Cálculo de derivadas

1. Calcular la derivada de las funciones $\operatorname{arc\,sen}(x)$, $\arccos(x)$ y $\operatorname{arc\,tg}(x)$ utilizando la fórmula de la derivada de la función inversa.

2. Para cada una de las expresiones siguientes, calcula la derivada y' derivando implícitamente:

   a) $x^3 - y^3 = 4xy$
   b) $\operatorname{tg} y = x$
   c) $y^3 + y^2 = \operatorname{sen} x$
   d) $\operatorname{sen} y = xy$

3. Para cada una de las funciones siguientes, calcula su derivada utilizando la derivada logarítmica:

   a) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)(2x+7)}$
   b) $f(x) = \dfrac{e^x(x^2-1)}{\sqrt{6x-2}}$
   c) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x^2+3}{x+5}}$
   d) $f(x) = \sqrt[x]{x}$
   e) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$

4. Comprobar que:

   a) Si $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, entonces $f'(x) = \cosh(x)$.
   b) Si $f(x) = \cosh(x)$, entonces $f'(x) = \operatorname{senh}(x)$.
   c) Si $f(x) = \operatorname{tgh}(x)$, entonces $f'(x) = \operatorname{sech}^2(x)$.

Recta tangente

5. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto que se indica en cada caso:

   a) $f(x) = e^{-x^2}$, en $x = 1$
   b) $f(x) = \ln(x+1)$, en $x = 2$
   c) $f(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x + 1$, en $x = 1$
   d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, en $x = 4$
   e) $f(x) = \ln(\operatorname{tg}(2x))$, en $x = \pi/8$
   f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^3(5x)}$ en $x = \pi/6$
   g) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ en $x = \pi$

6. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva definida implícitamente por la ecuación $\cos(xy) = x^2 + y^2$ en el punto $(0.8, 0.52)$:

Crecimiento/decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos

7. Estudia los intervalos de crecimiento / decrecimiento y de concavidad / convexidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+3}$
   b) $f(x) = \ln(x^2+1)$
   c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$
   d) $f(x) = \ln(x^2-4)$
   e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

8. Estudia los máximos y mínimos (relativos y absolutos) de las siguientes funciones en sus dominios de definición:

   a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$
   b) $f(x) = x^3\, e^x$
   c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$
   d) $f(x) = x^2\, e^x$
   e) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$

9. Estudia los máximos y mínimos (relativos y absolutos) de las siguientes funciones en el intervalo que se indica en cada caso:

   a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$ en $[-5, 0]$
   b) $f(x) = x^3\, e^x$ en $[-4, 1]$
   c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$ en $[1/2, 3]$
   d) $f(x) = x^2\, e^x$ en $[-1, 3]$
   e) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$ en $[0, 10]$

Representación gráfica de funciones

10. (Asíntotas horizontales y verticales) Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando previamente su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento/decrecimiento y de convexidad/concavidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión:

    a) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

    b) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

    c) $y = \dfrac{2x^2-8}{x^2-16}$

    d) $y = \dfrac{2x}{2-x^2}$

    e) $y = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

11. (Asíntotas oblicuas) Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando previamente su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento/decrecimiento y de convexidad/concavidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión:

    a) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

    b) $y = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$

    c) $y = \dfrac{x(x^2-4)}{x^2-1}$

    d) $y = \dfrac{x^2-2x-8}{x}$

    e) $y = \dfrac{3x^2-x+4}{2(x-1)}$

12. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando previamente su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento/decrecimiento y de convexidad/concavidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión:

    a) $y = \ln(x^2+4)$

    b) $y = \ln(x^2-1)$

    c) $y = x^2e^x$

    d) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

    e) $y = \dfrac{e^x}{1+x}$

Polinomio de Taylor

13. Determinar los polinomios de Taylor de grado n para las funciones siguientes en $x = 0$. Determinar también la expresión del error.

    a) $\operatorname{sen} x$

    b) $\cos x$

    c) $\ln(1-x)$

14. Aproximar las funciones siguientes mediante su polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 0$. Determinar la expresión del error.

    a) $\operatorname{tg} x$

    b) $\operatorname{arc\,tg} x$

15. Aproximar la función logarítmica mediante su polinomio de Taylor de grado 2 en $x = e$. Utilizar este polinomio para calcular de forma aproximada $\ln 4$. Estimar el error cometido.

