

(a) Determinar el número de personas enfermas en el día t si se sabe que pasados 4 días hay 50 enfermos.

(b) Calcular cuándo habrá 500 estudiantes enfermos.

(c) Si los estudiantes enfermos no se tratan con medicamentos, ¿qué número de enfermos habrá cuando pase mucho tiempo? ¿Llegará a desaparecer la enfermedad?

Por lo que se indica, la función $y(t)$ = número de estudiantes contagiados en el día t es solución de la ecuación diferencial

$$y' = ky(P - y)$$

donde $P = 1000$ es el número de individuos de la población. La solución general de esta ecuación es (véase (6.29)):

$$y(t) = \frac{P}{C\, e^{-kPt} + 1} \quad (\text{y además } y = 0).$$

en cuya expresión hay dos constantes desconocidas (de momento) : k y C. Para determinarlas debemos usar el resto de la información:

De $y(0) = 1$ se tiene

$$1 = y(0) = \frac{1000}{C+1} \Leftrightarrow C + 1 = P = 1000 \Leftrightarrow C = 999$$

Por otra parte, de $y(4) = 50$ se tiene:

$$50 = y(4) = \frac{P}{C\,e^{-4kP}+1} \;\Leftrightarrow\; 50\left(Ce^{-4kP}+1\right) = 50\,C\,e^{-4kP} + 50 = P$$

Despejando de aquí e^{-4kP} y tomando luego logaritmos en ambos miembros:

$$e^{-4kP} = \frac{P-50}{50C} \;\Leftrightarrow\; \ln e^{-4kP} = -4kP = \ln\frac{P-50}{50C}$$

$$\Leftrightarrow\; -kP = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{P-50}{50C}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{950}{49950}\right) \approx -0.9906$$

Así pues,

$$\boxed{\text{El número de personas enfermas el día } t \text{ es } y(t) = \frac{1000}{999\,e^{-0.9906\,t}+1}}$$

Para saber cuándo habrá 500 estudiantes enfermos tenemos que calcular para qué valor de t se tiene

$$\frac{1000}{999\,e^{-0.9906\,t}+1} = 500 \;\Leftrightarrow\; 2 = 999\,e^{-0.9906\,t}+1 \;\Leftrightarrow\; e^{-0.9906\,t} = \frac{1}{999} \;\Leftrightarrow\; -0.9906\,t = \ln\left(\frac{1}{999}\right)$$

$$\Leftrightarrow\; t = -\frac{1}{0.9906}\ln\left(\frac{1}{999}\right) \approx 6.9723$$

Por último, puesto que

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{P}{C\,e^{-kPt}+1} = P$$

resulta obvio que esta ley conduce a que, a la larga, la población entera resulta infectada.

6.7.7 Problemas de mezclas

En esta sección se estudian ciertas ecuaciones diferenciales que aparecen en problemas en los que se mezclan dos fluidos.

Más concretamente, se considera un recipiente que contiene una cantidad de V litros de cierto fluido, en el que se encuentra disuelta una cantidad, x_0, de cierta sustancia. En el recipiente entra constantemente fluido con una concentración de c_e gramos por litro y a una velocidad de v_e litros por minuto. Se supone que los fluidos en el recipiente se mezclan de forma instantánea y que la mezcla sale del recipiente a una velocidad de v_s litros por minuto.

Lo que se desea es determinar una función que indique la cantidad de sustancia que hay en el interior del recipiente en cada instante, t.

Llamemos $v(t)$ a la cantidad de fluido (litros) presente en el recipiente en el instante t, y $x(t)$ a la cantidad de sustancia disuelta (gramos) en el instante t, de forma que la concentración de sustancia disuelta en el instante t es $x(t)/v(t)$ gramos por litro.

La variación de la magnitud $x(t)$ por unidad de tiempo es $x'(t)$ y viene dada por la diferencia entre la cantidad de sustancia que entra (por unidad de tiempo) y la cantidad de sustancia que sale (por unidad de tiempo):

$$x'(t) = \boxed{\begin{array}{c}\text{Variación de } x(t)\\ \text{por unidad de tiempo}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Cantidad de sustancia que}\\ \text{entra por unidad de tiempo}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Cantidad de sustancia que}\\ \text{sale por unidad de tiempo}\end{array}}$$

Puesto que entran v_e litros por minuto, que contienen una concentración c_e gramos de sustancia por litro, se tiene que entran $c_e \cdot v_e$ gramos por minuto de sustancia.

