1. Calcular las siguientes integrales inmediatas.

   a) $\int (\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x^2} + 3\sqrt[3]{x})\, dx$

   b) $\int (\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}})\, dx$

   c) $\int x^{1/3}\,(6 + 2\sqrt{x})^2\, dx$

   d) $\int \sqrt{2x+3}\, dx$

   e) $\int \frac{1}{\cos^2(7x)}\, dx$

   f) $\int \operatorname{sen}^2 x\, \cos x\, dx$

   g) $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx$

   h) $\int \operatorname{tg} x\, dx$

   i) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$

   j) $\int \frac{1}{1+2x^2}\, dx$

   k) $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$

   l) $\int \frac{e^x}{3+4e^x}\, dx$

   m) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

   n) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$

   ñ) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\, dx$

2. Calcular por partes las siguientes integrales.

   a) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

   b) $\int \ln x\, dx$

   c) $\int x^2 \ln x\, dx$

   d) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$

   e) $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

   f) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$

   g) $\int x^2 e^{-x}\, dx$

   h) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

   i) $\int x \ln(1+x^2)\, dx$

3. Calcular las siguientes integrales racionales

   a) $\int \frac{3x}{x^2+1}\, dx$

   b) $\int \frac{1}{x^2-2x+1}\, dx$

   c) $\int \frac{2x^2-3x+2}{2x-1}\, dx$

   d) $\int \frac{4}{3x^2+4}\, dx$

   e) $\int \frac{3x-1}{x^2+x}\, dx$

   f) $\int \frac{3x+1}{x^3-x}\, dx$

   g) $\int \frac{1}{5-x^2}\, dx$

   h) $\int \frac{1-4x}{2x^3-x^2-x}\, dx$

   i) $\int \frac{x}{(2+3x)^2}\, dx$

   j) $\int \frac{2x-1}{x(x+2)^2}\, dx$

   k) $\int \frac{9}{x^3-6x^2+9x}\, dx$

4. Calcular por cambio de variable las siguientes integrales

   a) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

   b) $\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\, dx$

   c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

   d) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$

   e) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\, dx$

   f) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$

   g) $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x}\, dx$

   h) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\, dx$

   i) $\int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$

   j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-9x)}$

   k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

l) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

5. Calcular las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_0^1 (1+x-\operatorname{tg} x)\,dx$
   b) $\displaystyle\int_1^e \frac{e^{(2+\ln x)}}{x}\,dx$
   c) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$
   d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$
   e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)}\,dx$
   f) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\,dx$
   g) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos(2x)dx$
   h) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$
   i) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x+1)e^{2x}\,dx$

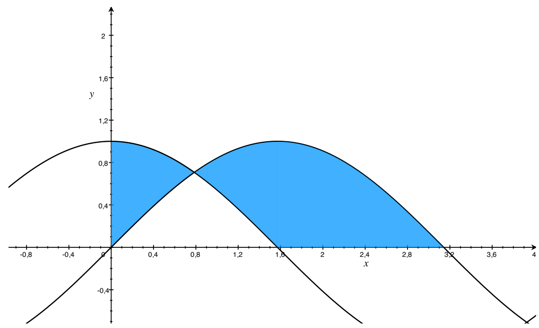
6. Para cada una de las funciones siguientes, estudiar su signo, calcular una primitiva y calcular el área de la región encerrada entre la gráfica de la función, el eje OX y las rectas verticales que se indican en cada caso:

   a) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$, $\quad x=-1,\quad x=0$
   b) $y=x\ln(2x)$, $\quad x=1,\quad x=3$
   c) $y=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$, $\quad x=0,\quad x=1$
   d) $y=\dfrac{1}{x(\ln x+1)^2}$, $\quad x=1,\quad x=2$
   e) $y=\dfrac{1}{1-e^{-x}}$, $\quad x=1,\quad x=2$
   f) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $\quad x=1/2,\quad x=2$
   g) $y=x\operatorname{sen}(2x)$, $\quad x=0,\quad x=\pi$
   h) $y=x\cos x$, $\quad x=0,\quad x=\pi$
   i) $y=(2x-1)e^x$, $\quad x=0,\quad x=2$
   j) $y=x\ln(x)$, $\quad x=1/2,\quad x=2$