16. Se ha determinado que la tasa de eliminación del alcohol en mamífereos depende del peso. Si medimos la tasa de eliminación V en gramos por hora y el peso w en kilogramos, la relación funcional entre ambos es
$$V = 0.45\, w^{0.71}.$$
    Aproximar linealmente $V(w)$ cerca de $w = 80$ y utilizar esta aproximación para calcular la tasa de eliminación de una persona de 70 kg. Estimar el error cometido mediante el resto de la fórmula de Taylor y compararlo con el verdadero error.

Optimización

17. El número N de bacterias en un determinado cultivo viene dado, en función del tiempo t expresado en minutos por la función
$$N(t) = 500 + 50t - t^2 \quad \text{para } t \in [0, 35]$$
¿En qué instante el número de bacterias es máximo? ¿Y mínimo? Esbozar la gráfica de la función $N(t)$.

18. La virulencia de cierta bacteria se puede medir en una escala de 0 a 50 y viene dada por la siguiente función
$$V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$$
donde t es el tiempo, medido en horas, transcurrido desde el comienzo del estudio. Analizar los períodos de tiempo en los que la virulencia crece o decrece. Calcular los instantes, en las 6 primeras horas, en que la virulencia es máxima y mínima. Esbozar la gráfica de la función en el intervalo $[0, 6]$.

19. Una hora después de tomar x mg de un medicamento, la temperatura corporal T de un paciente viene dada por la ecuación
$$T(x) = T_0 - 0.00625\, x^2\, (18 - x)$$
donde T_0 es la temperatura inicial del cuerpo. Determinar la dosis de medicamento que produce la mayor bajada de temperatura, y la magnitud de esta bajada.

20. La velocidad de crecimiento de una determinada población se puede expresar como
$$f(N) = N\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^2\right)$$
donde N es el tamaño de la población, K es una constante positiva que indica la capacidad de alojamiento del ecosistema. Calcular para qué tamaño de la población es máxima la velocidad de crecimiento.

21. Los gusanos de yema de abeto son una plaga importante que desfolia los pinos de Canadá. Sus depredadores son los pájaros. Un modelo que da la velocidad de depredación es
$$f(x) = \frac{ax}{k + x^2}$$
siendo x la densidad de gusanos, y a y k dos constantes positivas que dependen de las circunstancias de cada caso. ¿Para qué cantidad de gusanos es máxima la velocidad de depredación?

22. Sea $f(N)$ la cosecha de una explotación agrícola de maíz en función del nivel de nitrógeno en el suelo, N. Una posibilidad viene dada por
$$f(N) = \frac{N}{1 + N^2}.$$
Calcula el nivel de nitrógeno que maximiza la cosecha.

23. Calcular la longitud que deben tener los lados de un triángulo isósceles de 24 cm de perímetro para que el área de dicho triángulo sea máxima.

24. En un terreno semicircular de radio 1 se desea colocar una zona rectangular de juegos. ¿Qué dimensiones debe tener para que el área de recreo sea máxima?

25. Se ha estudiado que ciertos animales efectúan sus desplazamientos tratando de minimizar su gasto de energía. Para un cierto tipo de peces migratorios que nadan a contracorriente, se tiene la siguiente expresión para la energía necesaria para recorrer una distancia d en función de su velocidad de desplazamiento:
$$E(v) = \frac{dv^3}{v - u}, \quad v > u$$
donde u es la velocidad de la corriente y se considera constante. Encontrar el valor de v que hace mínima la energía consumida en el desplazamiento. Esbozar la gráfica de $E(v)$ para $v > u$.

26. Un productor dispone de 600 hectáreas para sembrar y sabe que la ganancia total G (en euros) que obtendrá de su producción depende del número x de hectáreas sembradas, viniendo dada por la siguiente expresión:

$$G(x) = 2000x - 2x^2$$

Calcula cuántas hectáreas debería sembrar para obtener la máxima ganancia posible. ¿Cuánto ganaría si sembrara las 600 hectáreas de las que dispone?