Operaciones con expresiones fraccionarias.

1. Opera y simplifica:

   a) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{1-x}{x^2-1}$

   b) $\dfrac{3}{2x-4}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$

   c) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)$

2. Localiza los errorres que se han cometido al escribir las siguientes igualdades:

   a) $\dfrac{x^2+1}{x}=x+1$

   b) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=x^2$

   c) $x+\dfrac{1}{x}=x^2+1$

Operaciones con expresiones radicales

3. Suma los siguientes radicales, reduciéndolos previamente a radicales semejantes:

   a) $\sqrt{x}+\sqrt{xy^2}+\sqrt{xy^4}-\sqrt{xy^6}$

   b) $\sqrt{24xy^2}-5\sqrt{6x^3}+\sqrt{486x^5y^4}$

   c) $\sqrt{\dfrac{3}{x^2}}-4\sqrt{3x^2}$

Resolución de ecuaciones de segundo grado

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $(2x+6)x=0$

   b) $(2x-5)(7x-3)=0$

   c) $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)(8x+42)=0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $x(x+5)-8x=0$

   b) $3(x^2-1)+5=x^2+2$

   c) $2(x-1)+x(x+1)=x^2-1$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $\dfrac{5x+4}{5x-4}+\dfrac{5x-4}{5x+4}=\dfrac{13}{6}$

   b) $\dfrac{2}{x^2-9}=\dfrac{x^2-16}{72}$

   c) $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=1$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

   a) $4\sqrt{x-2}=x+2$

   b) $x-\sqrt{169-x^2}=17$

   c) $x+\sqrt{5x+10}=8$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

   a) $\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=2$

   b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=1$

   c) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$

Inecuaciones

9. Resuelve las siguientes inecuaciones:

   a) $(x-1)^2\leq 4$

   b) $|x-3|\leq 1$

   c) $|2x-1|\geq 2$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones:

    a) $x^2-x-12>0$

    b) $(x-2)(x-3)(x+1)<0$

    c) $(x^2+2x+1)(x^4-2x^2+1)<0$

11. Dados dos números $a<b$, razona cuáles de las siguientes desigualdades son ciertas:

    a) $5-a>5-b$

    b) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

    c) $a^2<b^2$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones/inecuaciones y dibuja el conjunto solución en la recta real:

    a) $|x-4|=|x-1|$

    b) $\left|\dfrac{x+2}{3-x}\right|=\dfrac{x+2}{3-x}$

    c) $\left|\dfrac{x+4}{x-3}\right|>2$

Números complejos

13. Dados los números complejos $z_1=2+i$ y $z_2=3-2i$, calcula:

    a) z_1-z_2

    b) $z_1\cdot z_2$

    c) z_1/z_2

14. Calcula:

    a) $(1+i)\cdot(3-2i)$

    b) $(\sqrt{14}+\sqrt{10}i)\cdot(\sqrt{14}-\sqrt{10}i)$

    c) $(4+5i)^2$

15. Calcula:

    a) $\dfrac{2+i}{2-i}$
    b) $\dfrac{6-7i}{i}$
    c) $\dfrac{i}{3-2i}+\dfrac{2i}{3+8i}$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

