Capítulo 1

Estabilidad de Sistemas Lineales y Sistemas Lineales Perturbados

Este capítulo es el primero dentro del bloque dedicado al estudio de la *estabilidad* de ecuaciones o sistemas diferenciales ordinarios. En concreto, dedicaremos este primer capítulo al estudio de la estabilidad de las ecuaciones y sistemas más sencillos: los sistemas lineales y los sistemas lineales perturbados.

1.1. Introducción. Repaso de resultados conocidos

La asignatura **Amplicación de Ecuaciones Diferenciales** es una asignatura obligatoria del módulo **Ecuaciones Diferenciales** que se imparte en el primer cuatrimestre del tercer curso del Grado en Matemáticas. Consta de 6 créditos ECTS de los cuales, 4'5 son teóricos y 1'5 prácticos. Se trata de una continuación del estudio de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) comenzado en la asignatura también denominada **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**. Esta última asignatura es impartida en el segundo cuatrimestre del segundo curso del Grado en Matemáticas. Ambas asignaturas constituyen el módulo **Ecuaciones Diferenciales** del citado Grado.

Comenzaremos recordando algunos conceptos estudiados en la asignatura **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**. De manera general, en esta asignatura se estudió el llamado *Problema de Cauchy* o *Problema de Valores Iniciales* para un Sistema Diferencial Ordinario (S.D.O.) de primer orden. Éste se puede escribir:

$$(PC) \qquad \begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ es un abierto conexo ($N \geq 1$ es un número natural: *número de ecuaciones del sistema*),

$$f : (t, y) \in \Omega \longmapsto f(t, y) \in \mathbb{R}^N,$$

es una función que satisface $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$ y $(t_0, y_0) \in \Omega$. Recordemos que $Lip_{loc}(y, \Omega)$ es el espacio de funciones definidas de Ω en $\mathbb{R}^N$ que son *localmente lipschitzianas respecto de la variable* y en Ω. Es decir, son las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que satisfacen: para cualquier $(t_0, y_0) \in \Omega$ existen dos constantes $\varepsilon > 0$ y $L \geq 0$ tales que $\overline{B}((t_0, y_0); \varepsilon) \subset \Omega$ y

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \overline{B}((t_0, y_0); \varepsilon).^{[1]}$$

[1] A partir de este momento utilizaremos $|\cdot|$ para representar la norma euclídea de $\mathbb{R}^N$. Salvo que se especifique lo

En la asignatura de **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** se estudió:

1. Algunos métodos elementales de integración de E.D.O.

2. Resultados de existencia y de unicidad de *solución local* del Problema de Cauchy (PC). Como resultado importante, se estudió el Teorema de Picard (que proporciona el resultado de existencia y unicidad de solución local). En la prueba de este resultado se utilizó el Teorema de Banach del Punto Fijo, otro de los resultados importantes de la citada asignatura.

3. Resultados de existencia y unicidad de *solución global* o *solución maximal* $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ del Problema de Cauchy definida en el intervalo $I(t_0, y_0)$ (intervalo de definición de la solución maximal). En particular, la unicidad de solución global de (PC) fue obtenida como consecuencia del Lema de Gronwall.

4. Criterios de prolongabilidad de soluciones y caracterización de soluciones maximales.

5. Ecuaciones y sistemas lineales.

En esta primera sección recordaremos de manera más precisa algunos resultados conocidos sobre el problema de Cauchy o problema de valores iniciales para un sistema diferencial ordinario. En este capítulo y en los dos siguientes utilizaremos la variable t (en lugar de x) para designar la variable independiente del sistema.

De manera general, consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$, con $N \geq 1$ un entero, un conjunto abierto conexo no vacío, $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una función continua en Ω y $(t_0, y_0) \in \Omega$ un punto. Con estos datos, consideramos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, un intervalo no degenerado tal que $t_0 \in \operatorname{int}(I)$, y $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una función definida en I. Recordemos que φ es solución del problema de Cauchy (1.1) en I (o solución local de (1.1) en I) si $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ y satisface

(I) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para cualquier $t \in I$,

(II) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$, y,

(III) $\varphi(t_0) = y_0$.

El siguiente teorema da un resultado de existencia y unicidad de solución local del problema de Cauchy. Se trata del Teorema de Picard:

Teorema 1.1.1 (Teorema de Picard). *En las condiciones anteriores, supongamos que*

$$f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega).$$

Entonces, para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que el problema de valores iniciales (1.1) tiene una única solución φ en el intervalo $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. ∎

Pasamos a continuación a recordar los resultados concernientes a la existencia y unicidad de solución *maximal* o *global*. Comenzamos recordando un resultado de unicidad global. Se tiene:

contrario, ésta será la norma utilizada en $\mathbb{R}^N$. Es bien conocido que en $\mathbb{R}^N$ todas las normas son equivalentes. Por tanto, los conceptos desarrollados en esta asignatura no dependen de la norma elegida.

Teorema 1.1.2 (de unicidad global). *En las condiciones anteriores, supongamos que*

$$f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega),$$

y $(t_0, y_0) \in \Omega$. *Sean* (I_1, φ_1) *e* (I_2, φ_2) *dos soluciones del problema de Cauchy* (1.1). *Entonces,*

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2. \qquad \blacksquare$$

Antes de enunciar el resultado de existencia de solución maximal, recordemos ciertos conceptos que utilizaremos en este curso. Para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, denotaremos

$$S(t_0, y_0) = \{(I, \varphi) : \varphi \text{ es solución del problema de Cauchy (1.1) en } I\}.$$

El Teorema de Picard en particular implica que $S(t_0, y_0) \neq \emptyset$.

Definición 1.1.3. *Consideremos* $(t_0, y_0) \in \Omega$ *e* $(I, \varphi) \in S(t_0, y_0)$.

(a) Diremos que la solución (I, φ) *de* (1.1) *es prolongable por la derecha, si existe una solución* $(J, \psi) \in S(t_0, y_0)$ *tal que* $I \subset J$ *y* $\sup I \in \operatorname{int}(J)$.

(b) Diremos que (I, φ) *es prolongable por la izquierda, si existe una solución* $(J, \psi) \in S(t_0, y_0)$ *tal que* $I \subset J$ *e* $\inf I \in \operatorname{int}(J)$.

(c) Diremos que (I, φ) *es prolongable, si es prolongable por la derecha o por la izquierda (o ambas cosas a la vez).*

(d) Finalmente, diremos que (I, φ) *es una solución maximal, o una solución global, del problema de Cauchy* (1.1) *si* (I, φ) *no es prolongable.* $\blacksquare$

Observación 1.1. Si (I, φ) es una solución del problema de Cauchy (1.1) prolongable por la derecha, y si $(J, \psi) \in S(t_0, y_0)$ es tal que $I \subset J$ y $\sup I \in \operatorname{int}(J)$, entonces, como consecuencia del Teorema 1.1.2 (teorema de unicidad global), se tiene que φ y ψ coinciden en la intersección de los intervalos, es decir, en I. En este sentido, la solución ψ es una prolongación de la función φ por el extremo derecho del intervalo I. Cabe hacer una observación similar si (I, φ) es prolongable por la izquierda. $\blacksquare$

Recordemos el Teorema de prolongabilidad de soluciones locales del problema de Cauchy (1.1). Por comodidad, enunciaremos el resultado de prolongabilidad de la solución por la derecha. Se tiene:

Teorema 1.1.4. *Supongamos que* $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$. *Sea* $(t_0, y_0) \in \Omega$ *e* $(I, \varphi) \in S(t_0, y_0)$ *una solución local del problema de Cauchy* (1.1). *Entonces, son equivalentes:*

1. *La solución* (I, φ) *es prolongable por la derecha.*
2. *La semitrayectoria derecha*

$$\tau_\varphi^+ = \{(t, \varphi(t)) : t \in I \text{ con } t \geq t_0\} \subset \Omega$$

está acotada y $\operatorname{dist}(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$. $\blacksquare$

Ya estamos en condiciones de enunciar el resultado de existencia y unicidad de solución global del problema de Cauchy (1.1). Se tiene:

Teorema 1.1.5 (de existencia y unicidad de solución global). *Sean Ω un abierto conexo no vacío de $\mathbb{R}^{N+1}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una función tal que*

$$f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega).$$

Entonces, para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe una única solución maximal o global del problema de Cauchy (1.1). Además, el intervalo de definición de la solución maximal es abierto. ■

Observación 1.2. Dado $(t_0, y_0) \in \Omega$, utilizaremos la notación $(I(t_0, y_0), \varphi(\cdot; t_0, y_0))$ para denotar la única solución maximal del problema de Cauchy (1.1). Del Teorema 1.1.4 podemos deducir cuál es el comportamiento de la solución maximal $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot, t_0, y_0)$ en los extremos del intervalo $I(t_0, y_0)$. Razonando con el extremo superior, se tiene que, o bien que la semitrayectoria positiva τ_φ^+ es no acotada, o bien $\operatorname{dist}(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) = 0$ (es decir, la semitrayectoria "toca" la frontera de Ω). ■

La siguiente cuestión que trataremos será la dependencia de la solución maximal de (1.1) respecto de los datos iniciales. Sabemos que la solución maximal $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ es continua (de hecho, derivable) en el intervalo $I(t_0, y_0)$ respecto de la variable t. Podríamos ver el dato inicial (t_0, y_0) ($(t_0, y_0) \in \Omega$) también como una variable de la que depende la solución maximal. Por tanto, la pregunta parece natural: ¿Es la solución maximal $\varphi(\cdot; \cdot, \cdot)$ continua respecto de t y respecto del dato inicial (t_0, y_0)?

