Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $y'y = 3$

2) $y' = 2y(t+1)$

3) $yy' + (1+y^2)\,\mathrm{sen}\,t = 0$

4) $y' = e^{t+y}$

5) $y' = \sqrt{1-y^2}$

6) $y' + t\,y^2 = t$

7) $y' = 4y - y^2$

8) $y' = \frac{1}{t}(y^2+2y)$

9) $2y' = (y^2-2y)(2+t)$

10) $y' = t + 2y$

11) $y' = 1 + \frac{1}{t}y$

12) $y' = 2y(t+1) + t + 1$

13) $y' - \frac{2}{t}y = t$

14) $y' - 5y = -\frac{5}{2}t$

15) $y' + 2y = 3te^{-t}$

Calcular la solución de los siguientes problemas de valores iniciales:

16) $y' = 3y - 1, \quad y(0) = 0$

17) $y' = -t^2y^2, \quad y(1) = 3$

18) $yy' = t + 1, \quad y(0) = -1$

19) $(4-t^2)y' + t^2y = 0, \quad y(0) = 3$

20) $(2t-1)y' + 4t^2y = 0, \quad y(-1) = 1$

21) $y' = y^2 - y^2t, \quad y(0) = 1$

22) $y' - y\,\mathrm{tg}\,t = \frac{1}{\cos t}, \quad y(0) = 0$

23) $t^2y' + 2ty = 2t^3, \quad y(1) = 1$

24) $(1+e^t)y' + e^ty = 2t + 1, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

25) $y' + \frac{1}{t(t+1)}y = t + 1, \quad y(2) = 0$

26) $y' = y\,\cos t + \mathrm{sen}\,t\,\cos t, \quad y(\pi) = -1$

27) $(1+t)y' + y = (1+t)^3, \quad y(0) = 0$

28) $y' = \frac{2(1+y^2)}{4+t^2}, \quad y(0) = 0$

29) $y' = y + te^{-t}, \quad y(0) = \frac{3}{4}$

30) $2y' = y^2(1+t) - y - ty, \quad y(1) = 1$

Calcular la solución de los siguientes problemas de valor inicial para el dato inicial que se indica en cada caso. Una vez calculada, hallar el valor de t para el cual la solución verifica $y(t) = y_1$, siendo y_1 el que se indica en cada caso.

31) $y' = 3y - y^2, \quad y(0) = 1; \quad y_1 = 2$

32) $y' = y^2 - 3y + 2, \quad y(0) = 3; \quad y_1 = 7$

33) $(t+1)^2y' = -y^2, \quad y(0) = 1; \quad y_1 = \frac{3}{5}$

34) $2(1-t^2)yy' = -2t, \quad y(0) = 1; \quad y_1 = \frac{4}{5}$

35) $(1+\mathrm{sen}\,t)^2y' = 2y^2\cos t$, $y(0) = 1$; $y_1 = 6$

Aproximar linealmente los siguientes problemas de valores iniciales y calcular la solución del problema aproximado.

36) $y' = 3y - y^2 + t + 1, \quad y(0) = 0$

37) $y' = 2e^{y/4} - \frac{1}{2}t^2y, \quad y(0) = 1$

38) $y' = \mathrm{sen}\,y + (y+1)e^y + t, \quad y(0) = 0$

Calcular las soluciones de equilibrio de las siguientes ecuaciones y estudiar su estabilidad

39) $y' = \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

40) $y' = k(1-y)(y+2)$, $k > 0$

41) $y' = y(1-y) - y^2$

42) $y' = ry(y-a)\left(1 - \frac{y}{k}\right), \quad r, k, a, > 0$

43) $y' = y\left(1 - \frac{y}{50}\right) - \frac{9y}{5+y}$

44) De un determinado cultivo de bacterias en un recipiente se sabe que la tasa de crecimiento de la población es directamente proporcional al número de bacterias existentes, duplicándose la población cada 3 horas. Calcular el número de bacterias que habrá al cabo de 11 horas si inicialmente se introducen 2.5 millones de ellas.

45) El Carbono-14 (C_{14}), sustancia radioactiva presente en ciertos fósiles, se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Su *vida media* (más correctamente *semi-vida*, tiempo que tarda en desintegrarse a la mitad cualquier cantidad inicial) es de 5750 años. Averiguar la edad de un hueso fosilizado que contiene 1/1000 de la cantidad original de C_{14}.

46) Un acuario contiene inicialmente 60 L de agua. En un momento dado, comienza a entrar al acuario, a razón de 2 L/min, agua salada que contiene 20 g/L de sal y la solución, perfectamente mezclada, sale del acuario a la misma velocidad. Se pide:

   a) Calcular la cantidad de sal que hay en el acuario en cada instante.

   b) En este acuario se van a soltar peces que necesitan vivir a una concentración de sal de 15 g/L. ¿En qué momento se alcanza dicha concentración?