    a) $x^2-2x+2=0$
    b) $x^2+4x+5=0$

17. Representa los siguientes números complejos en el plano y exprésalos en forma polar o binómica, según el caso:

    a) $3-3i$
    b) $6i$
    c) $3.5_{\frac{\pi}{2}}$
    d) $2_{\frac{\pi}{4}}$

18. Dados $z_1=2_{\frac{\pi}{3}}$ y $z_2=1_{\frac{\pi}{6}}$, obtener:

    a) $z_1\cdot z_2$
    b) z_1/z_2
    c) z_1^3
    d) $\sqrt{z_2}$

Sistemas de numeración

19. Representa los siguientes números en los sistemas binario y cuaternario de numeración:

    a) 123
    b) 4
    c) 64
    d) 0.8625
    e) 0.125
    f) 0.2

20. Representar en sistema decimal los siguientes números cuaternarios:

    a) $100000_{4)}$
    b) $3033_{4)}$
    c) $303'332_{4)}$

21. Representar en sistema decimal los siguientes números binarios:

    a) $101010_{2)}$
    b) $0'101011_{2)}$
    c) $101'101_{2)}$

Raíces y factorización de polinomios

22. Efectúa las siguientes divisiones:

    a) $(x^3+4x^2+6):(x-4)$
    b) $(x^3-1):(x-1)$
    c) $(4x^3-8x^2-9x+7):(x-3)$

23. Descompón las siguientes funciones racionales en fracciones simples:

    a) $\dfrac{1}{4x-x^2}$
    b) $\dfrac{3}{x^2-1}$
    c) $\dfrac{x-3x^2}{x(1+x)}$

24. Descompón las siguientes funciones racionales en fracciones simples:

    a) $\dfrac{1}{x-x^2}$
    b) $\dfrac{1}{2x-x^2}$
    c) $\dfrac{1}{x-3x^2}$

25. Efectúa las siguientes divisiones usando la Regla de Ruffini:

    a) $(3x^5+2x+1):(x+1)$
    b) $(x^5+x^2-3):(x+3)$
    c) $(5x^4-3x^3+2x-3):(x-1)$

26. Factoriza los siguientes polinomios:

    a) $42-x-x^2$
    b) $2x^2-x-1$
    c) $3x^2+10x+3$

27. Factoriza los siguientes polinomios:

    a) $3x^3-9x^2-30x$
    b) $2x^3+2x^2-24x$
    c) x^3-x^2-12x

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

28. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

    a) $\ln x=-3$
    b) $\log_2 x=5$
    c) $\log_x 9=2$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

    a) $-\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2\ln x = \ln 32$

    b) $2\ln x - \ln(x-16) = 2$

    c) $-\ln x + \ln(2-x) = 0$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

    a) $2^x = 8$

    b) $2^{x+1} = 256$

    c) $5^{x+1} = 625$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

    a) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

    b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

    c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

32. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

    a) $3^{x+1} = 80$

    b) $2^x = 25$

    c) $7^x = 39$

33. Obtén explícitamente la expresión de y en función de t:

    a) $-\ln(20+y) = 3t - 2$

    b) $\dfrac{1}{3}\ln(1-y) = \ln t$

    c) $\ln(5-3y) = t - t^2$

34. Obtener explícitamente la expresión de y en función de t:

    a) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y}{2-y}\right) = t + 1$

    b) $\ln\left(\dfrac{y}{1-3y}\right) = t + 2$

    c) $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{y}{3-2y}\right) = 2t - 1$

35. Obtener explícitamente la expresión de y en función de t:

    a) $t\left(70 + 200e^{-y/2}\right) = 80$

    b) $20t + 15e^y = 30$

    c) $200 + 50e^{-y/20} = 150t$

Comportamiento de funciones polinómicas y racionales

36. Estudia el signo y el comportamiento en el infinito de los siguientes polinomios:

    a) $42 - x - x^2$

    b) $2x^2 - x - 1$

    c) $3x^2 + 10x + 3$

    d) $3x^3 - 9x^2 - 30x$

    e) $2x^3 + 2x^2 - 24x$

    f) $x^3 - x^2 - 12x$

37. Estudia el signo, las asíntotas verticales y el comportamiento en el infinito de las siguientes funciones racionales:

    a) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

    b) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

    c) $y = \dfrac{2x^2-8}{x^2-16}$

    d) $y = \dfrac{2x}{2-x^2}$

    e) $y = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

    f) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

    g) $y = \ln(x^2+2x)$

Funciones trigonométricas e hiperbólicas

38. Utilizando las relaciones
    $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$,
    $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$,
    probar las siguientes igualdades:

