Capítulo 2

El Segundo Método de Estabilidad de Liapunov

En este capítulo daremos una introducción al llamado **segundo método de estabilidad de Liapunov**, también llamado **método directo de Liapunov**. El uso de esta nomenclatura quedará claro en lo que sigue: los resultados que presentaremos en el capítulo nos permitirán hacer un estudio de las propiedades de estabilidad de las soluciones del s.d.o. considerado, sin tener que calcular las soluciones maximales del sistema en cuestión.

2.1. Introducción. Funciones de Liapunov

Los resultados de estabilidad que presentamos en este capítulo relacionan la existencia de determinadas funciones reales V (definidas en $B_\rho = B(0,\rho)$, con $\rho \in (0,\infty)$) con las propiedades de estabilidad del sistema diferencial considerado (método directo). El inconveniente de este método radica en que no hay procedimientos generales que permitan calcular las llamadas **funciones de Liapunov**, aunque en los casos de s.d.o. con origen físico, estas funciones están relacionadas con la energía asociada al sistema. De manera general, veremos que si la función V "decrece"(es decir, la energía asociada al sistema decrece), entonces la solución nula es estable (el sistema evoluciona hacia la solución nula).

En el estudio que llevaremos a cabo, nos restringiremos, por comodidad, al caso de sistemas diferenciales autónomos, aunque la mayor parte de los resultados que veremos son fácilmente generalizables al caso no autónomo. Finalmente, es interesante resaltar que muchos de los sistemas diferenciales que modelan fenómenos reales son autónomos.

A lo largo de este capítulo consideremos el s.d.o. autónomo (1.6):

$$y' = f(y),$$

con $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^N$ y $D \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto conexo no vacío. Supondremos también que f y D satisfacen (1.7) para cierto $\rho \in (0,\infty)$ (recordemos que $B_\rho = B(0;\rho)$). Como dijimos más arriba, podemos considerar $\Omega = \mathbb{R} \times D$ como abierto maximal de existencia y unicidad asociado al sistema. Por otro lado, la hipótesis $f(0) = 0$ en particular implica que la función nula $\varphi_0 \equiv 0$ es solución en $I \equiv \mathbb{R}$ de (1.6). Por último, recordemos que, al tratarse de un sistema autónomo, las propiedades de estabilidad de la solución φ_0 de (1.6) equivalen a las correspondientes propiedades uniformes.

Comencemos viendo algunas definiciones.

Definición 2.1.1. *Sean $\rho \in (0,\infty)$ y $V \in C^0(\overline{B}_\rho)$ una función real. Se dice que V es definida positiva en B_ρ si $V(0)=0$ y $V(y)>0$ para cualquier $y \in \overline{B}_\rho \setminus \{0\}$. Del mismo modo, se dice que V es definida negativa en B_ρ si $-V$ es definida positiva en B_ρ.* ■

Ejemplo 2.1. Es fácil comprobar que la función $V(y) = \sum_{i=1}^{N} y_i^2$ es definida positiva en cualquier bola B_ρ.

Por otro lado, es fácil ver que la función de $\mathbb{R}^3$ dada por $V(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + y_2^2$ no es definida positiva (ni negativa) en ninguna bola B_ρ, con $\rho > 0$. ■

Ejemplo 2.2. Como ejemplo, veamos el carácter definido positivo de una importante clase de funciones V. Fijemos $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ una matriz cuadrada y consideremos la función

$$V(y) = y^T B y = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} y_i y_j, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

(y^T representa el vector -fila- transpuesto de y). Obsérvese que $V \in C^0(\overline{B}_\rho)$, para cualquier $\rho > 0$, y $V(0)=0$. Es fácil deducir la siguiente propiedad

> *"La función V es definida positiva en B_ρ, con $\rho > 0$, si y sólo si la matriz B es definida positiva."* ■

Ejercicio 2.1. Pruébese la propiedad anterior.

Ejemplo 2.3. Sea $\rho \in (0,2\pi)$ y consideremos la función $V : B_\rho \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(y_1,y_2) = \frac{1}{2} y_2^2 + k(1-\cos y_1), \quad \forall y = (y_1,y_2) \in B_\rho,$$

con $k>0$ un número real. Veamos que V es definida positiva en B_ρ. Efectivamente, se tiene que $V \in C^0(\overline{B}_\rho)$ y $V(0)=0$. Por otro lado, los dos sumandos de V son positivos, por tanto, $V(y)=0$ si y sólo si $y_2=0$ y $\cos y_1 = 1$, es decir, si y sólo si $y=(2n\pi,0)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Por ser $\rho \in (0,2\pi)$, concluimos

$$V(y) > 0, \quad \forall y \in \overline{B}_\rho \setminus \{0\}.$$

Tenemos que V es definida positiva en B_ρ, siempre que $\rho \in (0,2\pi)$. ■

Continuamos con las definiciones introduciendo el concepto de función de Liapunov para al s.d.o. autónomo (1.6):

Definición 2.1.2. *Sea $V : B_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $V \in C^1(B_\rho)$ $(\rho > 0)$.*

(a) Se denomina derivada respecto del sistema autónomo (1.6) a la función $\dot{V} : B_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) f_i(y), \quad \forall y \in B_\rho.$$