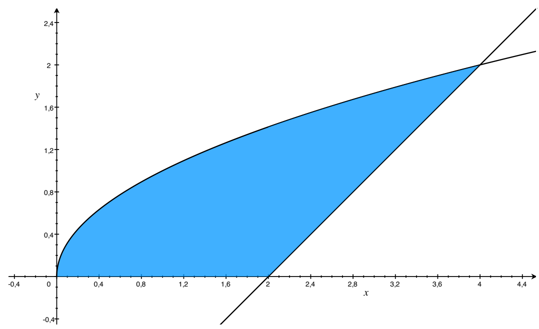
7. Para cada uno de los casos siguientes, calcular los puntos de corte de las curvas que se indican y calcular el área de la región del plano encerrada entre ellas.

   a) $y=6x-x^2,\quad y=x^2-2x$
   b) $y=2\sqrt{x},\quad y=x$
   c) $y=x^2-2x,\quad y=-x+2$
   d) $y=x^2-2x-13,\quad y=-x^2+2x+3$
   e) $y=e^x,\quad y=e^{-x}$ y la recta vertical $x=1$
   f) $y=\dfrac{2}{1+x^2},\quad y=x^2$ y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$
   g) $y=\dfrac{2x}{1+x},\quad y=\dfrac{x}{2}$ y la recta vertical $x=4$

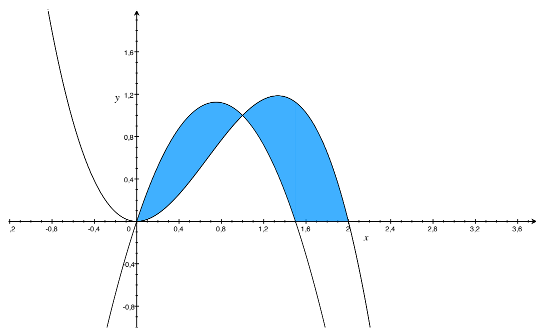
8. Calcular el área de la región mostrada en la figura, sabiendo que una de las curvas es $y=\operatorname{sen} x$ y la otra es $y=\cos x$.



9. Calcular el área de la región mostrada en la figura, sabiendo que una de las curvas es $y=\sqrt{x}$.



10. Calcular el área de la región mostrada en la figura, sabiendo que una de las curvas es $y=-x^3+2x^2$ y la otra es $y=3x-2x^2$.



11. Calcular las longitudes de los arcos de curva que se indican:

    a) Semi-circunferencia de radio r.

    b) Arco de la parábola $y = x^2$ comprendido entre $x = -1$ y $x = 1$.

    c) Arco de la curva $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 3$.

12. Una proteína se enrolla siguiendo una curva espiral de ecuación $x = t \operatorname{sen} t$, $y = t \cos t$ para $t \in [0, \pi]$. x e y se miden en nm (nanometros). Determinar la longitud de la proteína.

13. Un cable que cuelga suspendido de sus dos extremos, situados en los puntos $x = -M$ y $x = M$, adopta la forma de una curva denominada catenaria, que viene dada por

$$f(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$$

siendo a una constante positiva. Calcular la longitud total de cable necesario para cubrir una distancia de 96 Km, suponiendo que los puntos de soporte están separados por 60 m y que $a = 0.03$.

14. Calcular los volúmenes de revolución que se indican:

    a) Esfera de radio r.

    b) Sólido engendrado por la rotación alrrededor del eje OX del triángulo delimitado por las rectas $y = x$, $y = 2 - x$ y el eje OX.

    c) Sólido engendrado por la curva $y = \operatorname{sen} x$, $x \in [0, \pi/2]$ al girar en torno al eje OX .

    d) Sólido engendrado por la curva $y = x^2$, $x \in [0, L]$ al girar en torno al eje OX .

15. Calcular el área de la región plana encerrada entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = \dfrac{x}{2}$. Calcular también el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región anterior en torno al eje OX.

16. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = \cosh(x)$ alrededor del eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

17. Hallar la superficie de una esfera de radio r.

18. El área $A(t)$ de una herida en curación, medida en cm^2, cambia a una tasa de $A'(t) = \dfrac{-4}{(t+1)^3}$, donde t representa el tiempo medido en días. Suponiendo que el área inicial de la herida era de $2\,cm^2$, calcular la superficie de la misma al cabo de 10 días.

19. En una determinada población de 100.000 mujeres, la incidencia de una forma particular de cáncer de cólon viene dada por

$$R(t) = 7 \times 10^{-10}\, t^6$$

donde t representa la edad en años.