Este resultado de continuidad de la solución maximal respecto de los datos iniciales no ha sido probado en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En cualquier caso, daremos su enunciado pero no daremos su prueba. Comenzamos por la siguiente definición:

Definición 1.1.6. *Supongamos que se tienen las hipótesis del Teorema 1.1.5. Así, se definen el conjunto*

$$\Theta := \{(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{N+2} : (t_0, y_0) \in \Omega \ y \ t \in I(t_0, y_0)\},$$

y la función

$$\varphi : (t, t_0, y_0) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{N+2} \mapsto \varphi(t; t_0, y_0) \in \mathbb{R}^N.$$

La función $\varphi(\cdot; \cdot, \cdot)$ así definida es denominada solución (maximal) del problema de Cauchy (1.1) expresada en función de los datos iniciales. ■

Podemos ya enunciar el teorema de dependencia continua de la solución maximal respecto de los datos iniciales. Se tiene:

Teorema 1.1.7 (Dependencia continua respecto de los datos iniciales). *Bajo las condiciones del Teorema 1.1.5, se tiene que el conjunto Θ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{N+2}$ y la solución maximal $\varphi(\cdot; \cdot, \cdot)$ del problema de Cauchy (1.1) expresada en función de los datos iniciales es continua en Θ, es decir, $\varphi \in C^0(\Theta; \mathbb{R}^N)$.* ■

Observación 1.3.
1. La prueba del Teorema 1.1.7 es técnicamente complicada. Existen varias posibles pruebas del resultado, aunque quizá la más sencilla es la desarrollada en [13]. Para pruebas alternativas del resultado puede también consultarse [18].

2. Todos los resultados enunciados en esta sección (salvo el ya mencionado Teorema 1.1.7) han sido probados en la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del segundo curso del Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. En cualquier caso, pueden ser consultados, por ejemplo, en [15] y [13].

1.2. Motivación del estudio de la estabilidad

Supongamos que estamos analizando un fenómeno físico, biológico, ..., que evoluciona con el paso del tiempo, y cuyo comportamiento se rige por un sistema diferencial ordinario o, por concretar un poco más, por una e.d.o. de primer orden, junto con unas determinadas condiciones iniciales, que nos dicen cuál es el comportamiento del sistema en el tiempo inicial t_0. Este fenómeno puede ser por tanto modelado mediante el problema de Cauchy (1.1), con f y (t_0, y_0) satisfaciendo ciertas condiciones (ver Sección 1.1).

Evidentemente, en la estimación del estado inicial del sistema siempre se producen errores (errores humanos, de los aparatos de medida, ...). Por tanto, no conocemos el verdadero estado inicial y_0 del sistema sino una aproximación de ese estado inicial $\overline{y}_0$. Así, la solución que obtendríamos al resolver el problema de Cauchy (1.1) es $\varphi(\cdot; t_0, \overline{y}_0)$ en lugar de la solución real (que sería $\varphi(t; t_0, y_0)$).

Resulta fundamental conocer cómo afecta el pequeño error a la verdadera solución del problema de Cauchy (1.1). Veamos que cuando el tiempo t recorre un pequeño intervalo acotado, las dos soluciones del problema de Cauchy (la real y la obtenida con el dato inicial erróneo) están cerca. Obtendremos el resultado como consecuencia del Teorema 1.1.7 (continuidad respecto de datos iniciales).

En efecto, supongamos que $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ un abierto conexo no vacío, y sea $(t_0, y_0) \in \Omega$. Entonces, la solución maximal satisface $\varphi(\cdot; \cdot, \cdot) \in C^0(\Theta; \mathbb{R}^N)$. Se tiene que $(t_0, t_0, y_0) \in \Theta$, por tanto, existe $T > t_0$ y $a_0 > 0$ tal que el compacto K satisface

$$K := [t_0, T] \times \{t_0\} \times \overline{B}(y_0; a_0) \subset \Theta.$$

(Obsérvese que la anterior inclusión en particular dice que si $|\overline{y}_0 - y_0| \leq a_0$, entonces $I(t_0, \overline{y}_0) \supset [t_0, T]$). De la continuidad uniforme de φ en el compacto K, se deduce que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, a_0)$ tal que

$$|\varphi(\overline{t}; t_0, \overline{y}_0) - \varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall (\overline{t}; t_0, \overline{y}_0), (t; t_0, y_0) \in K \text{ satisfaciendo } |t - \overline{t}| \leq \delta, \ |y_0 - \overline{y}_0| \leq \delta.$$

En particular, para $|y_0 - \overline{y}_0| \leq \delta$ se tendrá que

$$|\varphi(t; t_0, \overline{y}_0) - \varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

¿Qué ocurrirá con la diferencia anterior cuando $t > T$? ¿y cuando $t \to \infty$? La teoría de estabilidad que veremos en los próximos capítulos dará respuesta a estas cuestiones.

En sus orígenes, la estabilidad apareció asociada a problemas de la mecánica cuando se quería estudiar el comportamiento de los estados de *reposo* o *equilibrio* del sistema. Veamos como ejemplo el movimiento del péndulo simple:

Ejemplo 1.1. Supongamos que tenemos un péndulo simple de masa puntual m que oscila en un plano suspendido de una cuerda inextensible y rígida de longitud l. Supongamos que el péndulo oscila sin rozamiento y que únicamente está sujeto a la fuerza de la gravedad g (que supondremos constante). Si $x(t)$ es el ángulo formado entre la posición del péndulo y la posición vertical en el tiempo t, entonces el movimiento del péndulo se modela mediante la e.d.o. no lineal de segundo orden:

$$\ddot{x} + k \operatorname{sen} x = 0,$$

donde $k > 0$ es un parámetro positivo que depende de g y de l. A esta ecuación habría que complementarla con un dato inicial (que por comodidad tomaremos en $t_0 = 0$) que físicamente corresponde a la posición inicial $x(0)$ y a la velocidad angular inicial $\dot{x}(0)$ (que supondremos nula):

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Desde el punto de vista físico, hay dos posiciones de *equilibrio* del péndulo que corresponden a $x_0 = 0$ y a $x_0 = \pi$. Si $x(t; t_0, x_0)$ denota, como siempre, la solución maximal del problema de Cauchy planteado más arriba, se tiene $I(0,0) = I(0,\pi) = \mathbb{R}$ y

$$\varphi_0(t) = x(t; 0, 0) = 0, \quad \varphi_1(t) = x(t; 0, \pi) = \pi \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En este modelo, la posición de equilibrio φ_0 es *estable* pues, si se produce una pequeña desviación de la posición de equilibrio, el movimiento del péndulo será oscilatorio alrededor de dicha posición, manteniéndose siempre muy cerca de ella. Sin embargo, la posición de equilibrio φ_1 resulta ser *inestable* pues una pequeña desviación de dicha posición hace que el péndulo se aleje de esa posición. De hecho, podemos encontrar tiempos arbitrariamente grandes en los que la posición del péndulo se mantendrá "alejada"de la posición de partida. ■

Ejemplo 1.2. Consideremos ahora la e.d.o. de primer orden

$$y' = y - y^3.$$

Aplicando los resultados de la Sección 1.1 podemos concluir que para cualquier $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ el problema de Cauchy asociado a esta ecuación tiene una única solución maximal $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ definida en el intervalo $I(t_0, y_0)$. En lo que sigue supondremos que $t_0 = 0$ (tiempo inicial igual a 0) pues, como veremos, para esta ecuación esto no supone ninguna restricción (se trata de un sistema *autónomo*).

Es obvio que existen tres soluciones constantes (tres puntos de equilibrio o de reposo): $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ e $y_{-1} = -1$ (se tiene por tanto que $I(0, y_0) = I(0, y_1) = I(0, y_{-1}) = \mathbb{R}$ y $\varphi(t; 0, y_0) = 0$, $\varphi(t; 0, y_1) = 1$ y $\varphi(t; 0, y_{-1}) = -1$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$). Para analizar cómo es el comportamiento de cualquier otra solución, basta calcular la solución maximal que pasa por $(0, y_0)$. Esto es posible pues se trata de una ecuación de variables separables (o también de Bernoulli). Se puede comprobar fácilmente que para cada $y_0 \neq 0$,

$$\varphi(t; 0, y_0) = \operatorname{sign}(y_0) \sqrt{\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right) e^{-2t}}},$$

con

$$I(0, y_0) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } y_0 \in [-1, 1], \\ \left(\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right), \infty\right) & \text{si } |y_0| > 1. \end{cases}$$

En consecuencia, se observa que

- Si $y_0 < 0$, entonces $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t; 0, y_0) = -1$.
- Si $y_0 > 0$, entonces $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t; 0, y_0) = 1$.

