1. Determinar el dominio de definición de las funciones siguientes y representarlo en el plano OXY.

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y}$

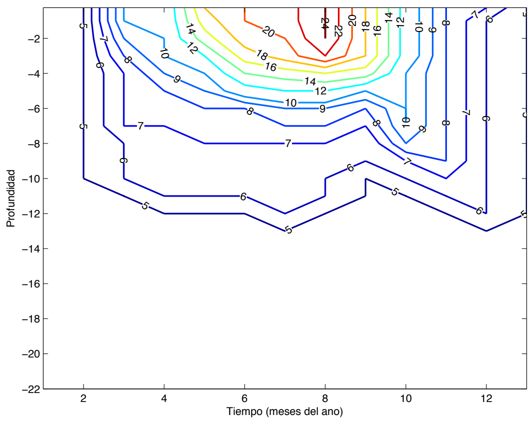
   b) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

   c) $f(x,y) = \ln(y-x^2)$

   d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

2. Para las mismas funciones del ejercicio anterior (excepto la primera), escribir la ecuación de una curva de nivel genérica y determinar su forma geométrica.

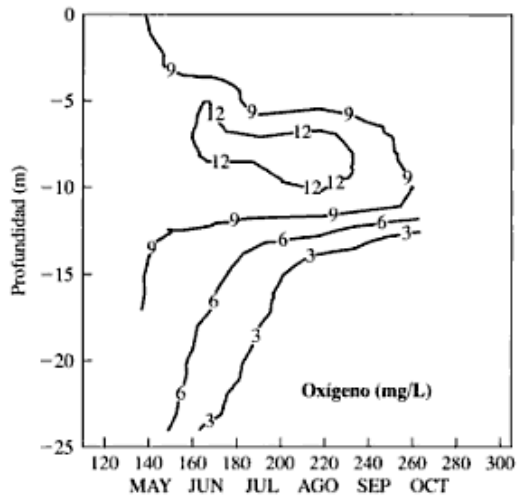
3. La gráfica de la figura siguiente muestra las isotermas de un lago.



   a) Utilizando esta gráfica, dibujar el perfil de temperatura en el mes de febrero y en el mes de julio en función de la profundidad.

   b) Confirma, sobre la gráfica que el lago es **homeotérmico** en el mes de febrero, esto es, tiene la misma temperatura desde la superficie hasta el fondo y que, en cambio, está estratificado en julio, esto es, tiene una capa caliente en la superficie (denominada **epilimnio**), seguida de una zona donde la temperatura cambia rápidamente (denominada **metalimnio**) y finalmente una capa fría en el fondo (denominada **hipolimnio**).

4. La figura siguiente muestra la concentración de oxígeno en un Lago de Minessotta. La pulga de agua *Daphnia* sólo puede sobrevivir si la concentración de oxígeno es superior a 3 mg/l. Si se desea tomar muestras de la población de *Daphnia* en el lago los días 180, 200 y 220, ¿por debajo de qué profundidad es altamente probable que no se encuentre ninguna?



5. Calcular los siguientes límites

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2xy-3}{x^2+y^2+1}$

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{2xy^2+y}{2xy+3y}$

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \left(4xy^2 - \frac{x+1}{y}\right)$

6. Demostrar que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y}$$

   no existe. (Sugerencia: calcular los límites sobre las trayectorias de los ejes de coordenadas OX y OY).

7. Demostrar que no existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{x^3+y^6}$$

   calculando el límite sobre las trayectorias $y=3x$ e $y=\sqrt{x}$.

8. Calcular las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y) = e^{\sqrt{x+y}}$

   b) $f(x,y) = \ln(3x^2-y)$

   c) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(xy)$

d) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x+y}$

e) $f(x,y) = \operatorname{tg}(x-y)$

9. Para cada una de las funciones siguientes, calcular sus derivadas parciales en el punto que se indica en cada caso, interpretar los resultados en términos del crecimiento y decrecimiento de la función en dicho punto y dibujar, en el plano OXY, el vector gradiente en dicho punto.

   a) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$; punto $= (1,1)$

   b) $f(x,y) = 1 + x^2y$; punto $= (-2,1)$

   c) $f(x,y) = 2x^3 - 3yx$; punto $= (1,2)$

10. Calcular el vector gradiente de las siguientes funciones.

    a) $f(x,y) = \sqrt{x^3 - 3xy}$

    b) $f(x,y) = x\left(x^2 - y^2\right)^{2/3}$

    c) $f(x,y) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

    d) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

11. La *quimiotaxis* es el movimiento de los organismos dirigido por un gradiente de concentración de alguna sustancia, es decir, en la dirección en que la concentración aumenta con más rapidez. Por ejemplo, las amebas unicelulares del moho del cieno *Dictyoselium discoideum* se mueven según el gradiente de concentración de una sustancia química denominada adenosina monofosfato (AMP cíclico).

    Suponiendo que la concentración de AMP cíclico en el punto (x,y) del plano es

    $$f(x,y) = \frac{4}{|x| + |y| + 1},$$

    y que una ameba está situada en el punto $(3,1)$, determinar en qué dirección se moverá si su movimiento está dirigido por la quimiotaxis. (De *Matemáticas para Ciencias*, C. Neuhauser, Ed. Pearson-Prentice Hall).

12. Un cierto organismo se mueve sobre una superficie inclinada dada por la ecuación $z = x^2 - y^2$. Suponiendo que, en cada punto, se desplaza siguiendo la dirección de máxima pendiente decreciente, determinar en qué dirección se moverá el organismo si se encuentra en el punto de coordenadas $(2,3,-5)$. (De *Matemáticas para Ciencias*, C. Neuhauser, Ed. Pearson-Prentice Hall).

13. Para cada una de las funciones siguientes y el punto que se indica en cada caso, indicar en qué dirección crece más rapidamente la función.

    a) $f(x,y) = 3xy - x^2$; punto $= (-1,1)$

    b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$; punto $= (5,3)$

    c) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + xy\right)$; punto $= (1,1)$

14. Para cada una de las funciones siguientes, escribir la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto que se indica en cada caso.

    a) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$; punto $= (0,0)$

    b) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; punto $= (1,1)$

    c) $f(x,y) = \cos(x+y)$; punto $= (0,0)$

    d) $f(x,y) = y^2x + x^2y$; punto $= (1,1)$

15. Calcular una aproximación lineal de la función

    $$f(x,y) = e^{x+y} \quad \text{en } (0,0)$$

    Utilizar dicha función lineal para aproximar el valor de f en el punto $(0.1, 0.05)$. Utilizando una calculadora, calcular el error cometido.

16. Calcular una aproximación lineal de la función

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 - 3y\right) \quad \text{en } (1,0)$$

Utilizar dicha función lineal para aproximar el valor de f en el punto $(1.1, 0.1)$. Utilizando una calculadora, calcular el error cometido.

17. Calcular una aproximación lineal de la función

$$f(x,y) = \operatorname{tg}\left(2x - 3y^2\right) \quad \text{en } (0,0)$$

Utilizar dicha función lineal para aproximar el valor de f en el punto $(0.03, 0.05)$. Utilizando una calculadora, calcular el error cometido.

18. Calcular y clasificar los puntos críticos de las funciones siguientes

   a) $f(x,y) = xy(4 - x - y)$.

   b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 1$.

   c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4$.