Es decir, la incidencia de la enfermedad en mujeres de, por ejemplo, 60 años, sería de

$$R(60) = 7 \times 10^{-10}\, 60^6 = 32.65$$

casos. Calcular el número total de casos detectados:

    a) en mujeres de edad inferior a 50 años.
    b) en mujeres de edades entre 50 y 70 años.

20. Una población de lagartos es inicialmente de 100 individuos y crece a una tasa de

$$p'(t) = \sqrt{9 + 2t}$$

donde t representa el tiempo medido en años. Calcular el tamaño de la población transcurridos 10 años.

21. El tiempo de supervivencia de náufragos en agua depende de la temperatura del agua y viene dado (aproximadamente) por

$$t(T) = \frac{0.2}{0.1 - 0.004\,T} \quad \text{horas}$$

donde T es la temperatura de la superficie del agua (grados Celsius). Determinar el tiempo medio de supervivencia en aguas a temperaturas entre 10°C y 15°C.

22. De acuerdo con las observaciones, la cantidad de pájaros de cierta especia con migración estacional que llegan y abandonan el Parque de Doñana a partir del mes de octubre se puede representar por

$$p(t) = 12t - 3t^2 \quad \text{(miles de pájaros)}$$

donde t es el tiempo, medido en meses a partir del primero de octubre. Valores de $p(t)$ positivos indican que llegan y valores negativos indican que lo abandonan. Suponiendo que antes de octubre no hubiera ningún pájaro de dicha especie en el parque, determinar:

a) el número de pájaros presentes en cada instante posterior,
b) en qué momento todos los pájaros han abandonado el parque,
c) en qué momento el número de pájaros presentes en el parque es máximo,
d) el número medio de pájaros durante los cuatro primeros meses.

23. Se estima que la biomasa de cierta zona boscosa viene dada, en función del tiempo (días), por la función

$$B(t) = \frac{90}{\sqrt{\dfrac{15}{t+1} + \dfrac{t}{5}}} \qquad \text{(T/Ha)}, \quad t \in [0, 100]$$

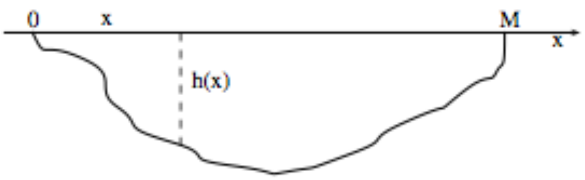
Aproxima la biomasa media (promedio integral) durante ese periodo de tiempo

a) utilizando la fórmula de los rectángulos (usando el punto de la izquierda) y
b) utilizando la fórmula de los trapecios,

usando en ambos casos 5 subintervalos de igual longitud y compara con el valor 30.756, que es una buena aproximación.

Nota: Usa calculadora, redondeando a la diezmilésima.

24. Cuando se estudia el flujo del agua en un canal abierto, como por ejemplo un río, la cantidad de agua que pasa a través de una sección del mismo por segundo se denomina descarga del río y tiene cierto interés.



Para calcularla se utiliza la fórmula siguiente:

$$\text{Descarga } = Q = \int_0^M v(x)\, h(x)\, dx$$

donde h representa la profundidad del río y v representa la velocidad media del agua en el punto de la sección transversal que dista una distancia x de una de la orillas (ver dibujo). Los valores de h (metros) y v (metros por segundo) sólo se conocen en algunos puntos de la sección.

Aproximar el valor de la descarga mediante la fórmula de los rectángulos utilizando los valores de la tabla adjunta.

x	h	v
0	0,00	0,000
1	0,28	0,172
3	0,76	0,213
5	1,34	0,230
7	1,57	0,256
9	1,42	0,241
11	1,21	0,206
13	0,83	0,187
15	0,42	0,116
16	0,00	0,000

(Tomado de *C. Neuhauser, Matemáticas para Ciencias*).

25. Tras un estudio, se dispone de unos datos de campo sobre el número de peces de una cierta especie que llegan a un lago. Las mediciones se hicieron en 13 días distintos repartidos de forma irregular en un período de 4 meses y muestran el número de peces que acceden al lago a lo largo de cada uno de esos días. Inicialmente, la especie estudiada no estaba presente en el lago. Se desea determinar, utilizando la fórmula de los trapecios:

a) El número total de peces que llegaron al lago durante los primeros 2 meses del estudio.
b) Suponiendo que los peces que llegan al lago permanecen en él, determinar el promedio de peces presentes en el lago durante los 4 meses del estudio.

día	peces
1	2
7	66
10	108
23	221
50	421
55	456
61	457
83	455
90	417
100	318
112	153
117	51
120	9