De este modo, todas las posibles soluciones de la ecuación (i.e., todos las posibles trayectorias) o bien son uno de los tres estados de reposo, o bien se acercan a los equilibrios $y_{-1} = -1$ o $y_1 = 1$. Esto se interpreta como que dichos estados de reposo son estables, mientras que el $y_0 = 0$ es inestable. Todos estos conceptos serán vistos con detalle en la siguiente sección. ■

1.3. Conceptos de estabilidad

En lo que sigue supondremos dados un abierto conexo no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ y una función f, satisfaciendo:

$$(1.2) \qquad \begin{cases} I \times B_\rho \subseteq \Omega, \\ f \in C^0(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y;\Omega) \text{ y } f(t,0) = 0, \quad \forall t \in I, \end{cases}$$

donde $I = (\tau, \infty)$ y $B_\rho = B(0;\rho) \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\rho \in (0,\infty]$ y $\tau \in [-\infty, \infty)$. Por otro lado, consideramos el s.d.o.

$$(1.3) \qquad y' = f(t,y).$$

De las hipótesis impuestas a Ω y a f, se tiene que la función nula φ_0 definida por

$$\varphi_0 : t \in I \longmapsto \varphi_0(t) = 0 \in \mathbb{R}^N,$$

es solución del sistema diferencial (1.3) en I. De hecho, si consideramos el correspondiente problema de Cauchy (1.1) para la función f y dato inicial $(t_0, 0) \in I \times B_\rho$, se tiene,

$$I(t_0,0) \supseteq I \quad \text{y} \quad \varphi(t;t_0,0) = \varphi_0(t) \quad \forall t \in I.$$

Se dice en ese caso que φ_0 es un punto *crítico* del s.d.o. (1.3), o un *equilibrio* del sistema.

Las definiciones de estabilidad que vamos a ver a continuación fueron establecidas por el matemático ruso **Aleksandr Mijáilovich Liapunov** (1857–1918). Comenzamos por la definición de equilibrio **estable** o **inestable**:

Definición 1.3.1. *Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es estable en el sentido de Liapunov (o simplemente que φ_0 es un equilibrio estable de (1.3)) si para cualesquiera $t_0 \in I$ y $\varepsilon \in (0,\rho)$, existe $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) \in (0,\rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \delta$, se tiene:*

(a) $I(t_0,y_0) \supset [t_0,\infty)$ y

(b) $|\varphi(t;t_0,y_0)| \leq \varepsilon$, para cualquier $t \in [t_0,\infty)$.

En caso contrario, se dice que la solución φ_0 de (1.3) es inestable. ■

Observación 1.4. Es inmediato comprobar que el concepto de estabilidad de la Definición 1.3.1 es equivalente a:

"Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es estable (en el sentido de Liapunov) si para cualesquiera $t_0 \in I$ y $\varepsilon \in (0,\rho)$, existe $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) \in (0,\rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \delta$, se tiene:

$$(1.4) \qquad |\varphi(t;t_0,y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in I(t_0,y_0) \cap [t_0,\infty)\text{''}.$$

Es claro que la Definición 1.3.1 implica la precedente. Veamos la implicación contraria. Para ello, basta comprobar la condición (a) de la Definición 1.3.1. Efectivamente, la acotación $|\varphi(t;t_0,y_0)| \leq \varepsilon$, válida para cualquier $t \in I(t_0,y_0) \cap [t_0,\infty)$, implica que la solución $\varphi(\cdot;t_0,y_0)$ no llega a la frontera de Ω ni explota en tiempo finito. Al tratarse de la solución maximal y no ser prolongable por la derecha, debe ser $I(t_0,y_0) \supset [t_0,\infty)$. Esto demuestra la equivalencia. ■

Observación 1.5. Obsérvese que el concepto de inestabilidad puede ser reescrito de manera equivalente como:

"Se dice que la solución φ_0 de (1.3) es inestable si existen $t_0 \in I$ y $\varepsilon \in (0,\rho)$ tal que, para cualquier $\delta \in (0,\rho)$ existe y_0, con $|y_0| \leq \delta$, para el que se tiene:

$$|\varphi(t;t_0,y_0)| > \varepsilon, \quad \text{para cierto } t \in I(t_0,y_0) \cap [t_0,\infty)\text{''}.$$ ■

Siguiendo con las definiciones, introduzcamos ahora el concepto de **estabilidad uniforme**:

Definición 1.3.2. *Se dice que la solución φ_0 del s.d.o.* (1.3) *es uniformemente estable cuando el valor δ del concepto de estabilidad en la Definición 1.3.1 no depende de t_0, es decir, si para cualesquier $\varepsilon \in (0, \rho)$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \rho)$ tal que, si $t_0 \in I$ e $|y_0| \leq \delta$, se tiene:*

(a) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$ *y*

(b) $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon$, *para cualquier* $t \in [t_0, \infty)$. ■

Pasemos a definir el concepto de **atractividad**:

Definición 1.3.3. *Se dice que la solución φ_0 de* (1.3) *es (un equilibrio) atractivo si para cualquier $t_0 \in I$, existe $\gamma = \gamma(t_0) \in (0, \rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \gamma$, entonces se tiene:*

(a) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$ *y*

(b) $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t; t_0, y_0)| = 0$. ■

Podemos escribir también el concepto de **atractividad uniforme**:

Definición 1.3.4. *Se dice que la solución φ_0 de* (1.3) *es (un equilibrio) uniformemente atractivo si existe $\gamma \in (0, \rho)$ tal que si $|y_0| \leq \gamma$, se tiene:*

(a) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$, *para cualesquiera* $t_0 \in I$;

(b) para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $T_\varepsilon > 0$ verificando $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon$, para cualesquiera $t_0 \in I$ y $t \geq t_0 + T_\varepsilon$. ■

Finalmente,

Definición 1.3.5. *1. Se dice que la solución φ_0 de* (1.3) *es (un equilibrio) asintóticamente estable si es estable y atractivo.*

2. Se dice que la solución φ_0 de (1.3) *es (un equilibrio) uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable y uniformemente atractivo.* ■

Observación 1.6. Las distintas definiciones de estabilidad y atractividad dadas más arriba han sido planteadas para la solución nula φ_0 de (1.3) (con f satisfaciendo (1.2)). Sin embargo, es posible dar las mismas definiciones en el caso de cualquier solución no nula φ_1 de (1.3) que esté definida en un intervalo infinito. Supongamos dada φ_1, una solución de (1.3) definida en el intervalo $I = (\tau, \infty)$ ($\tau \in [-\infty, \infty)$ dado). Supongamos también que existe $\rho \in (0, \infty]$ tal que, en lugar de la hipótesis (1.2), se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(t, y) : t \in I, \quad y \in B(\varphi_1(t); \rho)\} \subseteq \Omega, \\ f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega). \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Entonces, realizando el cambio de variables $z = y - \varphi_1(t)$, con $t \in I$, el s.d.o. (1.3) se transforma en el siguiente

$$z' = y' - \varphi_1'(t) = f(t, y) - f(t, \varphi_1(t)) = f(t, z + \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_1(t)) := F(t, z).$$

Es fácil comprobar que F satisface las condiciones (1.2) para un nuevo abierto $\widetilde{\Omega}$ y además $z_0 \equiv 0$ es un punto crítico o equilibrio del nuevo sistema que se corresponde con la solución φ_1 mediante el cambio de variables. ■

Observación 1.7. En la siguiente sección veremos que los conceptos de estabilidad y atractividad dados anteriormente son distintos, pues en el caso de sistemas lineales equivalen a propiedades distintas. ■

Observación 1.8. Las definiciones anteriores han sido dadas para la solución nula del s.d.o. (1.3). Es posible escribir las anteriores definiciones en el caso de la e.d.o. de orden n:

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

con g definida en el abierto conexo no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Supondremos de nuevo que la función nula es solución de la ecuación en $I = (\tau, \infty)$ ($\tau \in [-\infty, \infty)$), es decir, g satisface $g(t, 0, 0, 0, \dots, 0) = 0$ para todo $t \in I$. Supongamos además,

$$g \in C^0(\Omega) \cap Lip_{loc}((y, y', \dots, y^{n-1}), \Omega; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad I \times B_\rho \subseteq \Omega,$$

para $\rho \in (0, \infty]$ ($B_\rho = B(0, \rho) \subset \mathbb{R}^n$).