(b) Se dice que $V \in C^1(B_\rho) \cap C^0(\overline{B}_\rho)$ es una función de Liapunov en B_ρ para el sistema autónomo (1.6) si V es definida positiva en B_ρ y

$$\dot{V}(y) \le 0, \quad \forall y \in B_\rho.$$ ■

Observación 2.1. Supongamos que φ es una solución del sistema (1.6) en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ que verifica que $\varphi(t) \in B_\rho$ para cualquier $t \in J$. Entonces, tiene sentido la función compuesta $E(\cdot) = V(\varphi(\cdot))$ definida en J y satisface $E \in C^1(J)$ y (**regla de la cadena**)

$$E'(t) = \frac{d}{dt}\left[V(\varphi(t))\right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varphi(t))\varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varphi(t)) f_i(\varphi_i(t)) = \dot{V}(\varphi(t)), \quad \forall t \in J.$$

Obsérvese que si además V es una función de Liapunov para el sistema (1.6) en B_ρ, entonces tendríamos

$$E'(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \leq 0, \quad \forall t \in J,$$

es decir, $E(t)$ es una función no negativa y decreciente en J. ■

2.2. Condiciones suficientes de estabilidad

En esta sección presentaremos el resultado de estabilidad de la solución nula del sistema autónomo (1.6) usando el método directo de Liapunov. Se tiene:

Teorema 2.2.1 (Condiciones suficientes de estabilidad de Liapunov). *Sean $\rho > 0$, tal que $B_\rho \subseteq D$, y $V \in C^1(\overline{B}_\rho)$ una función de Liapunov en B_ρ para el sistema (1.6). Entonces, se tiene:*

(a) La solución φ_0 de (1.6) en $\mathbb{R}$ es uniformemente estable.

(b) Supongamos además que $\dot{V}$ es definida negativa en B_ρ. Entonces, la solución φ_0 de (1.6) en $\mathbb{R}$ es uniformemente asintóticamente estable.

(c) Finalmente, supongamos que existen constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ tales que

$$c_1|y|^2 \leq V(y) \leq c_2|y|^2 \quad y \quad \dot{V}(y) \leq -c_3|y|^2, \quad \forall y \in B_\rho. \tag{2.1}$$

Entonces, la solución φ_0 de (1.6) en $\mathbb{R}$ es exponencialmente asintóticamente estable.

Demostración:

(a) Comencemos observando que, al tratarse de un sistema autónomo, la estabilidad uniforme de la solución nula de (1.6) equivale a la estabilidad de la misma solución. Por otro lado, utilizando la Proposición 1.3.7, basta comprobar la Definición 1.3.1 (en realidad, la Observación 1.4) para $t_0 = 0$, es decir, hay que probar que para cualquier $\varepsilon \in (0, \rho)$, existe $\delta \in (0, \rho)$ tal que, si $|y_0| \leq \delta$, se tiene

$$|\varphi(t; 0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in I(0, y_0) \cap [0, \infty). \tag{2.2}$$

Antes de empezar la prueba, hagamos la siguiente observación: Dado $y_0 \in B_\rho \subseteq D$, podemos plantear los problemas de Cauchy para el sistema (1.6):

$$(PC) \qquad \begin{cases} y' = f(y) & \text{en } \Omega = \mathbb{R} \times D, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

y

$$(\widetilde{PC}) \qquad \begin{cases} y' = f(y) & \text{en } \widetilde{\Omega} = \mathbb{R} \times B_\rho, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Evidentemente, las hipótesis impuestas a f y D permiten afirmar que (PC) admite una única solución maximal, denotada $\varphi(\cdot;0,y_0)$, definida en $I(0,y_0)$. También se tiene que $(\widetilde{PC})$ tiene una única solución maximal, ahora denotada $\widetilde{\varphi}(\cdot;0,y_0)$, definida en $\widetilde{I}(0,y_0)$. Es fácil comprobar que $(\widetilde{I}(0,y_0),\widetilde{\varphi}(\cdot;0,y_0))$ es solución local de (PC) y, así,

$$\widetilde{I}(0,y_0) \subseteq I(0,y_0) \quad \text{y} \quad \widetilde{\varphi}(t;0,y_0)=\varphi(t;0,y_0), \quad \forall t\in \widetilde{I}(0,y_0). \tag{2.3}$$

Comencemos probando (2.2) con $\widetilde{\varphi}(t;0,y_0)$ e $\widetilde{I}(0,y_0)$ en lugar de $\varphi(t;0,y_0)$ e $I(0,y_0)$.
Fijemos $\varepsilon \in (0,\rho)$ y tomemos

$$\lambda(\varepsilon)=\min_{\varepsilon\le|y|\le\rho} V(y).$$

De las hipótesis del enunciado, deducimos que $\lambda(\varepsilon)>0$. Por otro lado, de la propia definición de $\lambda(\varepsilon)$ es fácil comprobar la siguiente propiedad:
Propiedad (P): *"Sean $\varepsilon\in(0,\rho)$ e $\widetilde{y}\in\overline{B}_\rho$ tales que $V(\widetilde{y})<\lambda(\varepsilon)$. Entonces, $|\widetilde{y}|<\varepsilon$".*

Efectivamente, si en las condiciones de la propiedad **(P)** se tuviera $|\widetilde{y}|\ge\varepsilon$, entonces,

$$\widetilde{y}\in\{y\in\mathbb{R}^N : \varepsilon\le|y|\le\rho\}.$$

De la definición de $\lambda(\varepsilon)$ se deduciría $\lambda(\varepsilon)>V(\widetilde{y})\ge\min_{\varepsilon\le|y|\le\rho}V(y)=\lambda(\varepsilon)$ y llegaríamos a un absurdo.

