# ANÁLISIS FUNCIONAL Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Grado de Matemáticas

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

E. Fernández Cara

# Índice general

# Introducción

El objetivo principal de estas Notas es presentar los fundamentos de la teoría moderna de ecuaciones en derivadas parciales (en lo que sigue EDPs).

De forma bastante imprecisa, diremos que una EDP es una igualdad en la que la incógnita es una función de dos o más variables independientes y en la que aparecen derivadas parciales de ésta. Se denomina *orden* de la EDP al mayor de todos los órdenes de estas derivadas.

Por ejemplo, si aceptamos que $u = u(x_1, x_2)$ es una función desconocida (la incógnita), entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u(1-u)$$

son EDPs de segundo orden (se trata de EDPs de gran importancia en las aplicaciones). Por otra parte,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial^2 x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0$$

y

$$\operatorname{sen} u + \exp\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$$

son EDPs de cuarto orden.

La resolución de problemas ligados a EDPs puede llevarse a cabo bajo dos enfoques diferentes. El enfoque "clásico" utiliza las herramientas fundamentales del Cálculo Diferencial y proporciona, cuando es posible, funciones que son soluciones en un sentido habitual. Esto es, funciones con derivadas parciales del orden adecuado que verifican las EDPs consideradas "puntualmente", en todos los puntos de una región apropiada. Desgraciadamente, este enfoque sólo conduce a reultados satisfactorios bajo condiciones muy restrictivas.

Como alternativa a este punto de vista, encontramos el enfoque "moderno", que reposa sobre la siguiente idea: generalizamos el concepto de función, apareciendo las *distribuciones;* seguidamente, aceptamos que una solución es una distribución que verifica identidades adecuadas, donde conseguimos (entre otras ventajas) rebajar el orden de las derivadas. Se suele decir que estamos considerando soluciones *débiles.* Si este proceso se lleva a cabo de manera correcta, se consigue resolver un número mucho mayor de problemas ligados a EDPs. Por otra parte, en muchas ocasiones, en una segunda etapa es posible probar resultados de *regularidad* que muestran que la solución débil encontrada es realmente una solución "clásica".

En estas Notas, adoptaremos el punto de vista de la teoría moderna, en el contexto de varias EDPs de naturaleza y propiedades distintas. Para ello, será preciso probar previamente varios resultados de carácter abstracto, propios del Análisis Funcional: teoría elemental de operadores lineales continuos en espacios de Banach, teorema de Lax-Milgram, teoría espectral de operadores compactos, etc.

El énfasis principal se ha puesto en las ecuaciones de Poisson, del calor y de ondas (las representantes "canónicas" de las EDPs lineales de segundo orden). Se ha intentado aclarar que, para cada una de ellas, tiene sentido considerar problemas de naturaleza distinta. En la medida de lo posible, se indica además el papel que juegan estas EDPs en las aplicaciones.

# Notación y abreviaturas

EDP: ecuación en derivadas parciales.

EDO: ecuación diferencial ordinaria.

$\mathbb{R}$: cuerpo de los números reales.

$\mathbb{R}_+$: conjunto de los números reales positivos.

$\mathbb{R}^N_+$: el conjunto $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$.

$\Omega$, $G$, $U$, $\mathcal{O}$: abiertos de $\mathbb{R}^N$.

$\partial A$: *frontera* del conjunto $A$.

$n(x)$: vector normal unitario en $x \in \partial\Omega$, dirigido hacia el exterior de $\Omega$.

$d\Gamma$: elemento de integración sobre $\partial\Omega$ (véase el Apéndice al Tema 2).

$1_G$: función característica de $G$; vale 1 en $G$ y 0 en su complementario.

$\delta_{ij}$ : *delta de Kronecker*; $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si no.

$C^0(U)$: espacio de las funciones $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}$ que son continuas.

$C^k(U)$: subespacio de $C^0(U)$ formado por las funciones $k$ veces continuamente diferenciables.

$C^\infty(U)$: intersección de todos los $C^k(U)$ con $k \geq 1$.

$C^\omega(U)$: subespacio de $C^\infty(U)$ formado por las funciones analíticas.

$\operatorname{sop}\varphi$: *soporte* de la función $\varphi$; se trata de la adherencia del conjunto de puntos donde $\varphi$ no se anula.

$C^k_c(\Omega)$: subespacio de $C^k(\Omega)$ formado por las funciones de soporte compacto contenido en $\Omega$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones de soporte compacto contenido en $\Omega$.

$C^k_c(\overline{\Omega})$: subespacio de $C^k(\overline{\Omega})$ formado por las funciones de soporte compacto (contenido en $\overline{\Omega}$).

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$: subespacio de $C^\infty(\overline{\Omega})$ formado por las funciones de soporte compacto.

c.p.d.: "casi por doquier"; se usa para indicar que una propiedad se verifica en todo punto salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.

$N(A)$ y $R(A)$, con $A \in \mathcal{L}(H;G)$: el núcleo y el rango de un operador dado; se tiene que $N(A) = \{\, h \in H : Ah = 0 \,\}$ y $R(A) = \{\, Ah : h \in H \,\}$.

$\ell^p$, con $1 \leq p < +\infty$: espacio de las sucesiones $p$-sumables.

$\ell^\infty$: espacio de las sucesiones acotadas.

Denotaremos $|\cdot|$ la norma Euclídea de $\mathbb{R}^N$ y $B(x_0;r)$ (resp. $\overline{B}(x_0;r)$) la bola abierta (resp. cerrada) de centro $x_0$ y radio $r$. En ocasiones, dado un espacio normado $X$, $B_X$ denotará la correspondiente bola unidad cerrada.

# Capítulo 1

# Generalidades

En estas Notas, nos centraremos casi exclusivamente en EDPs de segundo orden. En este Tema, veremos que muchas EDPs de segundo orden aparecen de manera natural cuando se intenta describir fenómenos reales de diversa naturaleza. También, hablaremos por primera vez de soluciones clásicas y soluciones generalizadas e interpretaremos su significado.

## 1.1. Motivación. Las EDPs como herramientas para la descripción de fenómenos reales

### 1.1.1. Definiciones fundamentales

**Definición 1.1** *Sea $N \geq 1$ un entero. Una EDP de segundo orden en las $N$ variables independientes $x_1, x_2, \dots x_N$ es una expresión de la forma*

$$F\left(x_1, \dots, x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right) = 0, \qquad (1.1)$$

*donde $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{N^2+2N+1} \mapsto \mathbb{R}$ es una función dada (aquí, $\mathcal{O}$ es un abierto no vacío). A la incógnita $u$ se le suele llamar también variable dependiente.*

Por simplicidad, acortaremos habitualmente la notación, poniendo

$$x = (x_1, \dots, x_N), \quad u = u(x), \quad \nabla u = Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$$

(el *gradiente* de $u$) y

$$D^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$$

(el *Hessiano* de $u$). Con esta notación, la EDP (1.1) se escribe

$$F(x, u, Du, D^2 u) = 0. \qquad (1.2)$$

Desgraciadamente, a diferencia de lo que sucede con las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), no es posible desarrollar una teoría general de EDPs de segundo orden. Lo que sí pueden ser desarrolladas son teorías particulares, aplicables a determinados “tipos” de EDPs.