    a) $\operatorname{sen}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$

    b) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

    c) $\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

    d) $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$

    e) $\operatorname{sen}\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha)$

    f) $\cos\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$

39. Determina la amplitud y el período de las siguientes funciones periódicas:

    a) $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(2\pi x)$

    b) $f(x) = -\dfrac{3}{2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$

    c) $f(x) = 7\cos(2x)$

    d) $f(x) = -3\cos\left(\dfrac{\pi x}{5}\right)$

40. Comprueba que:

    a) $\mathrm{sh}(-x) = -\,\mathrm{sh}(x)$

    b) $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$

    c) $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$

    d) $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$

    e) $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$

    f) $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$.

Determinación de parámetros

41. La temperatura de congelación del agua es 0°C o 32°F, mientras que su temperatura de ebullición es 100°C o 212°F. Utiliza esta información para determinar una relación lineal entre la temperatura en °F y la temperatura en °C. ¿Qué incremento de temperatura en °F corresponde con un incremento de temperatura de 1°C?

42. Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 73 dm de largo. A los 7 meses, cuando se destetan, las ballenas jóvenes tienen una sorprendente longitud de 162 dm. Sea L la longitud (en dm) de una ballena de t meses de edad. Suponiendo que es lineal, determina la función que expresa L en función de t. ¿Cuál es el incremento diario de la longitud? (1 mes= 30 días)

43. Se sabe que para un gas a presión constante, la relación entre su volumen V (en cm^3) y su temperatura T (en °C) está dada por $V = \alpha + \beta T$ para ciertas constantes α y β positivas. Determina los valores de α y β sabiendo que a 30°C el volumen es de 111 cm^3 y que a 90°C es de 133 cm^3.

44. Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y para niños. Para un determinado medicamento la dosis de adulto recomendada es de 100 mg. Determina (suponiendo que es lineal) una función que proporcione la dosis adecuada para un niño de edad t (en años), sabiendo que la dosis para un recién nacido es de 20 mg y que para un niño de 16 años coincide con la de un adulto.

45. Según la *ley de Monod*, la velocidad de crecimiento R de un organismo depende de la concentración x de determinado nutriente, según la relación
$$R(x) = \frac{ax}{k+x}$$
donde a y k son dos constantes positivas. Determina los valores de a y k sabiendo que la velocidad de crecimiento límite del organismo es $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 3.5$ y que, cuando la concentración del nutriente es $x = 10$, la velocidad de crecimiento es 2.

46. Se supone que el número de individuos de una población viene dado por $N(t) = \dfrac{at}{k+t}$ donde a y k son constantes positivas y t es el tiempo medido en años. Se estima que el tamaño límite de la población es $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 1.24\times 10^6$ y que en el instante $t = 5$ el número de individuos de la población es la mitad del tamaño límite. Utiliza esta información para calcular a y k.

47. El crecimiento de los peces se puede modelar mediante la función $L(x) = \lambda(1 - e^{-px}),\ x \geq 0$ donde $L(x)$ es la longitud a la edad x y λ y p son dos constantes positivas características de cada especie. Determina los valores de λ y p de una determinada especie sabiendo que la longitud límite es $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 18$ y que a la edad $x = 1$ la longitud de un pez de esa especie es $L = 6$.

48. Se sabe que el número de bacterias en una placa de Petri viene dada por $B(t) = B_0 e^{\lambda t}$ donde t mide el número de horas y B_0 y λ son dos constantes positivas. Si se estima que el número inicial de bacterias es 100 y que transcurridas 24 horas el número es 10000, determina los valores de B_0 y λ.