Probemos ya el primer apartado del teorema. Como V es continua y $V(0)=0$, obtenemos que existe $\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\varepsilon)$ tal que

$$V(y)<\lambda(\varepsilon), \quad \forall y : |y|\le\delta.$$

Sea $y_0\in B_\rho$ con $|y_0|\le\delta$ y consideremos $E(t)=V(\widetilde{\varphi}(t;0,y_0))$, con $t\in\widetilde{I}(0,y_0)$. Obsérvese que tiene sentido la composición y, de hecho, $E\in C^1(\widetilde{I}(0,y_0))$. Repitiendo el cálculo hecho en la Observación 2.1 deducimos

$$E'(t)=\dot{V}(\widetilde{\varphi}(t;0,y_0))\le 0, \quad \forall t\in\widetilde{I}(0,y_0),$$

es decir, la función E es decreciente en $\widetilde{I}(0,y_0)$. Por tanto,

$$V(\widetilde{\varphi}(t;0,y_0))=E(t)\le E(0)=V(y_0)<\lambda(\varepsilon), \quad \forall t\in\widetilde{I}(0,y_0)\cap[0,\infty).$$

De la desigualdad anterior y utilizando la propiedad **(P)** deducimos

$$|\widetilde{\varphi}(t;0,y_0)|\le\varepsilon, \quad \forall t\in\widetilde{I}(0,y_0)\cap[0,\infty).$$

Finalmente, como hicimos en la Observación 1.4, de esta última desigualdad deducimos

$$\widetilde{I}(0,y_0)\supset[0,\infty) \quad \text{y} \quad |\widetilde{\varphi}(t;0,y_0)|\le\varepsilon, \quad \forall t\in[0,\infty).$$

Sin más que utilizar (2.3) deducimos (2.2). Esto prueba el apartado (a).

(b) Supongamos ahora que $V\in C^1(B_\rho)$ es una función de Liapunov en B_ρ para el sistema (1.6) que, además, satisface que $\dot{V}$ es definida negativa en B_ρ. En particular, podemos aplicar el apartado (a) y deducir que la solución nula φ_0 de (1.6) es uniformemente estable. Así, dado $\varepsilon=\rho/2$, existe $\gamma=\delta(\rho/2)\in(0,\rho)$ tal que si $\boxed{|y_0|\le\gamma}$ se tiene

$$I(0,y_0)\supset[0,\infty) \quad \text{y} \quad |\varphi(t;0,y_0)|\le\frac{\rho}{2}, \quad \forall t\ge 0.$$

Demostraremos que si $|y_0| \leq \gamma$, entonces $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t; 0, y_0)| = 0$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.3.7, deducimos que φ_0 es uniformemente atractiva y, por tanto, es uniformemente asintóticamente estable.

Como en el apartado (a), podemos considerar $E(t) = V(\varphi(t; 0, y_0))$, con $t \in [0, \infty)$ y deducir que E está bien definida y satisface $E \in C^1([0, \infty))$ y

$$E'(t) = \dot{V}(\varphi(t; 0, y_0)) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

En particular la función E es positiva y decreciente en $[0, \infty)$. De aquí deducimos que existe

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = \lim_{t\to\infty} V(\varphi(t; 0, y_0)) = \alpha \geq 0.$$

Veamos en primer lugar que $\alpha = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\alpha > 0$. En particular se tiene

$$V(\varphi(t; 0, y_0)) > \frac{\alpha}{2}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Por otro lado, como $V \in C^0(B_\rho)$ y $V(0) = 0$, también deducimos que existe $\mu \in (0, \rho)$ tal que

$$V(y) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \forall y : |y| \leq \mu.$$

Comparando las dos últimas desigualdades, llegamos a que

$$(2.4) \qquad |\varphi(t; 0, y_0)| > \mu, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Teníamos como hipótesis que $\dot{V}$ es definida negativa en B_ρ. Volviendo a la función $E(\cdot)$ y utilizando (2.4) obtenemos

$$E'(t) = \dot{V}(\varphi(t; 0, y_0)) \leq \max_{\mu \leq |y| \leq \rho} \dot{V}(y) = -b(\mu) < 0, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Si tomamos $t \in [0, \infty)$ e integramos la desigualdad anterior en el intervalo $[0, t]$, conseguimos

$$E(t) - E(0) \leq -b(\mu)t, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

es decir,

$$V(\varphi(t; 0, y_0)) = E(t) \leq E(0) - b(\mu)t = V(y_0) - b(\mu)t, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Tomando límite en esta última desigualdad

$$0 < \alpha = \lim_{t\to\infty} E(t) = \lim_{t\to\infty} V(\varphi(t; 0, y_0)) = -\infty,$$

lo que, evidentemente es absurdo. Por tanto, $\lim_{t\to\infty} V(\varphi(t; 0, y_0)) = 0$.