Con frecuencia, se usa otra notación para designar las variables $x_i$ y/o la incógnita $u$. Por ejemplo, cuando $N = 2$, es usual ecribir

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

No obstante, en muchas ocasiones la notación asignada está motivada por el papel que juega la EDP considerada en las aplicaciones.

El concepto de *solución* de una EDP es de importancia fundamental. El análisis de dicho concepto ha generado el desarrollo de buena parte de las Matemáticas: el Análisis de Fourier, la teoría de distribuciones, los espacios de Sobolev, etc.

Por el momento, nos limitaremos a la definición siguiente:

**Definición 1.2** *Sean $U \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío y $u : U \mapsto \mathbb{R}$ una función. Se dice que $u$ es solución clásica de* (1.2) *en $U$ si se cumplen las propiedades siguientes:*

1. $u \in C^2(U)$,
2. $(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \in \mathcal{O}$ *para cada* $x \in U$,
3. $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$ *para cada* $x \in U$.

No todas las EDPs resultan tener el mismo interés. Algunas de ellas son interesantes exclusivamente desde el punto de vista académico. Por el contrario, otras poseen origen en la formulación de problemas propios de la Física, otra Ciencia de la Naturaleza o incluso otro campo de las Matemáticas y por tanto tienen mayor relevancia y merecen una mayor atención.

De todas las EDPs de segundo orden, las más importantes son las EDPs lineales.

**Definición 1.3** *Se dice que una EDP de segundo orden en las variables independientes $x_1, \dots, x_N$ es lineal si tiene la forma*

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \tag{1.3}$$

*donde las $a_{ij}, b_i, c, f$ son funciones definidas en $\Omega$, un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$. Las funciones $a_{ij}, b_i, c$ se denominan coeficientes de* (1.3) *y $f$ se denomina el término independiente (o segundo miembro). Si $f \equiv 0$, se dice que la EDP es lineal homogénea. Si las $a_{ij}, b_i, c$ son constantes, se dice que* (1.3) *es una EDP lineal de coeficientes constantes.*

**Observación 1.1** Supondremos siempre en (1.3) que $a_{ij} \equiv a_{ji}$ para $i, j = 1, \dots, N$. Obviamente, dado un abierto no vacío $U \subset \Omega$, el conjunto de todas las soluciones clásicas en $U$ de la EDP (1.3) es una variedad lineal de $C^2(U)$.[1]
□

[1] Si $f \equiv 0$, este conjunto es un subespacio vectorial de $C^2(U)$.

**Observación 1.2** Otras EDPs de segundo orden importantes son las llamadas *semi-lineales*. Se trata de las que tienen la forma

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x,u,Du) \tag{1.4}$$

También suelen considerarse EDPs con la estructura siguiente

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,u,Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x,u,Du), \tag{1.5}$$

a las que se llama EDPs *casi-lineales* (se trata en este caso de EDPs lineales en las derivadas de segundo orden). □

En lo que sigue, pondremos énfasis sobre todo en el análisis de las ecuaciones de Laplace y Poisson, la ecuación del calor y la ecuación de ondas, que serán presentadas en la Sección siguiente. En todos los casos, se trata de EDPs lineales de segundo orden de coeficientes constantes.

Al igual que sucede con las EDOs, las EDPs aparecen en la práctica acompañadas (o “completadas”) por condiciones adicionales, esto es, nuevas igualdades que han de ser satisfechas por la solución. Con frecuencia, estas condiciones (y también la propia EDP) están motivadas por leyes que rigen para diversos fenómenos de naturaleza física, química, biológica, etc.

Es posible dar ejemplos “sencillos” de condiciones adicionales que conducen a resultados totalmente distintos para EDPs diferentes (véase el Ejercicio 1.8). Por tanto, la elección de las condiciones que pueden o deben acompañar a una EDP dada no es una cuestión menor.

### 1.1.2. Las ecuaciones de Laplace y Poisson, la ecuación del calor y la ecuación de ondas

Consideraremos las siguientes EDPs lineales de segundo orden y coeficientes constantes:

$$-\Delta u = f(x), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = F(x,t) \tag{1.7}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = h(x,t). \tag{1.8}$$

Aquí, hemos usado la notación

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\,.$$

Se suele decir que $-\Delta$ es el *operador de Laplace* y que $-\Delta u$ es el *Laplaciano* de $u$.

Supondremos en (1.6)–(1.8) que $k$ y $c$ son constantes positivas y que las funciones $f$, $F$ y $h$ son (por ejemplo) continuas allá donde estén definidas; más adelante daremos interpretaciones de estos datos.

Hemos utilizado una notación algo especial, de acuerdo con la cual (1.6) es una EDP en las $N$ variables independientes $x_1, \dots, x_N$ y (1.7) y (1.8) son EDPs en las $N+1$ variables $x_1, \dots, x_N$ y $t$. Pronto quedará justificada esta elección.

La EDP (1.6) se denomina *ecuación de Poisson.* Cuando $f \equiv 0$, recibe el nombre de *ecuación de Laplace.*

Ambas ecuaciones aparecen con frecuencia en Física, Química, Biología, etc. cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos *estacionarios*, esto es, independientes del tiempo. Por ejemplo, el campo eléctrico generado en un medio cuyas partículas "llenan" el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ por una distribución de carga $f \in C^0(\Omega)$ es $E = -\nabla u$, donde $u$ es solución de

$$-\Delta u = \alpha f(x), \quad x \in \Omega,$$

siendo $\alpha$ una constante positiva adecuada.

Generalmente, las EDPs de Laplace y de Poisson son complementadas con *condiciones de contorno.* El caso más sencillo corresponde al llamado *problema de Dirichlet.* La situación es la siguiente:

1. Se fija un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, de frontera no vacía $\partial\Omega$.

2. Se fijan dos funciones $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ y $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$.

3. Entonces resolver el problema de Dirichlet para la EDP de Poisson (1.6) consiste en determinar una solución de (1.6) en $\Omega$ que verifique además la condición de Dirichlet

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

La EDP (1.7) es la *ecuación del calor*. Cuando el número de variables independientes es $N+1$, se suele decir que se trata de la ecuación $N$-dimensional (las $x_1, \dots, x_N$ son las variables espaciales; $t$ es la variable temporal).