La concentración de sustancia en el fluido que sale es la del fluido en el interior del recipiente, es decir $x(t)/v(t)$ gramos por litro. Puesto que salen v_s litros por minuto, se tiene que salen $x(t)v_s/v(t)$ gramos por minuto de la sustancia disuelta.
Así pues, la variación de la concentración, $x'(t)$, verifica:

$$x'(t) = c_e\, v_e - \frac{x(t)}{v(t)}\, v_s$$

La expresión de $v(t)$, cantidad de fluido en el recipiente en el instante t, deberá ser determinada en cada caso, ya que depende de la cantidad inicial y de las velocidades de entrada y salida del fluido en el recipiente. Si, por ejemplo, la velocidad de entrada de fluido es igual a la velocidad de salida, entonces el volumen en el interior del recipiente permanecerá constante.

Ejemplo 6.36
Un depósito contiene 100 litros de una disolución salina cuya concentración es de 2.5 gramos de sal por litro. Una disolución conteniendo 2 gramos de sal por litro entra en el depósito a razón de 5 litros por minuto y la mezcla (que se supone uniforme de forma instantánea) sale del depósito a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito.

Puesto que la velocidad a la que entra el líquido en el depósito es la misma a la que sale, en el depósito siempre hay la misma cantidad de líquido: 100 litros.

Sea $x(t)$ la cantidad de sal en el depósito en el instante t.

La variación por unidad de tiempo de la cantidad de sal en el depósito es:

$$x'(t) = \text{cantidad que entra por unidad de tiempo} - \text{cantidad que sale por unidad de tiempo}$$

En el depósito entran 5l. por minuto de una disolución con 2gr. por litro, luego entran 10gr. de sal por minuto.

Puesto que la cantidad de sal en el depósito es $x(t)$ y la cantidad de líquido que hay es 100l., la concentración de la disolución en el depósito es de $x(t)/100$ gramos por litro. Esta disolución sale a una velocidad de 5 litros por minuto, por lo tanto la sal sale a una velocidad de $5x(t)/100$ gramos por minuto.

Así pues, se tiene:

$$x' = 10 - \frac{5x}{100}$$

Esta ecuación es de variables separables:

$$x' = 10 - \frac{5x}{100} = \frac{1000-5x}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{1000-5x}\,x' = \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1000-5x}\,dx = \int \frac{1}{100}\,dt \Leftrightarrow -\frac{1}{5}\ln|1000-5x| = \frac{1}{100}\,t + C$$

$$\Leftrightarrow \ln|1000-5x| = -\frac{5}{100}\,t + C = -\frac{1}{20}\,t + C = -0.05t + C \Leftrightarrow 1000-5x = C\,e^{-0.05t}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 1000 - C\,e^{-0.05t} \Leftrightarrow x = \frac{1000 - C\,e^{-0.05t}}{5} = 200 - Ce^{-0.05t}$$

Así pues, la solución general de la ecuación diferencial es

$$x = 200 - Ce^{-0.05t}$$

Puesto que, inicialmente, la concentración de sal en el depósito era de 2.5 gramos por litro, la cantidad de sal inicial era de

$$x(0) = 2.5 \times 100 = 250$$

Sustituyendo esta condición inicial en la expresión de la solución general se tiene

$$250 = x(0) = 200 - C \Leftrightarrow C = -50$$

Luego la función que nos da la cantidad de sal en cualquier instante t es:

$$\boxed{x(t) = 200 + 50e^{-0.05t}}$$

Ejemplo 6.37
La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 cm^3/sg y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0.2 g/cm^3, se pide:

(a) ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en cada instante si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento?

(b) ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de 0.1 g/cm^3?

La cantidad de medicamento que entra en el órgano por segundo es:

$$0.2 \times 3 = 0.6 \text{ gramos}$$

Si denotamos por $x(t)$ la cantidad de medicamento presente en el órgano en el instante t se tendrá, puesto que la sangre abandona el órgano a la misma velocidad a la que entra ($3\,\text{cm}^3$/sg), que la cantidad de medicamento que abandona el órgano por segundo será de

$$3\,\frac{x(t)}{125} = \frac{3}{125}\,x(t)$$

En consecuencia, puesto que la variación por unidad de tiempo (i.e., por segundo) de la cantidad de medicamento viene dada por:

$$x'(t) = \text{cantidad que entra por segundo} - \text{cantidad que sale por segundo}$$

se tiene

$$x' = 0.6 - \frac{3}{125}\,x = \frac{75-3x}{125}$$

Esta ecuación es de variables separables:

$$\int \frac{1}{75-3x}\,dx = \frac{1}{125}\int dt \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\ln|75-3x| = \frac{t}{125}+C \;\Leftrightarrow\; \ln|75-3x| = -\frac{3t}{125}+C \;\Leftrightarrow\; 75-3x = C\,e^{-3t/125}$$