Para acabar, veamos que existe $\lim_{t\to\infty} \varphi(t; 0, y_0) = 0$ y para ello fijemos $\varepsilon \in (0, \rho)$. Consideremos de nuevo la expresión

$$\lambda(\varepsilon) = \min_{\varepsilon \leq |y| \leq \rho} V(y) > 0.$$

Como $\lim_{t\to\infty} V(\varphi(t; 0, y_0)) = 0$, obtenemos que existe $T_\varepsilon > 0$ tal que

$$0 \leq V(\varphi(t; 0, y_0)) < \lambda(\varepsilon), \quad \forall t \geq T_\varepsilon.$$

Utilizando de nuevo la propiedad **(P)** podemos concluir que

$$|\varphi(t; 0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq T_\varepsilon.$$

En definitiva, $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t;0,y_0)| = 0$ y la solución φ_0 de (1.6) es uniformemente atractiva.

(c) Probemos a continuación el tercer punto del resultado. En primer lugar, las hipótesis (2.1) en particular implican que V es una función de Liapunov en B_ρ para el sistema autónomo (1.6). Tenemos así que la solución nula es (uniformemente) estable. Razonando como en el apartado (b), dado $\rho/2 > 0$, existe $\mu \in (0,\rho)$ tal que si $|y_0| \le \mu$ se tiene

$$I(0,y_0) \supset [0,\infty) \quad \text{y} \quad |\varphi(t;0,y_0)| \le \frac{\rho}{2}, \quad \forall t \ge 0.$$

Tomemos por tanto $|y_0| \le \gamma$. Siguiendo el razonamiento del apartado (b) también deducimos que la función $E(t) = V(\varphi(t;0,y_0))$ está bien definida en $[0,\infty)$ y, utilizando las hipótesis (2.1),

$$E'(t) = \dot V(\varphi(t;0,y_0)) \le -c_3|\varphi(t;0,y_0)|^2 \le -\frac{c_3}{c_2}V(\varphi(t;0,y_0)) = -\frac{c_3}{c_2}E(t), \quad \forall t \ge 0. \tag{2.5}$$

Utilizamos ahora el Lema de Gronwall (este resultado fue estudiado en la asignatura **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**; ver también [15], p. 121) para deducir

$$E(t) \le E(0)e^{-\frac{c_3}{c_2}t} = V(y_0)e^{-\frac{c_3}{c_2}t} \le c_2|y_0|^2 e^{-\frac{c_3}{c_2}t}, \quad \forall t \ge 0. \tag{2.6}$$

Hacemos un alto en la demostración del apartado (c) pues merece la pena recordar cómo se obtiene la desigualdad (2.6) de (2.5). Reescribimos (2.5) como

$$E'(t) + \frac{c_3}{c_2}E(t) \le 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Si multiplicamos esta desigualdad por $e^{\frac{c_3}{c_2}t}$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{c_3}{c_2}t}E(t)\right) \le 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Basta con integrar esta desigualdad en el intervalo $[0,t]$ para deducir (2.6).

Continuemos con la prueba. De la desigualdad (2.6) y de las hipótesis (2.1) tenemos:

$$|\varphi(t;0,y_0)|^2 \le \frac{1}{c_1}V(\varphi(t;0,y_0)) = \frac{1}{c_1}E(t) \le \frac{c_2}{c_1}|y_0|^2 e^{-\frac{c_3}{c_2}t}, \quad \forall t \ge 0,$$

es decir,

$$|\varphi(t;0,y_0)| \le C|y_0|e^{-\alpha t}, \quad \forall t \ge 0,$$

con $C = \sqrt{c_2/c_1} > 0$ y $\alpha = c_3/(2c_2)$. Sin más que tener en cuenta la Proposición 1.3.7, de la desigualdad anterior deducimos que para cualesquiera $t_0 \in \mathbb{R}$ e $|y_0| \le \mu$ se tiene que $I(t_0,y_0) \supseteq [t_0,\infty)$ y

$$|\varphi(t;t_0,y_0)| \le C|y_0|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \ge t_0.$$

Tenemos que la solución φ_0 de (1.6) es exponencialmente asintóticamente estable. Esto finaliza la prueba. ∎

Ejemplo 2.4. Volvamos a considerar el ejemplo del péndulo sin rozamiento introducido en el Ejemplo 1.1:

$$x'' + k \operatorname{sen} x = 0, \tag{2.7}$$

donde $k > 0$ es un parámetro positivo. Veamos las propiedades de estabilidad de la solución nula de esta e.d.o. Podemos reescribir de manera equivalente esta e.d.o. como el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2, \\ y_2' = -k \operatorname{sen} y_1, \end{array} \right. \tag{2.8}$$

y las propiedades de estabilidad de la solución nula de la ecuación equivalen a las propiedades de estabilidad de la solución nula φ_0 del sistema (2.8). Obsérvese que la función f que define el s.d.o. anterior satisface las condiciones (1.7) para $D = \mathbb{R}^2$. Apliquemos el Teorema 2.2.1 a este sistema para

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + k(1 - \cos y_1), \quad \forall y = (y_1, y_2) \in B_\pi$$

$(\rho = \pi)$. Claramente V es definida positiva en B_π (Ejemplo 2.3) y además

$$\dot{V}(y) = (k \operatorname{sen} y_1)\, y_2 + y_2\, (-k \operatorname{sen} y_1) = 0, \quad \forall y \in B_\pi.$$

Como consecuencia del Teorema 2.2.1 (a) deducimos que la solución nula del sistema (y de la e.d.o) es uniformemente estable. ■

Ejemplo 2.5. Consideremos ahora el caso del péndulo simple con rozamiento. En este caso el movimiento del péndulo se modela mediante la e.d.o.