También es frecuente encontrar esta EDP en muchas aplicaciones. Aparece cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos *difusivos*, es decir, ligados a una propagación rápida (o instantánea) de la variable dependiente. Por ejemplo, supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto ocupado por un medio conductor del calor y que sobre este medio actúa una fuente de calor $F = F(x,t)$ durante el intervalo temporal $(0,T)$, es decir, para $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Entonces se puede aceptar que la temperatura del medio verifica (1.7) para una constante positiva $k$ (la conductividad del medio).[2]

En muchas aplicaciones, la EDP del calor aparece acompañada de condiciones de contorno (análogas a las mencionadas más arriba) y condiciones iniciales. Por ejemplo, tiene gran interés el *problema de Cauchy-Dirichlet,* que puede ser descrito como sigue:

1. De nuevo, fijamos un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, de frontera no vacía $\partial\Omega$; fijamos también un intervalo temporal $(0,T)$.

[2] El hecho de que (1.7) permita describir la evolución de una temperatura es justamente lo que motiva que (1.7) se conozca como *ecuación del calor.*

2. Suponemos dadas tres funciones $F : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}$, $G : \partial\Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}$ y $u_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

3. Diremos que resolver el problema de Cauchy-Dirichlet para la EDP del calor (1.7) consiste en determinar una solución de (1.7) en $\Omega \times (0, T)$ que verifique además la condición de contorno de tipo Dirichlet

$$u(x, t) = G(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

y la condición inicial (o condición de Cauchy)

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Por otra parte, (1.8) es la *ecuación de ondas* $N$-dimensional. Sirve para describir fenómenos ondulatorios, caracterizados por la propagación de señales con velocidad finita. Por ejemplo, cuando $N = 1$, (1.8) permite determinar las vibraciones de una cuerda elástica (siempre que éstas sean de pequeña amplitud) y, por esa razón, (1.8) también suele llamarse *ecuación de la cuerda vibrante*. Así, si una cuerda elástica sujeta por sus extremos *ocupa* el intervalo espacial $[0, \ell]$ durante el intervalo de tiempo $(0, T)$, se puede aceptar que la posición de los puntos de la cuerda está determinada por una solución de la EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (0, \ell) \times (0, T),$$

donde $c$ es una constante positiva.

Como en el caso de la EDP del calor, tiene sentido considerar el problema de Cauchy-Dirichlet para (1.8). En este caso, dado que aparecen derivadas de segundo orden en la variable $t$, parece razonable (por analogía con los problemas de valores iniciales para EDOs) pedir a la incógnita y a su primera derivada respecto de $t$ que tomen valores dados cuando $t = 0$. La descripción es la siguiente:

1. Fijamos un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, de frontera no vacía $\partial\Omega$ y un intervalo temporal $(0, T)$.

2. Suponemos dadas cuatro funciones $h : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}$, $G : \partial\Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ y $u_1 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

3. Entonces, resolver el correspondiente problema de Cauchy-Dirichlet para la EDP de ondas (1.8) consiste en hallar una solución de (1.8) en $\Omega \times (0, T)$ que verifique además la condición de contorno

$$u(x, t) = G(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega.$$

Debido a las características de los fenómenos que describen, se suele decir que las ecuaciones del calor y de ondas son *ecuaciones de evolución*. Por el contrario, las ecuaciones de Poisson y de Laplace se denominan *ecuaciones estacionarias*.

Aparte de las EDPs de segundo orden que preceden, hay muchas más interesantes. Una buena parte de ellas son variantes de las anteriores.

Por ejemplo, para la propagación de ondas en un medio físico no vacío, es usual recurrir a la llamada *ecuación del telegrafista*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta u = h(x,t),$$

donde $a$ es una nueva constante positiva. Esta EDP aproxima bien, por ejemplo, la propagación de ondas radiofónicas en la atmósfera.

Para la evolución de la temperatura de un medio físico tridimensional cuyas partículas se desplazan con velocidad $V = (V_1, V_2, V_3)$ (que puede ser función de $x$ y de $t$), se usa la EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} V_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - k\Delta u = F(x,t),$$

llamada *ecuación de transporte-difusión.*

Para otras EDPs de interés en las aplicaciones, véase por ejemplo [8] y [19].

## 1.2. Soluciones clásicas y soluciones generalizadas. Interpretaciones.

Por simplicidad y para fijar ideas, consideraremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \quad x \in B(0;R), \\ u = 0, \quad x \in \partial B(0;R). \end{cases} \tag{1.9}$$

Supongamos que $f \in C^0(\overline{B}(0;R))$. Por definición, diremos que $u$ es una solución clásica de (1.9) si $u \in C^2(B(0;R)) \cap C^0(\overline{B}(0;R))$, es solución clásica de la EDP en $B(0;R)$ y verifica además

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial B(0;R).$$

A primera vista, se trata del concepto más natural de solución. Tiene sentido intentar demostrar que, para cada $f$ en estas circunstancias, existe al menos una solución clásica de (1.9). Sin embargo, esto no es cierto.

En efecto, sea por ejemplo $\Omega = B(0;1/2)$ y

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2\sqrt{-\log|x|}}\left(N + 2 - \dfrac{1}{2\log|x|}\right) & \text{si } \ 0 < |x| \le 1/2, \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

Entonces $f \in C^0(\overline{B}(0;R))$, pero el correspondiente problema (1.9) no posee solución clásica; para detalles, véase [19].

No obstante, como hemos dicho más arriba, hay realidades físicas que están bien descritas por las soluciones de (1.9). Por tanto, queda una importante cuestión en el aire: ¿ qué hacer en casos como éste ?

Como hemos avanzado, la respuesta está en *debilitar* el concepto de solución. Esto se consigue escribiendo propiedades que deba verificar la solución de (1.9) (supuesto que exista) y pidiendo a una función que cumpla precisamente esas propiedades.

En el caso particular de (1.9), el procedimiento es el siguiente.

Recordemos que, si $u \in C^2(\overline{B}(0;\rho))$ y $v \in C^1(\overline{B}(0;\rho))$, se tiene la *primera identidad de Green* en $B(0;\rho)$:

$$\int_{B(0;\rho)} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{B(0;\rho)} (-\Delta u) v \, dx + \int_{\partial B(0;\rho)} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma, \qquad (1.10)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ es la *derivada normal* de $u$ ($n(x) = (1/\rho)x$ es el vector normal unitario sobre $\partial B(0;\rho)$ exterior a $B(0;\rho)$) y $d\Gamma$ es el elemento de integración asociado a la medida superficial sobre $\partial B(0;\rho)$.