Las definiciones de carácter estable, atractivo, ... de la ecuación anterior se refieren a los correspondientes conceptos para la solución nula del sistema diferencial ordinario equivalente asociado a la ecuación. ■

Definición 1.3.6. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto conexo no vacío. Se dice que el s.d.o. (1.3) es un sistema autónomo si se tiene*

$$f(t, y) = f(y), \quad \forall t,$$

para una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(D)$. En este caso, el sistema tiene la forma

$$y' = f(y), \tag{1.6}$$

y el dominio maximal de existencia y unicidad está dado por $\Omega = \mathbb{R} \times D$. ■

Observación 1.9. Obsérvese que, debido a que la función f no depende de la variable t (caso autónomo), la condición $f \in Lip_{loc}(D)$ en particular implica que $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N)$. Así, para asegurar la existencia y unicidad de solución maximal del problema de Cauchy asociado a f, basta escribir $f \in Lip_{loc}(D)$. ■

En el caso del sistema autónomo (1.6), la hipótesis (1.2) se transforma en

$$B_\rho \subseteq D, \quad f \in Lip_{loc}(D) \text{ y } f(0) = 0, \tag{1.7}$$

con $\rho \in (0, \infty]$.

La gran importancia del **caso autónomo** consiste en que **los conceptos de estabilidad y atractividad y estabilidad y atractividad uniforme son equivalentes**. Deduciremos la equivalencia como consecuencia del siguiente resultado.

Proposición 1.3.7. *Consideremos el sistema autónomo (1.6) con $f \in Lip_{loc}(D)$. Para $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in D$, sea $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ la solución maximal del problema de Cauchy asociado a (1.6). Entonces,*

1. *$I(t_0, y_0) = t_0 + I(0, y_0)$.*
2. *$\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t - t_0; 0, y_0)$, para cualquier $t \in I(t_0, y_0)$.*

Demostración: Para demostrar esta afirmación, consideremos en primer lugar la función

$$\psi : J = t_0 + I(0, y_0) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

definida como $\psi(t) = \varphi(t - t_0; 0, y_0)$, para $t \in J$. Obviamente, esta función ψ está bien definida y es derivable en J.

Es inmediato comprobar que (J, ψ) es solución del sistema (1.6) y satisface la condición inicial $\psi(t_0) = y_0$. Por tanto, (J, ψ) es una solución local del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Como $(I(t_0, y_0), \varphi(\cdot; t_0, y_0))$ es la solución maximal de dicho problema, entonces se tiene $I(t_0, y_0) \supseteq t_0 + I(0, y_0)$, y ambas funciones coinciden en el intervalo $J = t_0 + I(0, y_0)$.

Recíprocamente, definamos ahora $\phi : \widetilde{J} = I(t_0, y_0) - t_0 \longrightarrow \mathbb{R}^N$ como $\phi(t) = \varphi(t + t_0; t_0, y_0)$, para $t \in \widetilde{J}$. Razonando de modo similar, se comprueba fácilmente que $(\widetilde{J}, \phi)$ es una solución local del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Así, se tiene que $I(0, y_0) \supseteq I(t_0, y_0) - t_0$, y ϕ coincide con $\varphi(\cdot; 0, y_0)$ en el intervalo $\widetilde{J} = I(t_0, y_0) - t_0$. Deducimos así los puntos i) y ii) del enunciado. Esto finaliza la prueba. ■

Ejercicio 1.1. Usando la Proposición 1.3.7, demuéstrese que para el sistema autónomo (1.6) los conceptos de estabilidad, atractividad y estabilidad asintótica equivalen, respectivamente, a los conceptos de estabilidad uniforme, atractividad uniforme y estabilidad asintótica uniforme. ■

1.4. Estabilidad de sistemas lineales

En esta sección estudiaremos las propiedades de estabilidad de los s.d.o. más sencillos: los sistemas lineales. Se trata del caso más sencillo, pues veremos que las propiedades de estabilidad del sistema lineal equivalen a ciertas propiedades de las matrices fundamentales asociadas.

En primer lugar recordaremos ciertos puntos de la teoría de S.D.O. lineales de primer orden. Para ello, fijemos una función matricial y una función vectorial

$$A : t \in I \longmapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \text{ y } b : t \in I \longmapsto b(t) \in \mathbb{R}^N$$

definidas en $I \subseteq \mathbb{R}$, un intervalo no degenerado, tales que $A \in C^0(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $b \in C^0(I; \mathbb{R}^N)$. Consideremos el problema de valores iniciales para un sistema lineal *no homogéneo*

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

donde $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^N$. Obsérvese que en este caso $f(t, y) = A(t)y + b(t)$ es una función definida en $\Omega = I \times \mathbb{R}^N$ que, en principio, podría no ser abierto. En cualquier caso es posible aplicar la teoría de existencia y unicidad de solución maximal para el problema (1.8) y concluir:

1. Existe una única solución maximal $\varphi(\cdot; t_0, y_0) \in C^1(I(t_0, y_0); \mathbb{R}^N)$ del problema de valores iniciales (1.8);

2. $I(t_0, y_0) \equiv I$, para cualquier $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$.

Es más, se puede resolver "explícitamente" el problema (1.8). Recordemos cómo hacerlo. Consideramos los s.d.o. lineales *homogéneo* y *no homogéneo*:

$$y' = A(t)y \quad t \in I, \tag{1.9}$$

$$y' = A(t)y + b(t) \quad t \in I. \tag{1.10}$$

Sean

$$\begin{cases} W_0 = \{\varphi : \varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N) \text{ es solución de (1.9) en } I\}, \\ W_b = \{\varphi : \varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N) \text{ es solución de (1.10) en } I\}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Entonces:

Proposición 1.4.1. *Bajo las condiciones anteriores, se tiene:*

1. *W_0 es un subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ con $\dim W_0 = N$.*
2. *Si $b \in C^0(I; \mathbb{R}^N)$ es una función no idénticamente nula, W_b es una variedad afín de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ con $\dim W_b = N$. De hecho, $W_b = \varphi_b + W_0$ con φ_b una solución particular en I del sistema no homogéneo (1.10).* ■

Este resultado en particular afirma que $\dim W_0 = N$. Por tanto, las bases del espacio W_0 tienen N elementos. Supongamos que $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\} \subset C^1(I; \mathbb{R}^N)$ es una base de W_0. Entonces tenemos que la matriz cuyas columnas están formadas por los elementos de esta base, i.e., la matriz

$$F(t) = (\varphi_1(t) \,|\, \varphi_2(t) \,|\, \cdots \,|\, \varphi_N(t)) \quad \forall t \in I,$$

satisface $F \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, sus columnas son linealmente independientes y $F'(t) = A(t)F(t)$ para cualquier $t \in I$. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 1.4.2. *Se dice que $F \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ es una matriz fundamental (m.f.) asociada al sistema (1.9) si las columnas de F son linealmente independientes en $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ y se satisface $F'(t) = A(t)F(t)$ para cualquier $t \in I$.* ■

Ejemplo 1.3. Recordemos que en el caso particular de sistemas lineales de coeficientes constantes, se podía calcular explícitamente una m.f. Efectivamente, consideremos el sistema lineal de coeficientes constantes

$$y' = Ay,$$

con $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ una matriz. Entonces, una m.f. asociada al sistema anterior está dada por:

$$F(t) = e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(tA)^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$ ■

Obsérvese que de la propia definición de matriz fundamental deducimos que sus N columnas son elementos del espacio W_0 y forman una base de éste. Así, no es difícil comprobar la igualdad:

$$W_0 = \{\varphi : \varphi(t) = F(t)a \quad \forall t \in I, \text{ con } a \in \mathbb{R}^N\}.$$

Evidentemente, hay tantas m.f. asociadas al sistema (1.9) como bases del espacio W_0. En este sentido, se tiene:

Proposición 1.4.3. *Sean F una m.f. asociada a* (1.9) *y* $\widetilde{F} \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *tal que* $\widetilde{F}'(t) = A(t)\widetilde{F}(t)$ *para todo* $t \in I$*. Entonces, existe* $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\widetilde{F}(\cdot) = F(\cdot)C$*. Además,* $\widetilde{F}$ *es una nueva m.f. asociada a* (1.9) *si y sólo si* $\det C \neq 0$. ■

Es posible dar una caracterización para m.f. asociadas a sistemas lineales. Se tiene:

Proposición 1.4.4. *Sea* $F \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *una función matricial tal que* $F'(t) = A(t)F(t)$*, para* $t \in I$*. Entonces, son equivalentes:*

1. *F es una m.f. asociada a* (1.9).
2. $\det F(t) \neq 0$*, para cualquier* $t \in I$.
3. $\det F(\widetilde{t}) \neq 0$*, para cierto* $\widetilde{t} \in I$. ■

Volvemos de nuevo al problema de Cauchy (1.8). El conocimiento de una m.f. asociada al sistema homogéneo (1.9) permite dar una fórmula explícita de la solución del problema (1.8):