$$x'' + \beta x' + k \operatorname{sen} x = 0,$$

donde $k, \beta > 0$ son dos parámetros positivos. La anterior ecuación es equivalente al sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\beta y_2 - k \operatorname{sen} y_1. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Podemos aplicar de nuevo el Teorema 2.2.1 (a) con la función $V(y_1, y_2) = \dfrac{1}{2}y_2^2 + k(1 - \cos y_1)$, definida en B_π, obteniendo en este caso

$$\dot{V}(y) = (k \operatorname{sen} y_1)\, y_2 + y_2\, (-\beta y_2 - k \operatorname{sen} y_1) = -\beta y_2^2 \le 0, \quad \forall y \in B_\pi.$$

Deducimos que la solución nula de (2.9) es uniformemente estable.

Obsérvese que, desde el punto de vista físico, parece razonable que se pueda probar que la solución nula es uniformemente asintóticamente estable (el rozamiento hace que el péndulo tienda a pararse cuando el tiempo tiende hacia infinito). Sin embargo, no es posible aplicar a esta función V el apartado (b) del Teorema 2.2.1 puesto que la función $\dot{V}$ no es definida negativa en ninguna bola B_ρ para ningún $\rho > 0$. Veremos en el próximo tema que, utilizando un resultado distinto, es posible obtener la estabilidad asintótica uniforme de la solución nula del péndulo simple con rozamiento utilizando la función V anterior.

Acabaremos el ejemplo del péndulo simple con rozamiento probando que la solución nula es exponencialmente asintóticamente estable. Utilizaremos para ello el Teorema 1.6.1. Efectivamente, aislando por un lado los términos lineales y por otro los no lineales del sistema (2.9), éste se reescribe como $y' = Ay + g(y)$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k(\operatorname{sen} y_1 - y_1) \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa (para cualquier valor de los parámetros $k, \beta > 0$) y así, la solución nula del sistema lineal $y' = Ay$ es uniformemente asintóticamente estable (Teorema 1.5.2). Por otro lado,

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{|g(y)|}{|y|} = 0,$$

(evidentemente, uniformemente en t) y así, la solución nula del sistema no lineal $y' = Ay + g(y)$ es exponencialmente asintóticamente estable (Teorema 1.6.1). ■

El gran inconveniente de la aplicación al sistema (1.6) del método directo de Liapunov formulado en el Teorema 2.2.1 radica en la búsqueda de una función de Liapunov V asociada al sistema. En sistemas diferenciales que tienen un claro significado físico (como ocurre en los Ejemplos 2.4 y 2.5), estas funciones pueden ser calculadas a partir de la función energía asociada al sistema (ver [14]). En cualquier caso, no existen métodos generales para la construcción de una función de Liapunov asociada al sistema (1.6) y muchas veces hay que aplicar la intuición y el ingenio.

Veamos algún ejemplo más.

Ejemplo 2.6. Comenzamos analizando la llamada ecuación de Newton

$$x'' = -kf(x),$$

donde $k > 0$ es una constante real y $f \in C^1(\mathbb{R})$ es una función dada tal que, para $\rho > 0$, se tiene

$$xf(x) > 0, \quad \forall x \in [-\rho, \rho] \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad f(0) = 0. \tag{2.10}$$

Obsérvese que la ecuación considerada coincide con la ecuación del péndulo cuando $f(x) = \operatorname{sen} x$. Escribamos la ecuación de segundo orden como un s.d.o. de primer orden

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -kf(y_1). \end{cases}$$

Claramente este sistema satisface (1.7) para $D \equiv \mathbb{R}^2$ y podemos analizar las propiedades de estabilidad de la solución nula $\varphi_0 \equiv 0$.

Al igual que en la ecuación del péndulo podemos considerar una función de Liapunov (energía total del sistema) dada por:

$$V(y) = \frac{1}{2}|y_2|^2 + kF(y_1) \quad \text{con} \quad F(y_1) = \int_0^{y_1} f(s)\, ds. \tag{2.11}$$

En la expresión anterior el primer sumando representa la energía cinética del sistema, mientras que el segundo proporciona la energía potencial del fenómeno modelado. Gracias a las hipótesis impuestas a la función f es fácil comprobar que V es una función definida positiva en la bola B_ρ. Además,

$$\dot{V}(y_1, y_2) = kF'(y_1)y_2 + y_2(-kf(y_1)) = kf(y_1)y_2 + y_2(-kf(y_1)) = 0, \quad \forall y \in B_\rho.$$

Deducimos por tanto que V es una función de Liapunov del sistema en la bola B_ρ. Del apartado (a) del Teorema 2.2.1 podemos concluir que el equilibrio φ_0 es uniformemente estable.

Un razonamiento parecido al anterior permite estudiar la estabilidad de la solución nula de la ecuación de Newton con fricción:

$$x'' + \beta\psi(x') = -kf(x)$$

donde $k, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes positivas y $f, \psi \in C^1(\mathbb{R})$ son funciones que satisfacen (2.10) y $\psi(x)x > 0$ para cualquier $x \in [-\rho, \rho] \setminus \{0\}$ $(\rho > 0)$.