Supongamos que $u \in C^2(B(0;R)) \cap C^0(\overline{B}(0;R))$ es solución clásica y sea $\varphi$ una función que verifica

$$\varphi \in C^\infty(B(0;R)), \quad \varphi(x) = 0 \ \text{ para } \ |x| \geq R - \varepsilon, \quad \text{con } \varepsilon > 0. \qquad (1.11)$$

Entonces, sin más que aplicar la identidad (1.10) en $B(0;R-\varepsilon)$ a las funciones $u$ y $\varphi$ y usar la EDP de (1.9), obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{B(0;R-\varepsilon)} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_{B(0;R-\varepsilon)} (-\Delta u) \varphi \, dx + \int_{\partial B(0;R-\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, d\Gamma \\ &= \int_{B(0;R-\varepsilon)} f \varphi \, dx \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{B(0;R)} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{B(0;R)} f \varphi \, dx \qquad (1.12)$$

para toda función $\varphi$ de estas características.

Diremos que $u$ es solución débil de (1.9) si pertenece a un espacio adecuado de funciones que poseen derivadas parciales en $L^2(B(0;R))$ y se anulan sobre $\partial B(0;R)$ y se tiene (1.12) para cualquier función $\varphi$ que verifique (1.11). La definición precisa del espacio al que debe pertenecer $u$ se realizará más adelante; este espacio se suele denotar $H_0^1(B(0;R))$. [3]

Veremos en el Tema 2 que la función $u$ es solución débil de (1.9) si y sólo si $u$ es la única función del espacio $H_0^1(B(0;R))$ donde el funcional

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega f v \, dx \qquad (1.13)$$

alcanza un mínimo. Así, resolver (1.9) desde el punto de vista de la teoría moderna de EDPs equivale a minimizar un funcional cuadrático en un espacio adecuado de funciones.

Obviamente, si $u$ es solución clásica de (1.9) y pertenece a $H_0^1(B(0;R))$, también es solución débil. Pero puede ocurrir (y de hecho ocurre con frecuencia) que (1.9) posea solución débil pero no solución clásica. Obsérvese que, en la definición de solución débil sólo aparecen derivadas parciales de primer orden; en principio, una función con derivadas primeras no diferenciables podría ser solución débil de (1.9).

[3] En realidad, una definición equivalente de solución débil de (1.9) se obtiene diciendo que $u \in H_0^1(B(0;R))$ y que se tiene (1.12) para toda $\varphi \in H_0^1(B(0;R))$.

Nótese también que la definición de solución débil sigue teniendo sentido para funciones $f$ no necesariamente continuas. Esto hace pensar en una gran cantidad de situaciones en las que buscar soluciones débiles y no soluciones clásicas es lo apropiado.

Podemos dar interpretaciones de las definiciones de solución clásica y solución débil en un marco aplicado: en términos generales, decir que $u$ es solución clásica (resp. débil) suele ser "consecuencia" de una ley de conservación (resp. de un principio de mínima energía).

Por ejemplo, supongamos que, en (1.9), $u$ representa una temperatura estacionaria (independiente del tiempo), generada por la fuente de calor $f$ y forzosamente nula sobre $\partial\Omega$. Supongamos que $f \in C^0(\overline{B}(0;R))$ y que, por ejemplo, $u \in C^2(\overline{B}(0;R))$. En tal caso,

$$\mathbf{q} := -\nabla u$$

es el *flujo de calor* asociado, esto es, para cada bola $B' \subset B(0;R)$, la cantidad de calor que entra o sale de $B'$ en la unidad de tiempo es

$$Q(B') := \int_{\partial B'} \mathbf{q} \cdot n \, d\Gamma = -\int_{\partial B'} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma = -\int_{B'} \Delta u \, dx$$

donde $n = n(x)$ denota de nuevo el vector normal unitario orientado hacia el exterior. La *ley de conservación de la energía* nos dice que, para toda bola $B' \subset B(0;R)$,

$$Q(B') = \int_{B'} f \, dx$$

y, por tanto,

$$\int_{B'} (-\Delta u - f) \, dx = 0.$$

De donde se obtiene fácilmente que $u$ es solución clásica de (1.9).

Por otra parte, fijada la fuente de calor $f$, la cantidad total de energía asociada a una distribución de temperatura $v = v(x)$ en $B(0;R)$ (con $v = 0$ sobre $\partial B(0;R)$) está dada por

$$E(v;f) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega f v \, dx.$$

Esta cantidad coincide con la que aparece en (1.13), es decir, $J(v)$.

Las leyes de la *Termodinámica* nos dicen que, de todas las temperaturas posibles, la que "elige" el medio en el mundo físico real es la función $u$ que hace mínima esta energía. Como hemos visto, esto significa que $u$ es solución débil.

## 1.3. Ejercicios

**E 1.1** Se considera la *EDP del transporte*

$$u_t + M u_x = 0.$$

Probar que $u$ es solución clásica de esta EDP en el abierto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2$ si y sólo si existe $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$u(x,t) = f(x - Mt) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Como aplicación, dada $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + M u_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**E 1.2** Efectuar el cambio de variables $\xi = x + 2t$, $\eta = x + 3t$ en la ecuación

$$2w_{\xi\xi} + 8w_{\xi\eta} + 7w_{\eta\eta} = 0.$$

**E 1.3** Se considera el problema de la cuerda vibrante

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & a < x < b,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & a \le x \le b, \\ u(a,t) = p(t),\ u(b,t) = q(t). \end{cases}$$

Efectuar el cambio de variable

$$\xi = \frac{x-a}{b-a}, \quad \eta = \frac{c}{b-a} t$$

y re-escribir el problema en las nuevas variables $\xi$ y $\eta$.

**E 1.4** Demostrar que la EDP

$$u_{tt} - a u_t - k u_{xx} = 0,$$

donde $a$ y $k$ son constantes, puede reducirse a una ecuación análoga con $a = k = 1$.

*Indicación*: Intentar un cambio de variable de la forma $\xi = Ax$, $\eta = Bt$, siendo $A$ y $A$ constantes adecuadas.

**E 1.5** Demostrar que la EDP

$$u_t - au - c^2 u_{xx} = 0,$$

donde $a$ y $c$ son constantes, puede reducirse a otra ecuación análoga con $a = 0$.

*Indicación*: Intentar un cambio de variable de la forma $v = \alpha(t)\, u$, siendo $\alpha$ una función adecuada.

**E 1.6** Demostrar que la función $u(x,y) = f(x)g(y)$ es solución de

$$u u_{xy} = u_x u_y$$

para todo par de funciones dos veces continuamente diferenciables $f$ y $g$.

**E 1.7** Hallar la solución general, esto es, una familia de soluciones dependientes de dos funciones arbitrarias, de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } u_{xx} = 0; \quad \text{b) } u_{xy} = 0; \quad \text{c) } u_{xy} + u_y = 0; \quad \text{d) } u_{xx} + u = 0,$$

con $u = u(x,y)$.

