Ejercicios Tema 4

1. Obtener, si es posible, las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx$

2. Dado el número complejo $z_n = a_n - ib_n$, denotando su módulo como F_n, su argumento como α_n para $n = 1, 2, 3, ...$ y $F_0 = a_0/2$, comprobar que

$$F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x + \alpha_n\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right).$$

3. Obtener la serie de Fourier asociada a la función definida en $[0, 2\pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

   y que es periódica de periodo 2π en $\mathbb{R}$. Escribir las tres primeras sumas parciales.

4. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en $\mathbb{R}$, periódica de periodo 2π, definida por $f(x) = x^2$ en $-\pi \leq x \leq \pi$. Escribir las cuatro primeras sumas parciales.

5. Encontrar la serie de Fourier en senos de la siguiente función definida en $[0, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi/2) \\ \pi - x & \text{si } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

6. Obtener la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-|x|}$

7. Obtener la transformada de Fourier de $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$ para a una constante positiva.

8. Obtener la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$