PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES
Curso 2020/21

BLOQUE I: Introducción a la teoría de estabilidad.

1. Se considera la e.d.o. lineal $y' = (6t \operatorname{sen} t - 2t)y$ en $I \equiv \mathbb{R}$.

   (a) ¿Es $\varphi_0 = 0$ asintóticamente estable?

   (b) ¿Es $\varphi_0 = 0$ uniformemente estable?

2. Se considera la e.d.o. lineal de segundo orden $y'' + \dfrac{2y'}{t+1} = 0$ en $I \equiv (-1, \infty)$. ¿Es la solución nula estable? ¿Es asintóticamente estable? ¿Es uniformemente estable?

3. (a) Estudiar la estabilidad de la solución nula de la ecuación $y' = -y^2$.

   (b) Estudiar la estabilidad de la solución $\varphi(t) = e^{-2t}$ de la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 0$.

4. Estudiar si la solución nula es estable, asintóticamente estable o inestable en los casos siguientes:

   (a) $y'' + 2ky' + \alpha^2 y = 0$, donde $k > 0$ y $\alpha \neq 0$ son constantes.

   (b) $y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y.$

5. Se considera el s.d.o. $y' = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$. Demuéstrese que la solución nula es inestable aunque la matriz de los coeficientes posee (para cualquier $t \in \mathbb{R}$) el autovalor -1 doble. Justificar la respuesta.

6. (a) Se considera la ecuación $y' = y(1-y)$. Demuéstrese que la solución nula es inestable y la solución $\varphi(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, es asintóticamente estable.

   (b) Demuéstrese que la solución nula de la ecuación $y' = y(y^2 - 1)$ es asintóticamente estable.

7. (a) Demuéstrese que la solución nula de la e.d.o. $y' = (-2 + \operatorname{sen} t)y$, con $I = \mathbb{R}$, es exponencialmente asintóticamente estable.

   (b) ¿Es también exponencialmente asintóticamente estable la solución nula de la ecuación $y' = (-2 + \operatorname{sen} t)y + y \operatorname{sen} y$? Razónese.

8. Estúdiense las propiedades de estabilidad de la solución trivial de:

   (a) $y' = \left(-1 + \dfrac{1}{t+1}\right) y$; (b) $\begin{cases} y_1' = -y_2 - y_1^3 \\ y_2' = y_1 - y_2^3 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} y_1' = -y_1 y_2^4 \\ y_2' = y_2 y_1^4 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2^3 \end{cases}$.

9. Consideramos la e.d.o. de segundo orden $y'' + \alpha^2 y = f(t)$, con $\alpha \neq 0$ y $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\int_0^\infty |f(t)|\, dt < \infty.$$

   Demuéstrese que si φ es solución de la ecuación anterior, entonces $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (|\varphi(t)| + |\varphi'(t)|) < +\infty$.

10. Sea $A \in C^0([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ tal que la solución nula de $y' = A(t)y$ es uniformemente asintóticamente estable. Sea $B \in C^0([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ tal que $\lim_{t \to \infty} \|B(t)\| = 0$. Demuéstrese que, entonces, la solución nula de $y' = (A(t) + B(t))y$ es también uniformemente asintóticamente estable.

11. Estúdiese la estabilidad de la solución $\varphi_0 \equiv 0$ para los s.d.o. siguientes usando, cuando se indique, la función V correspondiente:

(a) $\begin{cases} y_1' = -y_2 + y_1(a^2 - y_1^2 - y_2^2) \\ y_2' = y_1 + y_2(a^2 - y_1^2 - y_2^2) \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$ dado; (b) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2^3 \\ y_2' = -4y_2 + y_1^3 \end{cases}$ $V = 4y_1^2 - 3y_2^2$;

(c) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2^3 \\ y_2' = y_2 + y_1^2 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}(y_1^2 + y_2^2 - 1)^2 \\ y_2' = -y_1 + y_2(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}(y_1^2 + y_2^2 - 1)^2 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2^2 \\ y_2' = -y_2 + y_1 y_2 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} y_1' = -6y_2 - \frac{1}{4}y_1 y_2^2 \\ y_2' = 4y_1 - \frac{1}{6}y_2 \end{cases}$ $V = 2y_1^2 + 3y_2^2$;

(g) $y'' + \alpha y' + \beta y^3 + y = 0$ con $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ dados; (h) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 8\,\mathrm{sen}\, y_2 \\ y_2' = 2 - e^{y_1} - 3y_2 - \cos y_2 \end{cases}$;

(i) $\begin{cases} y_1' = -4y_2 - y_1^3 \\ y_2' = 3y_1 - y_2^3 \end{cases}$.