**E 1.8 (*)** Se consideran las EDPs

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad u_{xt} = 0, \quad u_t - u_{xx} = 0, \quad u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Denominaremos *Problema i* al constituido por la $i$-ésima EDP en $\mathbb{R}^2$, complementada con las condiciones

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi \in C^1(\mathbb{R})).$$

En cada caso, diremos que $u$ es solución si $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y verifica la EDP en $D$ y las condiciones adicionales en todo $(x,0)$. Probar lo siguiente:

1. El Problema 1 sólo posee solución si $\varphi$ es analítica.
2. El Problema 2 sólo posee solución si $\varphi$ es constante.
3. El Problema 3 sólo posee solución si $\varphi \equiv 0$.
4. El Problema 4 posee solución única para toda $\varphi \in C^1([-1,1])$. Hallar la solución en este caso.

   *Indicación:* Realizar el cambio de variables $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ y resolver la EDP resultante.

**E 1.9** Sea $\xi \in \mathbb{R}^N$. Probar que, para cada $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, la función

$$v(x) := \begin{cases} C_1 \log \dfrac{1}{|x-\xi|} + C_2 & \text{si } N = 2 \\ C_1 \dfrac{1}{|x-\xi|^{N-2}} + C_2 & \text{si } N \geq 3 \end{cases} \tag{1.14}$$

es solución clásica en $\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}$ de la EDP de Laplace. Deducir que también lo son las funciones siguientes:

$$\frac{x_1 - \xi_1}{|x-\xi|^2}, \quad \frac{x_1 - x_2 - \xi_1 + \xi_2}{|x-\xi|^2}, \quad \frac{|x-\xi|^2 - 2(x_2-\xi_2)^2}{|x-\xi|^4} \quad \text{para} \quad N = 2,$$

$$\frac{x_1 - \xi_1}{|x-\xi|^3}, \quad \frac{x_1 - 4x_3 - \xi_1 + 4\xi_3}{|x-\xi|^3}, \quad -\frac{3(x_2-\xi_2)(x_3-\xi_3)}{|x-\xi|^5} \quad \text{para} \quad N = 3.$$

**E 1.10** Probar que, fijado $\xi \in \mathbb{R}^N$, las únicas soluciones de la EDP de Laplace en $\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}$ que sólo dependen de $|x-\xi|$ son las funciones que aparecen en (1.14).

**E 1.11** Se considera la EDP lineal de coeficienes constantes

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.15}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto no vacío, la matriz $A = \{a_{ij}\}$ es simétrica y definida positiva y $f \in C^0(\Omega)$. Probar que existe un cambio de variables $y = Px$ que permite re-escribir esta EDP de forma equivalente como una EDP de Poisson en $\Omega^* := \{\, Px : x \in \Omega \,\}$. Deducir que, para cada $\zeta \in \mathbb{R}^N$, la función

$$u(x) := |Px - \zeta|^{-N} \left( \sum_{j=1}^{N} p_{1j} x_j - \zeta_1 \right)$$

es solución clásica en $\mathbb{R}^N \setminus \{P^{-1}\zeta\}$ de la EDP (1.15) para $f \equiv 0$.

**E 1.12 (*)** Sea $\eta \in \mathbb{R}^3$. Probar que las funciones

$$z(x) := \frac{1}{|x-\eta|}\left(a_1 \cosh|x-\eta| + a_2 \sinh|x-\eta|\right)$$

son soluciones clásicas en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\eta\}$ de la EDP

$$-\Delta u + u = 0.$$

¿ Son éstas las únicas que sólo dependen de $|x-\eta|$ ?

**E 1.13 (*)** Sean $R_0 > 0$ y $\overline{u} \in \mathbb{R}$. Se considera el problema siguiente: Hallar $u = u(x,t)$ y $R = R(t)$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, \quad x \in B(0; R(t)), \quad t > 0, \\ u(x,t) = \overline{u}, \quad |x| = R(t), \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = -\dot{R}(t) \quad |x| = R(t), \quad t > 0 \\ R(0) = R_0 \end{cases}$$

Probar que la única solución de este problema es:

$$u = \overline{u}\frac{\sinh|x|/|x|}{\sinh R(t)/R(t)}, \quad R(t) = H^{-1}(H(R_0) + \overline{u}t), \quad \text{para} \quad x \in \overline{B}(0; R(t)), \quad t \geq 0,$$

donde $H$ es una primitiva de la función

$$s \mapsto \frac{1}{\coth s - \frac{1}{s}}\,.$$

# Capítulo 2

# El teorema de Lax-Milgram y la formulación débil de problemas elípticos

Existen razones que aconsejan "debilitar" el concepto de solución clásica, indicado en el Capítulo 1, para resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson y otras EDPs similares:

- Por una parte, la búsqueda de soluciones clásicas produce resultados sólo en un número muy reducido de casos particulares.

- Por otra, los problemas con origen en las aplicaciones conducen a EDPs con coeficientes poco regulares, incluso discontinuos; por tanto, parece difícil imponer que estas EDPs se verifiquen *en todos los puntos* de un abierto.

Para cumplir este objetivo, debemos recurrir a una formulación diferente que reposa sobre ciertos elementos y resultados del Análisis Funcional que serán recordados brevemente en las Secciones siguientes; se pueden encontrar más detalles por ejemplo en [4, 11, 17, 23].

## 2.1. Operadores lineales continuos en espacios de Hilbert. Propiedades

A menos que se indique lo contrario, los espacios vectoriales que aparecen a continuación son *reales.*

En lo que sigue, $X, Y, \dots$ designan espacios normados. Con carácer general, denotaremos $\| \cdot \|_X, \| \cdot \|_Y, \dots$ las normas respectivas. Por otra parte, $H, G, \dots$ designarán espacios de Hilbert, con normas y productos escalares denotados respectivamente $\| \cdot \|_H, \| \cdot \|_G, \dots$ y $(\cdot\,,\cdot)_H, (\cdot\,,\cdot)_G, \dots$

Consideraremos aplicaciones $T : X \mapsto Y$ lineales y continuas (también llamadas *operadores lineales continuos*).

Si $T : X \mapsto Y$ es lineal, entonces es continua si y sólo si es *acotada*, es decir, si y sólo si

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \|Tv\|_Y \leq M\|v\|_X \text{ para cada } v \in X;$$

véase el ejercicio 2.1.

Por otra parte, si $T : X \mapsto Y$ es lineal y biyectiva, entonces su inversa $T^{-1} : Y \mapsto X$ es de nuevo lineal y biyectiva.

Si $X$ e $Y$ son *espacios de Banach* (esto es, espacios normados completos) y $T : X \mapsto Y$ es lineal, continua y biyectiva, entonces $T^{-1} : Y \mapsto X$ es también continua. Este resultado se conoce como *teorema del operador inverso de Banach;* para su demostración, véanse [4] y el ejercicio 2.2.