47) En una habitación que contiene 300 m^3 de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado ($t = 0$) algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de 3 m^3/h, conteniendo una concentración de 0.04 g/m^3 de monóxido de carbono (CO). Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el aire mezclado con humo a la misma velocidad. Se pide:

   a) Establecer y resolver la ecuación diferencial para la cantidad de CO, $y(t)$, (en gramos) en la habitación.

   b) ¿Cuándo debería abandonar una persona prudente la fiesta considerando que el CO comienza a ser peligroso con una concentración superior a 0.0002 g/m^3?

48) La ley de enfriamiento de Newton afirma que el ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del ambiente que lo rodea y la temperatura del objeto. Si una habitación se mantiene a temperatura constante de 21 °C y un objeto que estaba a 176 °C pasa a 65 °C en 45 minutos, ¿qué tiempo se necesita para que el objeto adquiera una temperatura de 26 °C?

49) Un recipiente con agua hirviendo (100°C) se retira del fuego en el instante $t = 0$ y se deja enfriar en una habitación grande. Sabiendo que pasados 5 minutos la temperatura del agua se ha enfriado hasta 80°C y que pasados otros 5 minutos más la temperatura es de 65°C, determinar a qué temperatura está la habitación y determinar la constante de proporcionalidad.

50) En un campus universitario que tiene 1000 estudiantes hay un único estudiante portador del virus de la gripe. Sea $y(t)$ el número de estudiantes contagiados en el día t. Si la velocidad con la que el virus se propaga es proporcional al producto entre el número de estudiantes contagiados y el número de estudiantes no contagiados, se pide:

   a) Determinar el número de personas enfermas en el día t si se sabe que pasados 4 días hay 50 enfermos.

   b) Calcular cuándo habrá 500 estudiantes enfermos.

   c) Si los estudiantes enfermos no se tratan con medicamentos, ¿qué número de enfermos habrá cuando pase mucho tiempo? ¿Llegará a desaparecer la enfermedad?

51) La dinámica de una determinada población viene descrita por la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y(1-y)(y-3),$$

donde $y(t)$ denota el número de individuos (en miles) que hay en el hábitat en el instante t.

a) Determina los puntos de equilibrio de la ecuación anterior y su estabilidad.

b) Interpreta los resultados obtenidos en el apartado anterior en términos de la dinámica de la población.

52) La dinámica de una determinada población viene descrita por la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y\left(2 - \frac{3}{1+y}\right),$$

donde $y(t)$ denota el número de individuos (en miles) que hay en el hábitat en el instante t.

a) Determina los puntos de equilibrio de la ecuación anterior y su estabilidad.

b) Interpreta los resultados obtenidos en el apartado anterior en términos de la dinámica de la población.

53) Se supone que la cantidad de herbívoros en una zona de la sabana africana crece con velocidad constante igual a 10 por año, y que al comienzo del estudio hay 100 de estos animales. Su presencia hace disminuir la cantidad de hierba en la zona, siendo la velocidad de destrucción proporcional a la suma de la cantidad de hierba (en Tm) y del número de herbívoros. Se pide:

a) Establecer y resolver la ecuación diferencial para el número de herbívoros.

b) Establecer y resolver la ecuación diferencial para la cantidad de hierba.

c) Sabiendo que al inicio había 300 Tm de hierba y que la constante de proporcionalidad es -1, calcular la cantidad de hierba que habrá al cabo de 1 año. ¿Llega a desaparecer la hierba?

54) Acabada la cosecha de trigo en cierta localidad, un propietario llena su granero con g_0 Kilos de trigo. Alrededor del granero vive una especie de roedores que se alimenta del trigo almacenado.

Un estudio realizado sobre el número de roedores, $r(t)$, muestra que esta población aumenta según una ley exponencial, es decir, con una velocidad proporcional al número de roedores de la población. En el momento del almacenamiento del grano había r_0 roedores, y, dos meses después, dicho número se había duplicado.

Igualmente se ha concluido que el trigo decrece a un ritmo de 1 Kilo por roedor y mes. Se pide:

a) Escribir y resolver la ecuación diferencial para la cantidad de roedores en cada instante t.

b) Escribir y resolver la ecuación diferencial para la cantidad de trigo en cada instante t.

c) Si $r_0 = 4$ y $g_0 = 1000$, ¿cuántos meses tardarán los roedores en consumir la cuarta parte de la cantidad de trigo inicial?