12. Dada la e.d.o. $y'' + \left(\dfrac{ty^2}{1+t^2} + 1 \right) y' + y = 0$, se pide:

    (a) Escribirla como un sistema diferencial ordinario equivalente de primer orden y dimensión 2.

    (b) Analizar la estabilidad de la solución nula de dicho sistema.

13. Demuéstrese que la solución nula de $y'' + (1 - y^2)y^2 y' + \dfrac{1}{2} y = 0$ es uniformemente asintóticamente estable.

14. ¿Es la solución nula de $y'' + y^2 y' + y = 0$ uniformemente asintóticamente estable? Razónese.

15. Dada la e.d.o. $y'' + a(y^2 - 1)y' + y = 0$, con $a < 0$, escribirla como un sistema y estúdiese si la solución nula de dicho sistema es estable y atractiva.

16. Se considera el s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_1^3 y_2^2 \\ y_2' = -y_2. \end{cases} \tag{1}$$

    Se pide:

    (a) Demuéstrese que la solución nula de (1) es exponencialmente asintóticamente estable.

    (b) Demuéstrese que

$$\Gamma = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \le \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

    es positivamente invariante para (1). ¿Contiene Γ alguna órbita cíclica no trivial de (1)? ¿Quién es $\Lambda^+(y_0)$ para $y_0 \in \Gamma$? Razónese.

17. Estúdiese la estabilidad de la solución nula de

$$\begin{cases} y_1' = -y_2(y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \\ y_2' = y_1(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}. \end{cases}$$

18. Demuéstrese que la solución nula de la e.d.o.

$$y'' + (1 - y^2)y' + y = 0$$

    es exponencialmente asintóticamente estable

19. Demuéstrese que la solución nula de la e.d.o.

$$y'' + (1 - y^4)y' + y = 0$$

    es exponencialmente asintóticamente estable

20. Usando el teorema de LaSalle, demuéstrese que la solución nula de la e.d.o.

$$y'' + (1-y)(y')^3 + y = 0$$

es uniformemente asintóticamente estable.

21. Usando el teorema de LaSalle y la función $V(y_1, y_2) = \dfrac{1}{2}y_2^2 + 1 - \cos y_1$, demuéstrese que la solución nula del s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\operatorname{sen} y_1 - y_2 \cos y_1, \end{cases}$$

es uniformemente asintóticamente estable.

22. Usando la función $V(y_1, y_2) = 4y_1^2 - y_2^2$, demuéstrese que la solución nula del s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2^2, \\ y_2' = -4y_2 + y_1 y_2, \end{cases}$$

es inestable.

23. Demuéstrese que el conjunto $\Gamma = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 > 0 \ y_2 > 0\}$ es invariante para el s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2^2(1 - \cos y_1), \\ y_2' = -y_2 + y_1 \operatorname{sen} y_2 . \end{cases}$$

24. Usando el teorema de Poincaré-Bendixson, demuéstrese que la e.d.o.

$$y'' + (y')^3 \log\left(y^2 + 4(y')^2\right) + y = 0,$$

posee soluciones periódicas no triviales.

25. Se considera el sdo autónomo

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_1(4y_1^2 + y_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 9), \\ y_2' = -y_1 + y_2(4y_1^2 + y_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 9). \end{cases} \tag{2}$$

Se pide:

(a) Determinar los puntos críticos de (2) y analizar la estabilidad de los mismos.

(b) Demostrar que este sistema posee al menos dos órbitas cíclicas no degeneradas.