El conjunto $\mathcal{L}(X;Y)$ de los operadores lineales continuos $T : X \mapsto Y$ es un espacio vectorial para las operaciones habituales. En este espacio vectorial,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} := \sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{\|Tv\|_Y}{\|v\|_X} = \sup_{\|v\|_X \leq 1} \|Tv\|_Y = \sup_{\|v\|_X = 1} \|Tv\|_Y$$

es una norma. Así, se puede hablar del *espacio normado de los operadores lineales continuos* de $X$ en $Y$, de nuevo denotado $\mathcal{L}(X;Y)$.

Obsérvese que, si $Y$ es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(X;Y)$ también lo es (véase el ejercicio 2.3).

Cuando $X = Y$, pondremos $\mathcal{L}(X)$ en vez de $\mathcal{L}(X;X)$. En el caso particular en que $Y = \mathbb{R}$, el espacio de Banach $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ se denota $X'$ y se denomina *dual topológico* (o simplemente dual) de $X$.

Si $X = H$ es un espacio de Hilbert (esto es, un espacio normado completo cuya norma es inducida por un producto escalar), entonces $H$ puede identificarse algebraica y topológicamente con su dual. Esto es justamente lo que dice el *teorema de representación de Riesz*, que se presenta a continuación:

**Teorema 2.1** *Sea $H$ un espacio de Hilbert de producto escalar $(\cdot\,,\cdot)_H$ y norma aosciada $\|\cdot\|_H$ y sea $f \in H'$. Entonces existe un único $u_f \in H$ tal que*

$$f(v) = (u_f, v)_H \quad \forall v \in H. \tag{2.1}$$

*Además, la aplicación $f \mapsto u_f$ es un isomorfismo isométrico de $H'$ sobre $H$.*

**Demostración:** Consideremos la aplicación $S : H \mapsto H'$, definida del modo siguiente: para cada $u \in H$, $Su$ está dado por

$$Su(v) = (u, v)_H \quad \forall v \in H.$$

Veamos que $S$ es un isomorfismo isométrico. Esto será suficiente ya que, en tal caso, su inverso $S^{-1} : H' \mapsto H$ será la aplicación buscada.

Es fácil comprobar que $S : H \mapsto H'$ está bien definida y es lineal y continua. En particular,

$$|Su(v)| \leq \|u\|_H \, \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$$

y, por tanto, $\|S\|_{\mathcal{L}(H;H')} \leq 1$.

También está claro que $S$ es isométrica. En efecto,

$$\|Su\|_{H'} = \sup_{\|v\|_H \leq 1} |(u, v)_H| = \|u\|_H \quad \forall u \in H.$$

Luego también es inyectiva.

Sólo queda probar que $S$ es sobreyectiva. Sea entonces $f \in H'$. Veamos que existe $u \in H$ tal que $f = Su$.

Consideremos la función $F : H \mapsto \mathbb{R}$, con

$$F(v) = \frac{1}{2}\|v\|_H^2 - f(v) \quad \forall v \in H.$$

Sea $\alpha := \inf_{v\in H} F(v)$ y sea $\{v_n\}$ una sucesión minimizante para $F$, esto es, tal que

$$F(v_n) \to \alpha \ \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Entonces $\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy, puesto que

$$\begin{aligned}
\|v_n - v_m\|_H^2 &= 2\|v_n\|_H^2 + 2\|v_m\|_H^2 - \|v_n + v_m\|_H^2 \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\|v_n\|_H^2 + \frac{1}{2}\|v_m\|_H^2\right) - 4\|\frac{1}{2}(v_n + v_m)\|_H^2 \\
&= 4\left(F(v_n) + F(v_m)\right) - 8F(\frac{1}{2}(v_n + v_m)) \\
&\leq 4\left(F(v_n) + F(v_m)\right) - 8\alpha
\end{aligned}$$

y esta cantidad tiende a 0 cuando $n, m \to +\infty$. Sea $u$ el límite de $\{v_n\}$. Dado que $F$ es continua, $F(u) = \alpha$, es decir,

$$F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in H.$$

Pero esto muestra lo que queremos, esto es, que $Su = f$. En efecto, si tomamos $v = u + sw$ con $w \in H$ y $s \in \mathbb{R}$ arbitrarios, deducimos enseguida que la función $F_w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, con

$$F_w(s) = \frac{1}{2}\|u + sw\|_H^2 - f(u + sw) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

posee un mínimo en 0. Dado que se trata de una función polinómica (y de hecho cuadrática), su derivada se anula para $s = 0$, i.e.

$$(u, w)_H - f(w) = 0.$$

Como $w$ es arbitrario, necesariamente $Su = f$. □

Como consecuencia de este resultado, cuando sea conveniente, podremos *identificar* todo espacio de Hilbert $H$ con su dual $H'$.

A continuación, dado un operador lineal continuo de un espacio de Hilbert en otro, le asignaremos el llamado operador adjunto. Veremos más adelante que, en muchas ocasiones, éste permite describir de manera simple las propiedades de aquél. Por ejemplo, veremos que el operador de partida es inyectivo si y sólo si su adjunto posee una imagen densa.

**Definición 2.1** *Sean $H$ y $G$ dos espacios de Hilbert cuyos productos escalares son denotados indistintamente $(\cdot\,,\cdot)$ y sea $T \in \mathcal{L}(H;G)$. Se llama operador adjunto de $T$ al único operador $T^* \in \mathcal{L}(G;H)$ que verifica*

$$(Tu, v)_G = (u, T^*v)_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in G. \tag{2.2}$$

*Si $H = G$ y $T^* = T$, se dice que $T$ es autoadjunto.*

Comprobemos que esta definición es correcta, es decir, que fijados $H$, $G$ y $T$ existe un único $T^* \in \mathcal{L}(G;H)$ que verifica (2.2).

Sea $v \in G$. Entonces la aplicación $u \mapsto (Tu, v)_G$ es lineal continua de $H \mapsto \mathbb{R}$. Llamémosla $f_v$. Entonces $f_v \in H'$ y por el teorema 2.1 existe un único punto de $H$, denotado $m_v$, tal que

$$(m_v, u)_H = f_v(u) = (Tu, v)_G \quad \forall u \in H. \tag{2.3}$$

Pongamos $T^*v = m_v$ para cada $v \in Y$. Entonces la aplicación $T^* : G \mapsto H$ está bien definida, es lineal y verifica

$$\|T^*v\|_H = \|f_v\|_H = \sup_{\|u\|_H \le 1} |(m_v, u)_H| = \sup_{\|u\|_H \le 1} |(Tu, v)_G| \le \|T\|_{\mathcal{L}(H;G)} \|v\|_G$$

para todo $v \in G$ y, también,

$$(T^*v, u)_H = f_v(u) = (Tu, v)_G \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in G.$$

Esto prueba que existe al menos un operador en $T^* \in \mathcal{L}(G;H)$ para el que se tiene (2.2). Además, si $S \in \mathcal{L}(G;H)$ es otro operador con esta propiedad, entonces

$$(Sv, u)_H = (v, Tu)_G = (T^*v, u)_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in G,$$

de donde

$$Sv = T^*v \quad \forall v \in G$$

y necesariamente $S = T^*$. Así pues, la definición 2.1 es correcta.