Proposición 1.4.5. *Supongamos dados* $A \in C^0(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, $b \in C^0(I; \mathbb{R}^N)$ *y* $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$*. Sea* $F \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *una m.f. asociada a* (1.9)*. Entonces, la única solución maximal del problema de Cauchy* (1.8) *viene dada por:*

$$\varphi(t; t_0, y_0) = F(t)F(t_0)^{-1}y_0 + F(t)\int_{t_0}^{t} F(s)^{-1}b(s)\,ds, \quad \forall t \in I. \tag{1.12}$$

Demostración: Para calcular la única solución maximal del problema (1.8) definida en I calcularemos en primer lugar la solución general del sistema no homogéneo (1.10). Obsérvese que ésta viene dada por $\varphi(\cdot) = \varphi_b(\cdot) + F(\cdot)a$, donde φ_b es una solución particular de (1.10) en I y $a \in \mathbb{R}^N$. Calcularemos una solución particular φ_b de (1.10) utilizando el llamado *método de Lagrange* o *método de variación de las constantes*. Buscamos

$$\varphi_b(t) = F(t)a(t), \quad \forall t \in I,$$

donde $a \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ es una función vectorial a determinar. Llevando φ_b a (1.10), no es difícil ver que φ_b es una solución de (1.10) en I si y sólo si

$$F(t)a'(t) = b(t), \quad \forall t \in I \iff a'(t) = F(t)^{-1}(t)b(t), \quad \forall t \in I.$$

Integrando esta última igualdad entre t_0 y t encontramos una expresión de a y de φ_b. Así, la solución general de (1.10) viene dada por

$$\varphi(t) = F(t)a + F(t)\int_{t_0}^{t} F(s)^{-1}b(s)\,ds, \quad \forall t \in I, \tag{1.13}$$

con $a \in \mathbb{R}^N$.

Finalmente, imponiendo la condición inicial de (1.8) a la expresión (1.13), obtenemos el valor de a y la fórmula (1.12). ■

Observación 1.10. En la prueba anterior hemos usado de manera fundamental la propiedad

$$\det F(t) \neq 0, \quad \forall t \in I,$$

que satisface cualquier matriz fundamental asociada al sistema homogéneo (1.9). ■

Una vez recordado resultados de sistemas lineales, como en la Sección 1.3, nos ocuparemos del estudio de las propiedades de estabilidad de la solución nula del sistema lineal. Así, el sistema a estudiar es un sistema lineal homogéneo.

Consideremos el s.d.o. lineal homogéneo

$$y' = A(t)y, \tag{1.14}$$

donde $A \in C^0(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ e $I = (\tau, +\infty)$, con $\tau \in [-\infty, \infty)$. Obsérvese que el sistema (1.14) satisface la hipótesis (1.2) para $\rho = \infty$ y $\Omega = I \times \mathbb{R}^N$. Así, tiene sentido plantearse la estabilidad de la solución nula de (1.14). Se tiene:

Teorema 1.4.6. *Sea $F(\cdot)$ una matriz fundamental para el sistema (1.14). Se tiene:*

(a) φ_0 es un equilibrio estable de (1.14) si y sólo si para cada $t_0 \in I$, se cumple que

$$\sup_{t \in [t_0, +\infty)} \|F(t)\|_s < \infty. \tag{1.15}$$

(b) φ_0 es un equilibrio de (1.14) asintóticamente estable si y sólo si

$$\lim_{t \to \infty} \|F(t)\|_s = 0. \tag{1.16}$$

(c) φ_0 es un equilibrio de (1.14) uniformemente estable si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s \leq M, \quad \forall t_0 \in I, \quad \forall t \geq t_0. \tag{1.17}$$

(d) φ_0 es un equilibrio de (1.14) uniformemente asintóticamente estable si y sólo si existen constantes $C > 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$\|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t_0 \in I, \quad \forall t \geq t_0. \tag{1.18}$$

Observación 1.11. Antes de hacer la prueba de este resultado, hagamos las siguientes puntualizaciones:

1. Hemos enunciado el Teorema 1.4.6 utilizando la norma espectral $\|\cdot\|_s$ en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$:

$$\|B\|_s = \max_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|Bx|}{|x|}, \text{ con } B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N).$$

   Evidentemente, todas las normas en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ son equivalentes y, así, el resultado sigue siendo válido si consideramos cualquier otra norma en este espacio.

2. El resultado anterior y las fórmulas (1.15)–(1.18) no dependen de la matriz fundamental F asociada al sistema lineal (1.14) elegida. ■

Ejercicio 1.2. Demuéstrese el segundo punto de la Observación 1.11. ■

Demostración: Recordemos que, dada una matriz fundamental F asociada a (1.14), la solución maximal de este sistema correspondiente al dato inicial $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ está dada por

$$\varphi(t; t_0, y_0) = F(t)F(t_0)^{-1}y_0, \quad \forall t \in I(t_0, y_0) \equiv I.$$

Obsérvese en particular que la expresión anterior proporciona la siguiente propiedad a la solución maximal:

$$\varphi(\cdot; t_0, \alpha y_{0,1} + \beta y_{0,2}) = \alpha\varphi(\cdot; t_0, y_{0,1}) + \beta\varphi(\cdot; t_0, y_{0,2}), \quad \forall t_0 \in I,\ \forall y_{0,1}, y_{0,2} \in \mathbb{R}^N, \tag{1.19}$$

i.e., la solución maximal del sistema lineal (1.14) es **lineal** respecto de la última componente y_0. Esta propiedad será utilizada a lo largo de la prueba.

Probemos el resultado:

(a) Supongamos en primer lugar que se satisface (1.15) y veamos que el equilibrio φ_0 de (1.14) es estable, es decir, satisface (1.4). Para ello, fijemos $t_0 \in I$ y $\varepsilon > 0$. Utilizando la fórmula de la solución maximal asociada al dato de Cauchy (t_0, y_0), podemos escribir

$$|\varphi(t; t_0, y_0)| \le \|F(t)\|_s \|F(t_0)^{-1}\|_s |y_0| \le \left(\sup_{t \ge t_0} \|F(t)\|_s\right) \|F(t_0)^{-1}\|_s |y_0| \le M\|F(t_0)^{-1}\|_s |y_0|,$$

para cualquier $t \in [t_0, \infty)$. Así, si tomamos $|y_0| \le \delta$, con $\delta = \varepsilon / \left(M\|F(t_0)^{-1}\|_s\right)$, deducimos (1.4).

Veamos la implicación contraria. Supongamos que φ_0 es una solución estable de (1.14). De este modo, fijados $t_0 \in I$ y tomando $\varepsilon \equiv 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(t; t_0, y_0)| = |F(t)F(t_0)^{-1}y_0| \le 1, \quad \forall t \in [t_0, \infty) \text{ e } y_0 : |y_0| \le \delta.$$

Si ahora tomamos $z_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ arbitrario, podemos aplicar la desigualdad anterior a $y_0 = \delta \dfrac{z_0}{|z_0|}$ y deducir $|F(t)F(t_0)^{-1}y_0| \le 1$, para cualquier $t \in [t_0, \infty)$. De manera equivalente,

$$|F(t)F(t_0)^{-1}z_0| \le \frac{|z_0|}{\delta}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad z_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Finalmente, de esta desigualdad llegamos a

$$\|F(t)\|_s = \max_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|F(t)x|}{|x|} = \max_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|F(t)F(t_0)^{-1}F(t_0)x|}{|x|} \le \frac{1}{\delta} \max_{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|F(t_0)x|}{|x|} = \frac{1}{\delta}\|F(t_0)\|_s.$$

Se tiene por tanto (1.15) y la prueba del punto (a).

(b) Supongamos que se tiene (1.16) y veamos que el equilibrio φ_0 de (1.14) es asintóticamente estable. Dado $t_0 \in I$, es fácil demostrar que (1.16) implica la condición (1.15). Usando el apartado (a) probado anteriormente, deducimos que φ_0 es un equilibrio estable de (1.14). Veamos ahora que φ_0 es una solución atractiva de (1.14). Sea $t_0 \in I$. Se tiene

$$|\varphi(t; t_0, y_0)| = |F(t)F(t_0)^{-1}y_0| \le \|F(t)\|_s \|F(t_0)^{-1}\|_s |y_0|.$$

Basta tomar $\lim\limits_{t \to \infty}$ en la expresión anterior y tener en cuenta (1.16) para deducir que la solución φ_0 de (1.14) es atractiva.

Veamos la implicación contraria. La solución φ_0 de (1.14) es asintóticamente estable y, en particular, es atractiva. Deducimos de aquí que, dado $t_0 \in I$, existe $\gamma = \gamma(t_0) > 0$ tal que

$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t;t_0,y_0)| = 0$ cuando $|y_0| \le \gamma$. Tomemos $z_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ arbitrario. Podemos aplicar la propiedad anterior a $y_0 = \gamma \dfrac{z_0}{|z_0|}$ y, de (1.19), llegamos a

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t;t_0,z_0)| = 0, \quad \forall z_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Por tanto, cualquier solución del sistema (1.14) satisface la propiedad anterior. Sin más que tener en cuenta que las N columnas de la matriz fundamental $F(\cdot)$ son soluciones del sistema diferencial (1.14), obtenemos la propiedad (1.16).