En este caso podemos escribir el sistema como

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -kf(y_1) - \beta\psi(y_2). \end{cases}$$

Si consideramos la función de energía V dada por (2.11), deducimos que V es definida positiva en B_ρ. Además, podemos calcular la derivada de V respecto del sistema considerado, obteniendo

$$\dot{V}(y_1, y_2) = -\beta y_2 \psi(y_2) \leq 0, \quad \forall (y_1, y_2) \in B_\rho.$$

De nuevo, del apartado (a) del Teorema 2.2.1 podemos concluir que el equilibrio φ_0 es uniformemente estable. Al igual que en el caso del péndulo con rozamiento, de los resultados del siguiente tema aplicados a V, deduciremos que la solución nula de la ecuación es uniformemente asintóticamente estable (lo que parece físicamente razonable)

Resultados parecidos pueden ser obtenidos en el caso de la ecuación que modela el movimiento de una masa m sujeta a un resorte de constante k, en un medio que ofrece un amortiguamiento de coeficiente C:

$$mx'' + Cx' + kx = 0$$

donde $C \geq 0$, $k > 0$. ■

Ejemplo 2.7. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 + y_2^2 \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_1^3 \cos y_2. \end{cases}$$

De nuevo, si trabajamos en $D \equiv \mathbb{R}^2$, el sistema satisface las condiciones (1.7). Veamos que es posible aplicar el tercer apartado del Teorema de Liapunov (Teorema 2.2.1 (c)) para la función

$$V(y) = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^2.$$

Claramente V es una función definida positiva en cualquier bola B_ρ $(\rho > 0)$. De hecho, V satisface la primera parte de las hipótesis (2.1) para $c_1 = c_2 = 1/2$.

Calculemos la derivada de V respecto del sistema considerado, $\dot{V}$, en $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= y_1\left(-y_1 - y_2 + y_2^2\right) + y_2\left(y_1 - y_2 + y_1^3 \cos y_2\right) = -\left(y_1^2 + y_2^2\right) + G(y) \\ &= -\left(y_1^2 + y_2^2\right)\left(1 - \frac{G(y)}{y_1^2 + y_2^2}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \ y \neq 0, \end{aligned}$$

donde $G(y) = y_1 y_2^2 + y_1^3 y_2 \cos y_2$. Es fácil comprobar que la función G satisface

$$\lim_{|y| \to 0} \frac{G(y)}{y_1^2 + y_2^2} = 0,$$

de donde deducimos la existencia de $\rho > 0$ tal que

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{G(y)}{y_1^2 + y_2^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall y \in B_\rho.$$

Volviendo a la expresión de $\dot{V}$, de la desigualdad anterior deducimos

$$\dot{V}(y) = -\left(y_1^2 + y_2^2\right)\left(1 - \frac{G(y)}{y_1^2 + y_2^2}\right) \leq -\frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right), \quad \forall y \in B_\rho.$$

Esta última desigualdad prueba la segunda condición en (2.1). Por tanto, aplicando el Teorema 2.2.1 (c) obtenemos que la solución nula φ_0 del sistema considerado es exponencialmente asintóticamente estable.

Al igual que en el Ejemplo 2.5, podemos llegar a la misma propiedad de φ_0 aplicando el Teorema 1.6.1 (pruébese como **ejercicio**). ■

Ejemplo 2.8. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - \alpha y_2 - y_1^2 \operatorname{sen} y_2 \\ y_2' = \beta y_1 - y_2 + y_2 y_1, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta > 0$ dos constantes positivas. De nuevo podemos trabajar en $D \equiv \mathbb{R}^2$ y claramente el sistema satisface las condiciones (1.7). Ahora aplicaremos el Teorema 2.2.1 para una función V ligeramente distinta a la considerada en el Ejemplo 2.7:

$$V(y) = \frac{1}{2}\left(ay_1^2 + by_2^2\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^2,$$

donde a y b son dos constantes positivas que elegiremos convenientemente. Obsérvese en primer lugar que V es una función definida positiva en B_ρ para cualquier $\rho > 0$. De hecho, si llamamos $C_1 = \min\{a, b\}$ y $C_2 = \max\{a, b\}$, se tiene que

$$\frac{C_1}{2}|y|^2 \leq V(y) \leq \frac{C_2}{2}|y|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Tenemos por tanto la primera parte de (2.1).

Calculemos la derivada de V respecto del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= ay_1\left(-y_1 - \alpha y_2 - y_1^2 \operatorname{sen} y_2\right) + by_2\left(\beta y_1 - y_2 + y_2 y_1\right) \\ &= -ay_1^2 - by_2^2 + (b\beta - a\alpha)y_1 y_2 + G(y), \end{aligned}$$

donde $G(y) = by_1 y_2^2 - ay_1^3 \operatorname{sen} y_2$.