Obviamente, el concepto de operador adjunto generaliza el concepto de *matriz traspuesta*. Se tiene la proposición siguiente, cuya demostración es inmediata:

**Proposición 2.1** *Sean $H$ y $G$ dos espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H;G)$. Denotemos $I_H$ el operador identidad en $H$. Entonces:*

1. $I_H^* = I_H$.
2. $(T^*)^* = T$ *y* $\|T^*\|_{\mathcal{L}(G;H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H;G)}$.
3. *Si* $S \in \mathcal{L}(H;G)$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *entonces* $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$.
4. *Si $F$ es otro espacio de Hilbert y* $S \in \mathcal{L}(G;F)$, *entonces* $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
5. *$T$ es biyectivo si y sólo si $T^*$ lo es. En tal caso,* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

En el ejemplo siguiente, aparecen un operador lineal continuo no trivial y su adjunto.

**Ejemplo 2.1** Sea $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$ una función dada. Por definición, el *operador integral de Fredholm en $L^2(a,b)$ de núcleo $K$* es la aplicación $T_K$, dada por

$$T_K(\phi)(t) = \int_a^b K(t,s)\phi(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \quad \forall \phi \in L^2(a,b). \tag{2.4}$$

No es difícil comprobar que $T_K \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$. Además, se tiene que

$$\int_a^b \left| \int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds \right|^2 dt \le \left( \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,dt \right) \left( \int_a^b |\phi(s)|^2\,ds \right),$$

es decir,

$$\|T_K\phi\|_{L^2(a,b)} \le \|K\|_{L^2((a,b)\times(a,b))} \|\phi\|_{L^2(a,b)}$$

para cada $\phi \in L^2(a,b)$.

Por otra parte, es inmediato que $T_K^*$ es también un operador integral de Fredholm. Más precisamente, $T_K^* = T_{K^*}$, donde $K^*$ es el núcleo simétrico de $K$, es decir, $K^*(t,s) := K(s,t)$. En otras palabras,

$$T_K^*(\phi)(t) = \int_a^b K(s,t)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \quad \forall \phi \in L^2(a,b). \tag{2.5}$$

En consecuencia, una condición necesaria y suficiente para que $T_K$ sea autoadjunto, es que se tenga $K = K^*$, esto es,

$$K(t,s) = K(s,t) \quad \text{c.p.d. en } (0,T)\times(0,T).$$

□

## 2.2. El teorema de Lax-Milgram

El resultado principal de esta Sección es el *teorema de Lax-Milgram.* Como veremos, se trata de un resultado fundamental para el tratamiento de muchas EDPs.

En lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, $H$ es un espacio de Hilbert de norma $\|\cdot\|$ y producto escalar $(\cdot\,,\cdot)$. Para la formulación del teorema de Lax-Milgram, necesitamos la definición siguiente:

**Definición 2.2** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot) : H\times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que $a(\cdot\,,\cdot)$ es acotada si*

$$\exists M > 0 \text{ tal que } |a(u,v)| \le M\|u\|\,\|v\| \quad \forall u,v \in H. \tag{2.6}$$

*Se dice que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva (o $H$-elíptica) si*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(v,v) \ge \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H. \tag{2.7}$$

No es difícil probar que una forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot) : H\times H \mapsto \mathbb{R}$ es acotada si y sólo si es continua (como aplicación del espacio producto $H\times H$ en $\mathbb{R}$; véase el ejercicio 2.4).

Sea $a(\cdot\,,\cdot) : H\times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Entonces, gracias al teorema 2.1, sabemos que existe un único operador $A \in \mathcal{L}(H)$ que verifica

$$(Au,v) = a(u,v) \quad \forall u,v \in H. \tag{2.8}$$

Claramente, $(Av,v) \ge \alpha\|v\|^2$ para cada $v \in H$, de donde, en particular,

$$\|Av\| \ge \alpha\|v\| \quad \forall v \in H \tag{2.9}$$

y $A$ es inyectivo. El teorema de Lax-Milgram nos dice que $A$ es de hecho un isomorfismo:

**Teorema 2.2** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Entonces, para cada $f \in H'$, existe un único $\hat{u}$ que verifica*

$$a(\hat{u}, v) = f(v) \quad \forall v \in H, \quad \hat{u} \in H. \tag{2.10}$$

*Además, si $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica, $\hat{u}$ está caracterizado por ser la única solución del problema de mínimos*

$$\frac{1}{2}\,a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}) = \inf_{v \in H} \left( \frac{1}{2}\,a(v, v) - f(v) \right), \quad \hat{u} \in H. \tag{2.11}$$

**Demostración:** Sea $f \in H'$ y sea $u_f \in H$ el punto de $H$ asociado a $f$ por el teorema 2.1. Entonces (2.10) es equivalente a

$$A\hat{u} = u_f, \quad \hat{u} \in H, \tag{2.12}$$

donde $A$ es el operador definido por (2.8).

Gracias a (2.9), la ecuación en $H$ (2.12) posee a lo más una solución. Para demostrar que posee al menos una, razonamos como sigue.

Sea $\rho > 0$ un número dado. La ecuación (2.12) es equivalente a la ecuación de punto fijo

$$\hat{u} = S_\rho(\hat{u}) := \hat{u} - \rho(A\hat{u} - u_f), \quad \hat{u} \in H. \tag{2.13}$$

Veamos que, para una elección adecuada de $\rho$, la aplicación $S_\rho : H \mapsto H$ es contractiva.

Así, sean $u_1, u_2 \in H$ y veamos cómo se puede acotar $\|S_\rho(u_1) - S_\rho(u_1)\|$ en función de $\|u_1 - u_2\|$:

$$\begin{aligned}
\|S_\rho(u_1) - S_\rho(u_2)\|^2 &= \|(u_1 - \rho(Au_1 - u_f)) - (u_2 - \rho(Au_2 - u_f))\|^2 \\
&= \|u_1 - u_2\|^2 - 2\rho(u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) + \rho^2 \|A(u_1 - u_2)\|^2 \\
&\le (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2)\|u_1 - u_2\|^2.
\end{aligned}$$

La expresión $Z(\rho) := 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2$ alcanza su mínimo en $\hat{\rho} := \alpha/M^2$, con $Z(\hat{\rho}) = 1 - \alpha^2/M^2$, es decir $Z(\hat{\rho}) < 1$. Por tanto, eligiendo (por ejemplo) $\rho = \hat{\rho}$, vemos que $S_\rho$ es contractiva:

$$\|S_{\hat{\rho}}(u_1) - S_{\hat{\rho}}(u_2)\| \le Z(\hat{\rho})^{1/2} \|u_1 - u_2\| \quad \forall u_1, u_2 \in H.$$

Esto prueba que (2.13) posee solución única y, por tanto, lo mismo le ocurre a (2.12).