Observación 1.12. Antes de seguir con la prueba del Teorema 1.4.6, precisemos que, en los puntos (a) y (b) en realidad hemos probado lo siguiente: Hemos visto que si la solución φ_0 de (1.14) es atractiva, entonces se tiene (1.16). Por otro lado, también hemos visto que (1.16) implica (1.15) y, usando el apartado (a) del teorema, también φ_0 es un equilibrio estable de (1.14). En definitiva, hemos visto que para el **sistema lineal** (1.14) se satisface la propiedad

"Si la solución φ_0 de (1.14) *es atractiva, entonces φ_0 es un equilibrio estable de* (1.14)*".*

Por otro lado, es fácil dar un contraejemplo de sistema (lineal) cuya solución nula es estable y no es atractiva. Basta considerar el sistema lineal $y' = 0$ en $I = \mathbb{R}$. Está claro que una matriz fundamental asociada es $F(\cdot) \equiv Id$ y ésta satisface (1.15) y no (1.16). ■

(c) Veamos la prueba del tercer punto. Ésta va a seguir los pasos de la prueba de (a). Comencemos suponiendo que $F(\cdot)$ satisface la propiedad (1.17) y veamos que φ_0 es un equilibrio uniformemente estable de (1.14). Efectivamente,

$$|\varphi(t;t_0,y_0)| = |F(t)F(t_0)^{-1}y_0| \le \|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s |y_0| \le M|y_0|, \quad \forall t_0 \in I,\ \forall y_0 \in \mathbb{R}^N,\ \forall t \ge t_0.$$

Basta tomar $\delta = \varepsilon/M$ para deducir la propiedad $|\varphi(t;t_0,y_0)| \le \varepsilon$ para cualesquiera $t_0 \in I$ y $t \ge t_0$, siempre que $|y_0| \le \delta$.

Supongamos ahora que φ_0 es un equilibrio uniformemente estable de (1.14) y veamos (1.17). Fijado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(t;t_0,y_0)| \le 1, \quad \forall t_0 \in I,\ \forall t \ge t_0 \text{ y } \forall y_0 : |y_0| \le \delta.$$

Como anteriormente, si ahora tomamos $z_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, podemos aplicar la acotación anterior a $y_0 = \delta \dfrac{z_0}{|z_0|}$. Aplicando de nuevo la propiedad (1.19) deducimos

$$|\varphi(t;t_0,z_0)| = |F(t)F(t_0)^{-1}z_0| \le \frac{|z_0|}{\delta}, \quad \forall t_0 \in I,\ \forall t \ge t_0 \text{ y } \forall z_0 \in \mathbb{R}^N,$$

y de aquí,

$$\|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s = \sup_{z_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|F(t)F(t_0)^{-1}z_0|}{|z_0|} \le \frac{1}{\delta}, \quad \forall t_0 \in I,\ \forall t \ge t_0.$$

Tenemos así (1.17).

(d) Veamos este último punto. Supongamos en primer lugar que se tiene (1.18) y probemos que la solución nula de (1.14) es uniformemente asintóticamente estable, es decir, que φ_0 es uniformemente estable y uniformemente atractiva. Claramente, la estimación (1.18) implica (1.17) y, usando el punto (c), deducimos que φ_0 es un equilibrio de (1.14) uniformemente estable.

Probemos la atractividad uniforme de φ_0, es decir, comprobemos la segunda propiedad de la Definición 1.3.4. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $\varepsilon < C$. Si tomamos $\gamma = 1$ y $T_\varepsilon = \dfrac{1}{\alpha} \log\left(\dfrac{C}{\varepsilon}\right)$, es fácil comprobar que se verifica:

$$\begin{aligned}|\varphi(t;t_0,y_0)| &= |F(t)F(t_0)^{-1}y_0| \le \|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s |y_0| \\ &\le Ce^{-\alpha(t-t_0)} \le \varepsilon, \quad \forall t_0 \in I,\ \forall y_0 : |y_0| \le 1 \text{ y } \forall t \ge t_0 + T_\varepsilon.\end{aligned}$$

Obsérvese que si $C \le \varepsilon$, la desigualdad anterior sería válida para cualquier $t \ge t_0$. Tenemos así que φ_0 es un equilibrio de (1.14) uniformemente atractivo.

Supongamos ahora que φ_0 es un equilibrio de (1.14) uniformemente asintóticamente estable. En particular, φ_0 es uniformemente estable y la matriz fundamental F satisface la propiedad (1.17). Por otro lado, φ_0 es uniformemente atractiva y, así, existe $\gamma > 0$ para el que se tiene la segunda propiedad de la Definición 1.3.4. Si aplicamos esta propiedad para $\varepsilon = \gamma/2$, deducimos que existe $T = T_{\gamma/2}$ tal que

$$|\varphi(t;t_0,y_0)| \le \frac{\gamma}{2}, \quad \forall t_0 \in I,\ \forall y_0 : |y_0| \le \gamma \text{ y } \forall t \ge t_0 + T.$$

Si ahora tomamos $z_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ arbitrario, usamos la propiedad anterior para $y_0 = \gamma z_0/|z_0|$ y, como anteriormente, aplicamos la propiedad (1.19), obtenemos

$$|\varphi(t;t_0,z_0)| = |F(t)F(t_0)^{-1}z_0| \le \frac{1}{2}|z_0|, \quad \forall t_0 \in I,\ \forall z_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ y } \forall t \ge t_0 + T,$$

de donde

$$\|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s = \sup_{z_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|F(t)F(t_0)^{-1}z_0|}{|z_0|} \le \frac{1}{2}, \quad \forall t_0 \in I \text{ y } \forall t \ge t_0 + T.$$

Sean $t_0 \in I$ y $t \ge t_0$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ $(n \ge 0)$ tal que $t \in [t_0 + nT, t_0 + (n+1)T)$. Teniendo en cuenta (1.17) y aplicando sucesivamente la propiedad anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned}\|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s &= \|F(t)F(t_0+nT)^{-1}F(t_0+nT)F(t_0+(n-1)T)^{-1}\cdots F(t_0+T)F(t_0)^{-1}\|_s \\ &\le \|F(t)F(t_0+nT)^{-1}\|_s \|F(t_0+nT)F(t_0+(n-1)T)^{-1}\|_s \cdots \|F(t_0+T)F(t_0)^{-1}\|_s \\ &\le M\left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Como $t \in [t_0 + nT, t_0 + (n+1)T)$, en particular $n \ge \dfrac{1}{T}(t - t_0) - 1$. Volviendo a la desigualdad anterior, obtenemos

$$\|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s \le M\left(\frac{1}{2}\right)^n \le M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}(t-t_0)-1} = 2Me^{-\frac{\log 2}{T}(t-t_0)},$$

es decir, hemos obtenido (1.18) con $C \equiv 2M$ y $\alpha \equiv \dfrac{\log 2}{T}$. Esto finaliza la prueba del punto (d) y del teorema. ∎

Obsérvese que en el Teorema 1.4.6 hemos probado que, para el sistema lineal (1.14), la estabilidad asintótica uniforme de la solución nula φ_0 equivale a la propiedad (1.18). En el caso de sistemas no lineales como (1.3), sería posible dar una nueva definición de estabilidad donde se ponga de manifiesto la citada propiedad. Esta definición sería:

Definición 1.4.7. *Bajo las condiciones* (1.2)*, se dice que la solución* φ_0 *de* (1.3) *es (un equilibrio) exponencialmente asintóticamente estable si existen constantes* $C > 0$*,* $\gamma \in (0, \rho)$ *y* $\alpha > 0$ *tales que*

(a) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$*, para cualesquiera* $t_0 \in I$ *e* $|y_0| \leq \gamma$*;*

(b) $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq C|y_0|e^{-\alpha(t-t_0)}$*, para cualesquiera* $t_0 \in I$*,* $|y_0| \leq \gamma$ *y* $t \geq t_0$*.* ■

Observación 1.13.

1. Obsérvese que el apartado (d) del Teorema 1.4.6 permite probar la siguiente equivalencia para el **sistema lineal** (1.14):

   "*El equilibrio* φ_0 *de* (1.14) *es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si* φ_0 *es exponencialmente asintóticamente estable*".

2. En el caso de sistemas no lineales como (1.3) que satisfacen las hipótesis (1.2), es fácil comprobar la siguiente implicación:

   "*Si el equilibrio* φ_0 *de* (1.3) *es exponencialmente asintóticamente estable, entonces* φ_0 *es uniformemente asintóticamente estable*".

   Veremos que, en general, la implicación contraria es falsa (salvo, como hemos visto, en el caso de sistemas lineales).