49. Se considera la ecuación de una onda sinusoidal que se propaga,

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\left[2\pi\Big(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\Big)\right],$$

donde t es el tiempo, A es la amplitud, λ es la longitud de onda y T es el período.

a) Probar que y es periódica en x con período λ y periódica en t con período T.

b) Probar que, para t fijado, y alcanza su máximo, su mínimo, y se anula, respectivamente, en los puntos

$$x_{max} = \frac{\lambda}{T}t + \lambda(k+1/4), \quad x_{min} = \frac{\lambda}{T}t + \lambda(k+3/4), \quad x_0 = \frac{\lambda}{T}t + \lambda k/2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

50. (Velocidad de una reacción química con dos reactivos) Consideramos la reacción química

$$A + B \longrightarrow AB$$

donde los reactivos moleculares A y B forman el producto molecular AB.

Sean a y b las concentraciones iniciales de A y B respectivamente, y sean $[A]$, $[B]$ y x las concentraciones respectivas de A, B y AB. Las concentraciones de A y B se relacionan con x mediante

$$[A] = a - x \quad \text{y} \quad [B] = b - x.$$

Según la ley de acción de masas, la velocidad de la reacción R satisface

$$R(x) = k\,[A][B] = k(a-x)(b-x)$$

donde $k > 0$ es un factor de proporcionalidad, propio de cada reacción.

a) Se sabe que, cuando la concentración es $x = 1$, la velocidad de la reacción es $R = 9$. Determinar $R(x)$.

b) Determinar el dominio apropiado para $R(x)$ y representarla gráficamente.

51. (Crecimiento en función de nutrientes) La función de crecimiento de Monod modela la velocidad de crecimiento de un organismo r en función de la concentración de nutrientes N:

$$r(N) = a\frac{N}{k+N}$$

siendo a y k constantes positivas.

a) ¿Qué ocurre cuano $N \to +\infty$? Explicar por qué a se denomina *nivel de saturación*.

b) Probar que k es la constante de semisaturación: Si $N = k$, entonces $r(N) = a/2$.

c) Supongamos $a = 5$, $k = 1$. Obtener la velocidad de crecimiento cuando se dobla la concentración de nutrientes desde $N = 0.1$ hasta $N = 0.2$. Comparar con lo que ocurre al doblar la concentración desde $N = 10$ hasta $N = 20$. Es lo que se conoce como *retorno en disminución*.

52. Una población de zorros fluctúa sinusoidalmente entre 340 y 460 con un período de 2 años. La población alcanzó su máximo en el año 2006. Escribir una expresión para el número de zorros dentro de t años.

53. Los isótopos radiactivos de ciertos elementos se desintegran, convirtiéndose en otros elementos. Este proceso se rige por la ley

$$N(t) = N_0\,e^{-\lambda t}$$

donde $N(t)$ es el número de isótopos presentes en el instante t; N_0 es el número de isótopos presentes inicialmente ($N_0 = N(0)$) y λ es la constante de desintegración del isótopo.

Se denomina *vida-media* (half-life) de un isótopo radiactivo al tiempo necesario para que una cantidad Q del mismo se desintegre a la mitad. Este parámetro no depende de la cantidad de isótopos presentes inicialmente.

El Calcio 45 C^{45} y el Fósforo 32 P^{32} son isótopos radiactivos, que desintegran un 4.732 % y un 0.42434 %, respectivamente, de su cantidad en un día. Determinar sus vidas medias.

54. La ecuación de Michaelis-Menten describe la velocidad inicial de una reacción química catalizada por una enzima: da la velocidad de la reacción v en función de la concentración del substrato c:

$$v = \frac{v_{max} c}{c + K},$$

siendo v_{max} la máxima velocidad a la que se puede producir la reacción (idealmente, con una concentración infinita de substrato) y K la constante de Michaelis-Menten.

a) Re-escribir la ecuación de Michaelis-Menten en términos de $y = 1/v$ (variable dependiente) y $x = 1/c$ (variable independiente), y probar que es una recta:

$$y = \frac{K}{v_{max}} x + \frac{1}{v_{max}}.$$

b) Para determinar K_m y v_{max} se efectúan dos mediciones de la velocidad inicial de reacción v a partir de la concentración del sustrato c. Explicar cómo se calculan K_m y v_{max} a partir de estas mediciones.