Despejando aquí x se obtiene la solución general de la ecuación:

$$x = 25 - C\,e^{-3t/125}$$

Puesto que, inicialmente, no había ninguna cantidad de medicamento en el órgano, la condición inicial para $x(t)$ es $x(0) = 0$, lo que conduce, sustituyendo, a:

$$0 = x(0) = 25 - C \;\Leftrightarrow\; C = 25$$

En consecuencia la función que nos da la cantidad de medicamento en el órgano en cada instante es

$$x(t) = 25(1 - e^{-3t/125})$$

La concentración es la cantidad de medicamento dividido por el volumen del órgano, es decir

$$x(t)/125 = \frac{25}{125}(1-e^{-3t/125}) = \frac{1}{5}(1-e^{-3t/125})$$

Por lo tanto, la contestación a la primera pregunta es que

$$\boxed{\text{La concentración en el instante } t \text{ es } \frac{1}{5}(1-e^{-3t/125})}$$

Para contestar a la segunda pregunta hay que calcular para qué valor de t se verifica

$$0.1 = \frac{1}{5}(1-e^{-3t/125}) \;\Leftrightarrow\; 0.5 - 1 = -0.5 = -e^{-3t/125} \;\Leftrightarrow\; e^{-3t/125} = 0.5 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3t}{125} = \ln 0.5$$

$$\Leftrightarrow\; \boxed{t = -\frac{125}{3}\,\ln 0.5 \approx 28.88 \text{ segundos}}$$

6.7.8 Dinámica de poblaciones: modelo presa-depredador

El caso, mucho más complicado desde el punto de vista matemático, en que hay dos especies diferentes que interaccionan, también se puede representar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por ejemplo, se considera el caso de un sistema presa-predador, es decir, de un eco-sistema con dos poblaciones de dos especies distintas, en donde una de ellas es el alimento de la otra. Se denota por $p_1(t)$ el número de individuos de la población de presas y por $p_2(t)$ el número de individuos de la población de predadores.

En determinadas condiciones, un tal sistema se comporta según la ley siguiente, llamada **sistema de Lotka-Volterra**:

$$\begin{cases} p_1'(t) = r_1 p_1(t) - d_1 p_1(t) p_2(t), \\ p_2'(t) = -r_2 p_2(t) + d_2 p_1(t) p_2(t). \end{cases}$$

Este modelo es distinto de los anteriores, ya que aquí se tiene un **sistema diferencial**, es decir un sistema, con dos incógnitas $p_1(t)$ y $p_2(t)$, de dos ecuaciones diferenciales que relacionan las incógnitas con sus derivadas y con las otras incógnitas.

El término $r_1 p_1(t)$ de la primera ecuación representa el crecimiento natural (positivo) de la población de presas, en ausencia de predadores. El correspondiente término $-r_2 p_2(t)$ de la segunda ecuación representa el crecimiento de la población de predadores en ausencia de presas, que es negativo por falta de alimento.

Los términos $-d_1 p_1(t) p_2(t)$ y $d_2 p_1(t) p_2(t)$, por su parte, tienen en cuenta la iteracción entre ambas especies, que resulta en un decrecimiento de la población de presas y un crecimiento de la población de predadores (todos los coeficientes se suponen positivos).

Si se conocen el número de presas y el de predadores en un instante dado, $t = 0$, entonces se puede predecir el número de individuos de cada especie en cualquier instante posterior, mediante la solución del correspondiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} p_1'(t) = r_1 p_1(t) - d_1 p_1(t) p_2(t), \\ p_2'(t) = -r_2 p_2(t) + d_2 p_1(t) p_2(t)). \\ p_1(0) = A \\ p_2(0) = B. \end{cases}$$

Obsérvese que se impone una condición inicial para cada incógnita, p_1 y p_2.

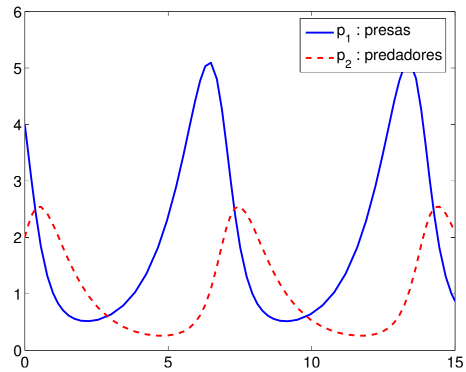


Figura 6.10: Representación de la solución del sistema de presa-predador, p_1 y p_2, sobre el intervalo temporal $[0, 10]$, para los valores de los coeficientes $r_1 = r_2 = d_1 = 1$, $d_2 = 0.5$ y de los datos iniciales $A = 4$ y $B = 2$.