26. Se considera el s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_1^3 - y_1 y_2^2, \\ y_2' = y_2 - y_2^3 - y_2 y_1^2. \end{cases} \tag{3}$$

(a) ¿Es $\Gamma = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = 1\}$ invariante respecto de (3)?

(b) ¿Posee (3) órbitas cíclicas no triviales? Razónese.

27. Se considera el s.d.o. autónomo

$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 + y_1(y_1^2 + 4y_2^2 - 4)(y_1^2 + 4y_2^2 - 16), \\ y_2' = -y_1 + y_2(y_1^2 + 4y_2^2 - 4)(y_1^2 + 4y_2^2 - 16). \end{cases}$$

Hállense sus puntos críticos, órbitas cíclicas y los conjuntos $\Lambda^+(y_{0_1}, y_{0_2})$ y $\Lambda^-(y_{0_1}, y_{0_2})$.

28. Dado el s.d.o. autónomo

$$\begin{cases} y_1' = y_1, \\ y_2' = -y_2 + y_1^3, \end{cases}$$

realizar un análisis del comportamiento de sus órbitas en un entorno del punto crítico.

29. Igual que el ejercicio anterior para el sistema $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2^2, \\ y_2' = y_2\,. \end{cases}$

30. Pruébese que el conjunto $\Gamma = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 > 0,\ y_2 > 0\}$ es invariante para el s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = y_1^2 + y_2 \operatorname{sen} y_1, \\ y_2' = -1 + y_1 y_2 + (y_2 - 1)^2\,. \end{cases}$$

31. Igual que el ejercicio anterior para el conjunto $\Gamma = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 > 0\}$ y para el sistema:

$$\begin{cases} y_1' = 1 + y_1^2 + y_2^2, \\ y_2' = y_1 y_2 + \tan y_2. \end{cases}$$

32. Sea $(y_1(t), y_2(t))$ una solución del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_1^2, \\ y_2' = y_1 + y_2^2\,. \end{cases}$$

Demuéstrese que si $y_1(t_0) \neq y_2(t_0)$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces $y_1(t) \neq y_2(t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

33. Consideremos el s.d.o. autónomo

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_1 \cos(y_1^2 + y_2^2), \\ y_2' = -y_1 + y_2 \cos(y_1^2 + y_2^2). \end{cases}$$

Hállense sus puntos críticos, órbitas cíclicas y los conjuntos $\Lambda^+(y_{0_1}, y_{0_2})$ y $\Lambda^-(y_{0_1}, y_{0_2})$.

34. Analícese la estabilidad de la solución nula de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_1^2 y_2, \\ y_2' = -5y_2 + 3y_1 y_2^2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_2 - y_1 \cos y_1. \end{cases}$

35. Se considera el sistema autónomo

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 - y_1(y_1^2 + 4y_2^2 - 1), \\ y_2' = y_1 - y_2(y_1^2 + 4y_2^2 - 1). \end{cases} \tag{4}$$

Se pide:

(a) Determinar los puntos críticos de (4).

(b) Analizar las propiedades de estabilidad de dichos puntos críticos.

(c) ¿Existen órbitas cíclicas no degeneradas del sistema (4) en la bola

$$B_{1/2} = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \left(y_1^2 + y_2^2\right)^{1/2} < \frac{1}{2}\right\}?$$

Justifíquese la respuesta.

(d) ¿Y en $F = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \left(y_1^2 + y_2^2\right)^{1/2} > 1\}$? Justifíquese la respuesta.

(e) Para $(y_{01}, y_{02}) \in B_{1/2}$, determinar de forma razonada $\Lambda^-(y_{01}, y_{02})$, y deducir en qué corona de la forma $K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \left(y_1^2 + y_2^2\right)^{1/2} \leq \beta\}$ ha de encontrarse $\Lambda^+(y_{01}, y_{02})$.

36. Analícense las propiedades de estabilidad de la solución nula en los siguientes casos

(a) $y' = \left(\dfrac{1}{(1+t)^4} - 3\right) y$, (b) $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2^5, \\ y_2' = -2y_2 + y_2^3, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y_1' = -4y_2 - 7y_1^5, \\ y_2' = 3y_1 - 3y_2^7. \end{cases}$