Ejercicio 1.3. Pruébense los puntos 1 y 2 de la observación anterior. ■

Observación 1.14 (**Sistemas lineales no homogéneos**)**.** Terminemos esta sección comentando cuáles son las condiciones equivalentes a la estabilidad cuando consideramos el s.d.o. lineal no homogéneo:

$$y' = A(t)y + b(t), \tag{1.20}$$

donde $A \in C^0(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$ e $I = (\tau, +\infty)$, con $\tau \in [-\infty, \infty)$. En este caso nos podríamos plantear la estabilidad de cualquier solución $\varphi_1 \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$de (1.20) en I:

$$\varphi_1'(t) = A(t)\varphi_1(t) + b(t), \quad \forall t \in I.$$

Como vimos en la Obervación 1.6 basta hacer el cambio $z = y - \varphi_1(t)$ y estudiar la estabilidad de la solución nula φ_0 del nuevo sistema. Evidentemente, este nuevo sistema es el sistema homogéneo (1.14).

En conclusión, la estabilidad, atractividad, etc., de cualquier solución φ_1 de (1.20) equivale a la correspondiente propiedad de la solución nula φ_0 del sistema homogéneo asociado, sistema (1.14). Esta es la razón por la que, por abuso de lenguaje, se habla de la estabilidad, atractividad, etc., del sistema (1.14) (o de (1.20)) sin hacer referencia a ninguna solución del citado sistema. ■

1.5. Aplicación al caso de sistemas lineales de coeficientes constantes

En esta sección estudiaremos el caso particular de sistemas lineales de coeficientes constantes. Consideremos, por tanto, el sistema lineal

$$y' = Ay, \tag{1.21}$$

donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ está dada. Evidentemente el sistema anterior es un sistema autónomo. Por tanto, sabemos que los conceptos de estabilidad equivalen a los correspondientes conceptos uniformes. El objetivo de esta sección es reescribir el Teorema 1.4.6 en el caso del sistema (1.21). Veremos que los conceptos de estabilidad equivalen en este caso a ciertas propiedades de los autovalores de A. De nuevo, enunciaremos el resultado para la solución nula φ_0 de (1.21) en $I = \mathbb{R}$. Se tiene:

Teorema 1.5.1. *Sea $\{\lambda_i\}_{1\le i\le n} \subset \mathbb{C}$ el conjunto de autovalores distintos de la matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, se tiene:*

(I) La solución φ_0 de (1.21) es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si $\Re(\lambda_i) < 0$ para todo $i : 1 \le i \le n$.

(II) La solución φ_0 de (1.21) es uniformemente estable si y sólo si $\Re(\lambda_i) \le 0$ para todo $i : 1 \le i \le n$ y, si para $j : 1 \le j \le n$ se tiene $\Re(\lambda_j) = 0$, entonces las cajas de Jordan asociadas a λ_j tienen dimensión 1 (la multiplicidad geométrica y la multiplicidad algebraica de λ_j coinciden).

Observación 1.15. Teniendo en cuenta que (1.21) es un sistema autónomo, podemos escribir que su solución nula φ_0 es inestable (es decir, no es estable) si y sólo si φ_0 no es uniformemente estable. Del apartado (II) del Teorema 1.5.1 deducimos:

> *"La solución φ_0 de (1.21) es inestable si y sólo existe λ_j, con $1 \le j \le n$, tal que, o bien $\Re(\lambda_j) > 0$, o bien $\Re(\lambda_j) = 0$ y λ_j tiene asociada una caja de Jordan de dimensión mayor o igual a dos."* ■

Demostración: La clave de la demostración está en hallar una matriz fundamental de (1.21) y aplicar el Teorema 1.4.6. Recordemos que, si $\widetilde{J}$ es la forma canónica real de A, entonces existe $\widetilde{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, con $\det \widetilde{P} \neq 0$, tal que $A = \widetilde{P}\widetilde{J}\widetilde{P}^{-1}$. En este caso, una matriz fundamental de (1.21) viene dada por la exponencial matricial

$$\widetilde{F}(t) = e^{tA} = \widetilde{P}e^{\widetilde{J}t}\widetilde{P}^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

o bien

$$F(t) = \widetilde{F}(t)\widetilde{P} = \widetilde{P}e^{\widetilde{J}t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por último, aplicaremos el Teorema 1.4.6 con la norma matricial

$$\|M\| := \|\widetilde{P}^{-1}M\|_s$$

en lugar de la norma matricial $\|\cdot\|_s$ (debido a que $\det \widetilde{P} \neq 0$, es fácil ver que son equivalentes). Por tanto, todo se reduce a estudiar $\|F(t)\| = \|e^{\widetilde{J}t}\|_s$.

Es fácil deducir el resultado sin más que tener en cuenta que los elementos de $e^{\widetilde{J}t}$ son de la forma

$$t^j e^{\Re(\lambda_i)t}\left[a_{ij}\operatorname{sen}(\Im(\lambda_i)t) + b_{ij}\cos(\Im(\lambda_i)t)\right],$$

con $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ y $j \ge 1$, siendo j menor o igual que la mayor dimensión de las cajas de Jordan asociadas a λ_i. ■

Para finalizar esta sección, analicemos el caso particular de la e.d.o. lineal de orden n y coeficientes constantes:

$$y^{n)} + a_1 y^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \quad \text{en } I = \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$. Recordemos que las raíces $\{\mu_i\}_{1\le i\le m} \subset \mathbb{C}$ del polinomio característico

$$p(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mu + a_n$$

proporcionan un sistema fundamental para (1.22). Se tiene:

Teorema 1.5.2. *Sea φ_0 la solución nula en $\mathbb{R}$ de (1.22). Entonces:*

(a) La solución φ_0 de (1.22) es exponencialmente asintóticamente estable si y sólo si $\Re(\mu_i) < 0$ para todo $i : 1 \leq i \leq m$.

(b) La solución φ_0 de (1.22) es uniformemente estable si y sólo si $\Re(\mu_i) \leq 0$ para todo $i : 1 \leq i \leq m$ y, si para $j : 1 \leq j \leq m$ se tiene $\Re(\mu_j) = 0$, entonces μ_j es simple.

La prueba del teorema es una simple aplicación del Teorema 1.5.1.

1.6. Estabilidad de perturbaciones de sistemas lineales

Una vez estudiadas las propiedades de estabilidad de la solución nula φ_0 del s.d.o. lineal (1.14) veamos qué ocurre con las propiedades de estabilidad de sistemas no lineales. En concreto, en esta sección estamos interesados en sistemas no lineales que se escriben como suma de una parte lineal más una "pequeña" (en algún sentido que precisaremos) perturbación no lineal de ese sumando lineal. Como suele ocurrir en otras ocasiones, veremos que si la perturbación es suficientemente "pequeña", las propiedades de estabilidad de la solución nula del problema lineal son heredadas por φ_0 como solución del sistema no lineal. Veamos cuál es el marco en el que trabajaremos:

Consideremos el s.d.o. no lineal

$$y' = A(t)y + g(t, y), \tag{1.23}$$

donde $A \in C^0(\widetilde{I}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $g \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$ para un intervalo $\widetilde{I}$ y un abierto conexo no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ que satisfacen

$$I \times B(0; \rho) \subseteq \Omega \subseteq \widetilde{I} \times \mathbb{R}^N,$$

para $I = (\tau, \infty)$, con $\tau \in [-\infty, \infty)$ y $\rho \in (0, \infty]$.

Supongamos además que $g(t, 0) = 0$ para cualquier $t \in I$. Como en ocasiones anteriores, esta última propiedad asegura que la función $\varphi_0(t) = 0$ es solución del sistema (1.23) en I. Evidentemente, φ_0 es también solución en $\widetilde{I}$ del sistema lineal homogéneo (1.14) asociado.

Se tiene:

Teorema 1.6.1 (Teorema de estabilidad en primera aproximación). *Bajo las condiciones anteriores, se tiene:*

(a) Supongamos que

$$\lim_{|y| \to 0} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0,$$

uniformemente en I, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\mu \in (0, \rho)$ tal que si $|y| \leq \mu$ se tiene $|g(t, y)| \leq \varepsilon |y|$, para todo $t \in I$. Así, si φ_0 es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema lineal (1.14), entonces φ_0 es un equilibrio exponencialmente asintóticamente estable del sistema no lineal (1.23).

(b) Supongamos que $|g(t, y)| \leq \alpha(t)|y|$, para cualesquiera $(t, y) \in I \times B(0; \rho)$, con $\alpha \in C^0(I)$ satisfaciendo

$$\int_\tau^\infty \alpha(t)\, dt < \infty.$$

Así, si φ_0 es un equilibrio uniformemente estable del sistema lineal (1.14), entonces φ_0 es un equilibrio uniformemente estable del sistema no lineal (1.23).

Demostración: Nos centraremos en la prueba del apartado (a). La demostración del apartado (b) sigue las mismas ideas de la prueba del apartado (a).