6.8 Aproximación numérica de soluciones de ecuaciones diferenciales

Sólo para algunos (pocos) tipos muy especiales de ecuaciones diferenciales se dispone de fórmulas explícitas para calcular la expresión matemática de sus soluciones. Por ello, en la inmensa mayoría de los casos prácticos sólo es posible **aproximarlas**.

Los **algoritmos numéricos** de aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales proporcionan métodos para calcular **aproximaciones numéricas de los valores de dichas soluciones en algunos puntos**.

A modo simplemente orientativo, se expone aquí el más sencillo de dichos algoritmos: el **método de Euler**.

Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{6.31}$$

y se denota por $y = \varphi(t)$ su solución exacta, definida en un intervalo $I = [t_0, t_f]$.

Por ser solución de la ecuación, la función $\varphi(t)$ verifica:

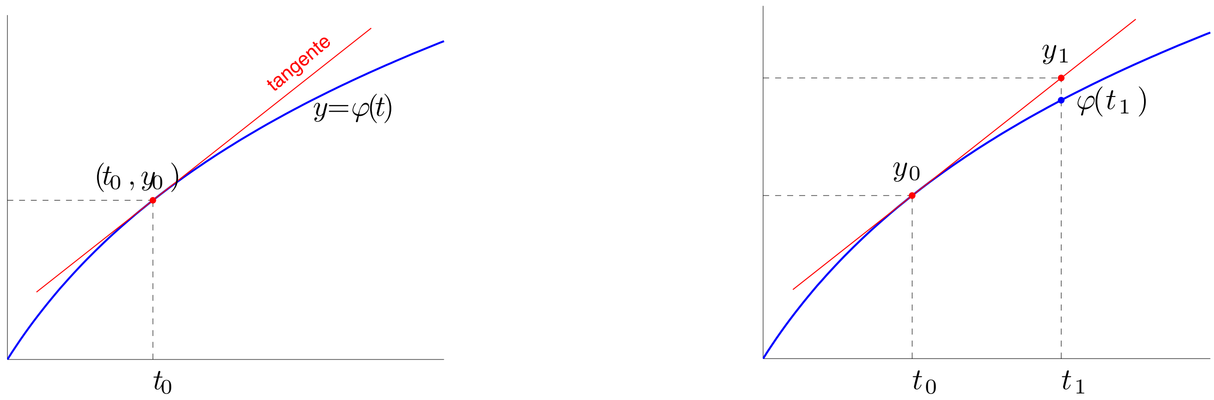
$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall\, t \in I = [t_0, t_f],$$

y, por la condición inicial, también verifica $\varphi(t_0) = y_0$ de donde se tiene:

$$\varphi'(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)) = f(t_0, y_0),$$

es decir, la pendiente a la curva $y = \varphi(t)$ en el punto (t_0, y_0) es $f(t_0, y_0)$ y por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (t_0, y_0) es

$$y = y_0 + \varphi'(t_0)\,(t - t_0) = y_0 + f(t_0, y_0)\,(t - t_0).$$



Entonces, si la distancia $t_1 - t_0$ es pequeña, se puede "asimilar" la curva $y = \varphi(t)$ con su tangente en el punto (t_0, y_0) y por lo tanto aproximar el valor $y(t_1)$ por el valor que tome, en t_1, dicha tangente, que es:

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\,(t_1 - t_0).$$

Una vez calculada una aproximación, y_1, del valor exacto $\varphi(t_1)$, para calcular una aproximación del valor de la solución $\varphi(t)$ en un punto $t_2 > t_1$, con $t_2 - t_1$ "pequeño", se reitera este procedimiento, tomando:

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\,(t_2 - t_1)$$

como aproximación del valor exacto $\varphi(t_2)$ y así sucesivamente.

Así, se pueden aproximar los valores de la solución de (6.31) en $n + 1$ puntos regularmente espaciados del intervalo $[t_0, t_f]$:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_f, \quad \text{con } t_{k+1} - t_k = h = \frac{t_f - t_0}{n}, \;\; \forall\, k = 0, 1, \ldots, n-1$$

calculando los valores $\{y_k,\ \ k = 0, \ldots, n\}$ mediante la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Bajo adecuadas hipótesis de regularidad, se puede demostrar que, si h es suficientemente pequeño, este método proporciona aproximaciones razonables de los valores de la solución exacta $\varphi(t)$ en los puntos t_k de la partición.