De nuevo, nuestro objetivo será elegir $\rho > 0$ y constantes positivas a y b para que $\dot{V}$ satisfaga la última hipótesis de (2.1). En primer lugar, tomamos a y b tal que $b\beta - a\alpha = 0$, p.e., $a = \beta$ y $b = \alpha$. Con esta elección tenemos

$$V(y) = \frac{1}{2}\left(\beta y_1^2 + \alpha y_2^2\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^2,$$

y

$$\dot{V}(y) = -\beta y_1^2 - \alpha y_2^2 + G(y) = -\left(\beta y_1^2 + \alpha y_2^2\right)\left(1 - \frac{G(y)}{\beta y_1^2 + \alpha y_2^2}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^2.$$

Como en el ejemplo anterior podemos escribir

$$\lim_{|y| \to 0} \frac{G(y)}{\beta y_1^2 + \alpha y_2^2} = 0,$$

y de nuevo, existe $\rho > 0$ tal que

$$\left|\frac{G(y)}{\beta y_1^2 + \alpha y_2^2}\right| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall y \in B_\rho.$$

Volviendo a la expresión de $\dot{V}$, se tiene

$$\dot{V}(y) \leq -\frac{1}{2}\left(\beta y_1^2 + \alpha y_2^2\right) \leq -\frac{1}{2}\min\{\alpha, \beta\}\left(y_1^2 + y_2^2\right), \quad \forall y \in B_\rho.$$

Tenemos así probada la última parte de la hipótesis (2.1). De la aplicación del Teorema 2.2.1 (c) inferimos que la solución nula φ_0 del sistema considerado es exponencialmente asintóticamente estable.

Como en ejemplos anteriores, podemos llegar a la misma propiedad de φ_0 aplicando el Teorema 1.6.1 (**ejercicio**). ■

2.3. Una condición suficiente de inestabilidad. Teorema de Tchetaev

En esta sección estudiaremos el Teorema de Tchetaev. Este resultado da una condición suficiente que permite establecer la inestabilidad de la solución nula φ_0 de (1.6). Se tiene:

Teorema 2.3.1. *Supongamos que existen $\rho > 0$ y $V \in C^1(\overline{B}_\rho)$ tales que $B_\rho \subseteq D$ y*

(a) $V(0) = 0$,

(b) $\dot{V}$ es definida positiva en B_ρ,

(c) Para cualquier $\sigma \in (0, \rho)$ existe $y_\sigma \in B_\sigma$ tal que $V(y_\sigma) > 0$.

Entonces, la solución nula φ_0 de (1.6) es inestable.

Demostración: Razonaremos por contradicción. Supongamos que el equilibrio φ_0 de (1.6) es estable. En particular, si tomamos $\varepsilon = \rho/2 > 0$, existe $\delta = \delta(\rho/2) \in (0, \rho)$ tal que si $|y_0| \leq \delta$ se tiene

$$I(0, y_0) \supset [0, \infty) \quad \text{y} \quad |\varphi(t; 0, y_0)| \leq \frac{\rho}{2}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si utilizamos la condición (c) con $\sigma = \delta$ deducimos la existencia de $y_\delta \in B_\delta$ tal que $\boxed{V(y_\delta) > 0}$. A partir de ahora y para llegar a una contradicción, trabajaremos con y_δ. De la propiedad anterior, podemos definir

$$E(t) = V(\varphi(t; 0, y_\delta)), \quad \forall t \in [0, \infty),$$

función que está bien definida en $[0, \infty)$ y satisface $E \in C^1([0, \infty))$.

Utilizando la condición (b), tenemos que $\dot{V}$ es definida positiva en B_ρ. Como en ocasiones anteriores, es fácil comprobar

$$E'(t) = \dot{V}(\varphi(t; 0, y_\delta)) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Así, la función $E(\cdot)$ es creciente en $[0, \infty)$, es decir

$$V(\varphi(t; 0, y_\delta)) = E(t) \geq E(0) = V(y_\delta) > 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.12}$$

Utilizamos ahora que $V \in C^0(B_\rho)$ y que $V(0) = 0$. Dado $V(y_\delta) > 0$, existe $\alpha \in (0, \rho)$ tal que

$$V(y) \leq \frac{1}{2} V(y_\delta), \quad \forall |y| \leq \alpha.$$

Si comparamos esta última desigualdad con (2.12), deducimos

$$|\varphi(t; 0, y_\delta)| > \alpha > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Volviendo a la expresión de E', tenemos

$$E'(t) = \dot{V}(\varphi(t; 0, y_\delta)) \geq \min_{\alpha \leq |y| \leq \rho} \dot{V}(y) = a(\alpha) > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Integrando esta última expresión entre 0 y t llegamos a $E(t) - E(0) \geq a(\alpha)t$, para cualquier $t \geq 0$, es decir,

$$V(\varphi(t; 0, y_\delta)) \geq V(y_\delta) + a(\alpha)t, \quad \forall t \geq 0.$$

Obsérvese que esta última desigualdad dice que la función $V(\varphi(t; 0, y_\delta))$ no está acotada en $[0, \infty)$. Pero esto es **absurdo**, pues si hacemos $M = \max_{y \in \overline{B}_{\rho/2}} V(y)$, se tiene

$$0 \leq V(y_\delta) + a(\alpha)t \leq V(\varphi(t; 0, y_\delta)) \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Por tanto la solución φ_0 de (1.6) no puede ser estable. Tenemos así la prueba del resultado. ■

Veamos algún ejemplo de aplicación del Teorema de Tchetaev.