Ejercicio 1.4. Pruébese el apartado (b) del Teorema 1.6.1. ■

(a) De las hipótesis del enunciado deducimos que, fijado $(t_0, y_0) \in \Omega$, el problema de valores iniciales asociado al sistema (1.23) admite una única solución maximal $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ definida en el intervalo $I(t_0, y_0)$. Nuestro objetivo será comprobar que la solución maximal $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ satisface las dos condiciones de la Definición 1.4.7, es decir, que existen constantes $\widetilde{C} > 0$, $\widetilde{\gamma} \in (0, \rho)$ y $\widetilde{\alpha} > 0$ tales que

(I) $I(t_0, y_0) \supset [t_0, \infty)$, para cualesquiera $t_0 \in I$ e $|y_0| \le \widetilde{\gamma}$;

(II) $|\varphi(t; t_0, y_0)| \le \widetilde{C}|y_0|e^{-\widetilde{\alpha}(t-t_0)}$, para cualesquiera $t_0 \in I$, $|y_0| \le \widetilde{\gamma}$ y $t \ge t_0$.

Sea $F \in C^1(\widetilde{I}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ una matriz fundamental asociada al sistema lineal (1.14). Como la solución φ_0 de (1.14) es uniformemente asintóticamente estable, podemos aplicar la caracterización (1.18) del Teorema 1.4.6 y deducir que existen dos constantes positivas α y C tales que

$$\|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s \le Ce^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t_0 \in \widetilde{I}, \quad \forall t \ge t_0.$$

Para probar (I) y (II) usaremos la siguiente idea: si $(t_0, y_0) \in \Omega$, la solución maximal $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ del problema de Cauchy asociado a (1.23) y condición inicial (t_0, y_0) satisface

$$\begin{cases} \varphi'(t; t_0, y_0) = A(t)\varphi(t; t_0, y_0) + g(t, \varphi(t; t_0, y_0)), & \forall t \in I(t_0, y_0), \\ \varphi(t_0; t_0, y_0) = y_0. \end{cases}$$

Si introducimos la función $b(t) = g(t, \varphi(t; t_0, y_0))$, con $t \in I(t_0, y_0)$, entonces, $b \in C^0(I(t_0, y_0); \mathbb{R}^N)$. Además, podemos ver la función $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ como la solución en $I(t_0, y_0)$ del problema de Cauchy para el sistema *lineal no homogéneo*

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t), & \text{en } I(t_0, y_0), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Usando la fórmula (1.12) para la función b anterior, deducimos

$$\varphi(t; t_0, y_0) = F(t)F(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)F(s)^{-1}g(s, \varphi(s; t_0, y_0))\, ds, \quad \forall t \in I(t_0, y_0).$$

Fijemos $(t_0, y_0) \in I \times B(0; \rho)$ tal que $|y_0| \le \widetilde{\gamma}$, con $\widetilde{\gamma} \in (0, \rho)$ **a determinar**. Por otro lado, fijemos $\varepsilon > 0$ (también **a determinar**). Aplicando la hipótesis del enunciado, existe $\mu \in (0, \rho)$ tal que

$$|g(t, y)| \le \varepsilon|y|, \quad \forall t \in I \text{ y } \forall y_0 : |y| \le \mu. \tag{1.24}$$

Nuestro objetivo será probar que podemos elegir $\widetilde{\gamma} \in (0, \rho)$ y $\varepsilon > 0$ tal que si $|y_0| \le \widetilde{\gamma}$ se tiene:

$$u(t) := |\varphi(t; t_0, y_0)| \le \mu, \quad \forall t \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty).$$

Efectivamente, en primer lugar, se tiene

$$u(t_0) = |y_0| \le \widetilde{\gamma} < \mu$$

siempre que impongamos la desigualdad $\boxed{\widetilde{\gamma} < \mu}$.

Por reducción al absurdo, supongamos ahora que existe $t^* \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty)$ tal que $u(t^*) > \mu$. Utilizando que la función u satisface $u \in C^0(I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty))$, deducimos que existe $T \in [t_0, t^*)$ tal que

$$u(T) = \mu \quad \text{y} \quad u(t) < \mu, \quad \forall t \in [t_0, T) \subset I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty).$$

Sea $t \in [t_0, T]$. Nuestra próxima tarea será acotar $u(t)$. Para ello, utilizaremos la expresión de $\varphi(t; t_0, y_0)$ deducida anteriormente y la hipótesis sobre la matriz fundamental $F(\cdot)$. Así,

$$\begin{cases} u(t) = |\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \|F(t)F(t_0)^{-1}\|_s |y_0| + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|F(t)F(s)^{-1}\|_s |g(s, \varphi(s; t_0, y_0))| \, ds, \\ \qquad \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}|y_0| + C \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} |g(s, \varphi(s; t_0, y_0))| \, ds. \end{cases}$$

Por otro lado, como $t \in [t_0, T]$, también se tiene $u(s) = |\varphi(s; t_0, y_0)| \leq \mu$ para cualquier $s \in [t_0, T]$. Podemos utilizar también la acotación (1.24) y deducir:

$$u(t) \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}|y_0| + C\varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} u(s) \, ds,$$

y de aquí,

$$e^{\alpha t} u(t) \leq Ce^{\alpha t_0}|y_0| + C\varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s} u(s) \, ds, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Obsérvese que podemos aplicar el Lema de Gronwall a la función $v(t) = e^{\alpha t} u(t)$ (función continua y positiva) en el intervalo $[t_0, T]$. Llegamos de este modo:

$$e^{\alpha t} u(t) \leq Ce^{\alpha t_0}|y_0| e^{C\varepsilon(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T],$$

y, de aquí,

$$u(t) \leq C|y_0| e^{-(\alpha - C\varepsilon)(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Finalmente, si tomamos $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2C}$ deducimos la acotación para $u(t) = |\varphi(t; t_0, y_0)|$:

$$u(t) := |\varphi(t; t_0, y_0)| \leq C|y_0| e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T]. \tag{1.25}$$

Aplicando la desigualdad anterior en el punto $t = T$ y teniendo en cuenta que $|y_0| \leq \widetilde{\gamma}$, inferimos

$$\mu = u(T) \leq C|y_0| e^{-\frac{\alpha}{2}(T-t_0)} \leq C\widetilde{\gamma} < \mu,$$

siempre que elijamos $\boxed{\widetilde{\gamma} \in (0, \rho)}$ y $\boxed{\widetilde{\gamma} < \mu/C}$. Llegamos de esta manera a un absurdo.

Resumiendo, hemos tomado $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2C}$ y hemos impuesto tres condiciones sobre $\widetilde{\gamma}$. Así, tomando

$$0 < \widetilde{\gamma} < \text{mín}\left\{\rho, \mu, \frac{\mu}{C}\right\},$$

llegamos a que $u(t) =: |\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \mu \in (0, \rho)$, para cualquier $t \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, \infty)$. Como hemos visto en otras ocasiones, esto implica que $[t_0, \infty) \subset I(t_0, y_0)$. Además, podemos repetir el mismo razonamiento anterior cambiando el intervalo $[t_0, T]$ por el intervalo $[t_0, \infty)$ y deducir que la acotación (1.25) es válida en el intervalo $[t_0, \infty)$. Hemos demostrado, por tanto, las dos condiciones de la Definición 1.4.7. Esto termina la prueba del apartado (a). ■

Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente:

Corolario 1.6.2 (Estabilidad por linealización). *Consideremos un sistema autónomo*

$$y' = f(y) \tag{1.26}$$

con $f \in C^2(B_\rho)$, $f(0) = 0$. Si la matriz jacobiana en $y = 0$, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0)\right)_{ij}$ tiene todos los autovalores con parte real negativa, entonces φ_0 es un equilibrio exponencialmente asintóticamente estable del sistema (1.26).

Demostración: Gracias a la regularidad de f, y usando un desarrollo de $f(y)$ alrededor de $y = 0$, tenemos

$$f(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0)y + g(y),$$

donde

$$\lim_{|y|\to 0} \frac{|g(y)|}{|y|} = 0.$$

Basta ahora aplicar el Teorema 1.6.1. ■

Hay un resultado de inestabilidad por linealización mucho más técnico de demostrar y que no entra en los objetivos de esta asignatura.

Teorema 1.6.3 (Inestabilidad por linealización). *Consideremos el sistema autónomo (1.26) con $f \in C^2(B_\rho)$, $f(0) = 0$. Si la matriz jacobiana en $y = 0$, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0)\right)_{ij}$ tiene algún autovalor con parte real positiva, entonces φ_0 es un equilibrio inestable.*

1.7. Comentarios bibliográficos

Como dijimos anteriormente, los resultados enunciados en la Sección 1.1 pueden ser consultados en [13], [15] o [18].

Por otro lado, hemos seguido principalmente la referencia [14] en lo concerniente a los conceptos de estabilidad, estabilidad de sistemas lineales y estabilidad de sistemas lineales perturbados. ■