Ejemplo 2.9. Comencemos viendo que la solución estacionaria $\varphi_1(t) = \pi$, $t \in \mathbb{R}$, del péndulo (ver (2.7)) es inestable. En primer lugar, hagamos el cambio de variable $z = x - \varphi_1(t) = x - \pi$ en (2.7), obteniendo la e.d.o.

$$z'' - k \operatorname{sen} z = 0 \quad (\text{con } k > 0).$$

Nuestro objetivo será probar que la solución nula de esta ecuación es inestable. Para ello aplicaremos el Teorema 2.3.1. Podemos escribir la ecuación en forma de sistema como

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = k \operatorname{sen} y_1 = k y_1 + k\left(-y_1 + \operatorname{sen} y_1\right). \end{cases}$$

Para aplicar el Teorema de Tchetaev, trabajemos con la función

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\left(\alpha y_1^2 + \beta y_2^2\right) + \gamma y_1 y_2,$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tres constantes a determinar. Veamos que es posible elegir las constantes para que V satisfaga los puntos (a), (b) y (c) del Teorema 2.3.1. Evidentemente $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y satisface la hipótesis (a). Veamos que también se tiene (b). Comencemos calculando $\dot{V}$:

$$\dot{V}(y_1, y_2) = \gamma k y_1^2 + (\alpha + \beta k)\, y_1 y_2 + \gamma y_2^2 + k\left(-y_1 + \operatorname{sen} y_1\right)\left(\gamma y_1 + \beta y_2\right).$$

Elijamos, por ejemplo, $\alpha = k$, $\beta = -1$ y $\gamma = 1$. Con esta elección obtenemos

$$\dot{V}(y_1, y_2) = k y_1^2 + y_2^2 + k\left(-y_1 + \operatorname{sen} y_1\right)(y_1 - y_2) = \left(k y_1^2 + y_2^2\right)\left[1 + G(y_1, y_2)\right],$$

donde G es la función

$$G(y_1, y_2) = \frac{k\left(-y_1 + \operatorname{sen} y_1\right)(y_1 - y_2)}{k y_1^2 + y_2^2},$$

función que claramente satisface $\lim_{|y|\to 0} G(y_1, y_2) = 0$. Recordemos que nuestro objetivo es comprobar el apartado (b) del Teorema 2.3.1. Así, tomando $\varepsilon = 1/2$, existe $\rho > 0$ tal que

$$-\frac{1}{2} \leq G(y_1, y_2) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall (y_1, y_2) \in B_\rho.$$

Volviendo a la expresión de $\dot{V}$ obtenemos

$$\dot{V}(y_1, y_2) \geq \frac{1}{2}\left(ky_1^2 + y_2^2\right), \quad \forall (y_1, y_2) \in B_\rho,$$

y por tanto, $\dot{V}$ es definida positiva en B_ρ. Tenemos así el apartado (b) del Teorema 2.3.1.

Finalmente, se tiene $V(y_1, 0) = \frac{k}{2} y_1^2$, de donde es fácil deducir que V satisface también el apartado (c) del Teorema de Tchetaev.

Podemos concluir que la solución estacionaria $\varphi \equiv \pi$ de la e.d.o. (2.7) es inestable. ■

Ejercicio 2.2. Demuéstrese que la solución estacionaria $\varphi_1(t) = \pi$, $t \in \mathbb{R}$, del péndulo con rozamiento

$$x'' + \beta x' + k \operatorname{sen} x = 0,$$

donde $k, \beta > 0$ son dos parámetros positivos, es inestable. ■

Terminemos el capítulo con otro ejemplo de aplicación del Teorema 2.3.1.

Ejemplo 2.10. Consideramos el sistema plano

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = y_2 + y_2^2. \end{cases}$$

Se puede comprobar que el sistema satisface las condiciones (1.7), con $D \equiv \mathbb{R}^2$, y que $\varphi_0 \equiv 0$ es solución en $\mathbb{R}$ del sistema. Estudiemos sus propiedades de estabilidad. En este caso, nuestro objetivo va a ser aplicar el Teorema de Tchetaev para probar que φ_0 es inestable. Consideremos

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\left(-y_1^2 + y_2^2\right),$$

que claramente satisface $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $V(0) = 0$. Comprobemos el resto de condiciones de Teorema 2.3.1:

$$\dot{V}(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + y_2^3 = \left(y_1^2 + y_2^2\right)\left[1 + \frac{y_2^3}{y_1^2 + y_2^2}\right] = \left(y_1^2 + y_2^2\right)\left[1 + G(y_1, y_2)\right].$$

Se tiene $\lim_{|y|\to 0} |G(y_1, y_2)| = 0$ y, así, como en ocasiones anteriores, dado $\varepsilon = 1/2$, existe $\rho > 0$ tal que

$$-\frac{1}{2} \leq G(y_1, y_2) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Volviendo a la expresión de $\dot{V}$ deducimos

$$\dot{V}(y_1, y_2) \geq \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right), \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Hemos comprobado por tanto el apartado (b) del Teorema 2.3.1.

Finalmente, se tiene que $V(0, y_2) = y_2^2/2$ de donde deducimos el último punto del Teorema de Tchetaev. Como consecuencia, se tiene que la solución nula del sistema considerado es inestable. ■

2.4. Resultados adicionales y comentarios bibliográficos

En la redacción de este tema hemos vuelto a seguir la referencia [14] pero también de manera importante la referencia [18]. En estos dos libros aparecen varios ejemplos de e.d.o. y s.d.o. con origen en Física y otras Ciencias a los que se le pueden aplicar los resultados del tema.

Por otro lado, hemos presentado el segundo método de estabilidad de Liapunov en el caso del sistema autónomo (1.6). Sin embargo, no es difícil generalizar los resultados de estabilidad/inestabilidad vistos en este tema al caso de un sistema general como (1.3). Para el lector interesado, véanse por ejemplo [14] y [18]. ■