Para demostrar que $\hat{u}$ está caracterizado por (2.11) cuando $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica, razonaremos como sigue. En primer lugar, si $\hat{u}$ verifica (2.10), entonces, para cada $v \in H$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}a(v, v) - f(v) &= \frac{1}{2}a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}) \\
&\quad + [a(\hat{u}, v - \hat{u}) - f(v - \hat{u})] + \frac{1}{2}a(v - \hat{u}, v - \hat{u}) \\
&\ge \frac{1}{2}a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}).
\end{aligned}$$

Luego $\hat{u}$ verifica (2.11).

Recíprocamente, si tenemos (2.11), dados $v \in H$ y $\theta \in (0,1]$, necesariamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a(\hat{u},\hat{u}) - f(\hat{u}) &\le \frac{1}{2}a(\hat{u}+\theta v, \hat{u}+\theta v) - f(\hat{u}+\theta v)\\ &= \frac{1}{2}a(\hat{u},\hat{u}) - f(\hat{u}) + \theta\,[a(\hat{u},v) - f(v)] + \frac{\theta^2}{2}a(v,v),\end{aligned}$$

de donde

$$\theta\,[a(\hat{u},v) - f(v)] + \frac{\theta^2}{2}a(v,v) \ge 0.$$

Dividiendo por $\theta$ y haciendo tender $\theta$ a cero, obtenemos

$$a(\hat{u},v) - f(v) \ge 0$$

y, como esto debe ser cierto para todo $v \in H$, resulta finalmente (2.10). □

**Observación 2.1** De acuerdo con este resultado, para cada $f \in H'$ el problema (2.10) posee solución única $\hat{u}$. Se puede afirmar también que esta solución *depende continuamente* del dato $f$. En efecto, si $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son las soluciones asociadas respectivamente a $f$ y $g$, tenemos:

$$\alpha\|\hat{u}-\hat{v}\|^2 \le a(\hat{u}-\hat{v}, \hat{u}-\hat{v}) = f(\hat{u}-\hat{v}) - g(\hat{u}-\hat{v}) \le \|f-g\|\,\|\hat{u}-\hat{v}\|,$$

de donde

$$\|\hat{u}-\hat{v}\| \le \frac{1}{\alpha}\,\|f-g\|. \tag{2.14}$$

□

**Observación 2.2** Como en el teorema 2.2, sean $H$ un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot)$ una forma bilineal continua. Cabe preguntarse si la coercividad de $a(\cdot\,,\cdot)$ es condición necesaria para la existencia y unicidad de solución de (2.10) para cada $f \in H'$. La respuesta es negativa; véase el ejercicio 2.5. □

## 2.3. El teorema de la proyección

Sea $A \subset H$ un subconjunto no vacío. Por definición, el *ortogonal* de $A$ es el conjunto

$$A^\perp = \{\, v \in H : (u,v) = 0 \ \ \forall u \in A \,\}.$$

Es fácil probar que $A^\perp$ es un subespacio cerrado de $H$, que $A^\perp = \overline{A}^\perp = \overline{[A]}^\perp$ (donde $[A]$ es el espacio vectorial de las combinaciones lineales finitas formadas con puntos de $A$) y que $A^\perp \cap A \subset \{0\}$.

El resultado principal de esta Sección es el *teorema de la proyección sobre un convexo* y dice lo siguiente:

**Teorema 2.3** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $K \subset H$ un convexo cerrado no vacío y $u_0 \in H$. Entonces existe un único punto $\hat{u}$ que verifica*

$$\|\hat{u}-u_0\| = \inf_{v\in K}\|v-u_0\|, \quad \hat{u} \in K. \tag{2.15}$$

*Además, $\hat{u}$ es el único punto de $H$ que verifica*

$$\begin{cases} \hat{u} \in K, \\ (u_0-\hat{u}, v-\hat{u}) \le 0 \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{2.16}$$

**Demostración:** Veamos en primer lugar que existe al menos una solución de (2.15).

Sea $\alpha = \inf_{v\in K} \|v - u_0\|^2$ y sea $\{v_n\}$ una sucesión minimizante para (2.15). Entonces, como en la prueba del teorema 2.1, $\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}\|v_n - v_m\|^2 &= \|(v_n - u_0) - (v_m - u_0)\|^2 \\ &= 2\|v_n - u_0\|^2 + 2\|v_m - u_0\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(v_n + v_m) - u_0\|^2 \\ &\leq 2\|v_n - u_0\|^2 + 2\|v_m - u_0\|^2 - 4\alpha,\end{aligned}$$

dado que $\frac{1}{2}(v_n + v_m) \in K$. Pero esta última cantidad converge a 0 cuando $m, n \to +\infty$.

Sea $\hat{u}$ el límite de la sucesión $\{v_n\}$. Entonces $\hat{u} \in K$ por ser $K$ cerrado y evidentemente tenemos que $\|\hat{u} - u_0\| = \alpha$. Luego $\hat{u}$ es una solución de (2.15).

Por otra parte, la solución de este problema es única. En efecto, si tuviéramos $\hat{v} \in K$, $\hat{v} \neq \hat{u}$ y $\|\hat{v} - u_0\| = \alpha$, necesariamente obtendríamos que $\frac{1}{2}(\hat{u} + \hat{v}) \in K$ y

$$\|\frac{1}{2}(\hat{u} + \hat{v}) - u_0\|^2 < \alpha,$$

por la convexidad estricta de la función $v \mapsto \|v\|^2$. Pero esto es absurdo. Luego la existencia de $\hat{v}$ es imposible.

Veamos finalmente que (2.15) y (2.16) son equivalentes.

Si $\hat{u}$ verifica (2.15), entonces para cada $v \in K$ y cada $\theta \in (0, 1)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\hat{u} - u_0\|^2 &\leq \|(\theta v + (1 - \theta)\hat{u}) - u_0\|^2 \\ &= \|\hat{u} - u_0\|^2 - 2\theta(u_0 - \hat{u}, v - \hat{u}) + \theta^2\|\hat{u} - v\|^2,\end{aligned}$$

de donde

$$2\theta(u_0 - \hat{u}, v - \hat{u}) \leq \theta^2\|v - \hat{u}\|^2.$$

Dividiendo por $\theta$ y haciendo tender $\theta$ a 0, obtenemos (2.16).

Recíprocamente, si $\hat{u}$ verifica (2.16), para cada $v \in K$ se tiene

$$\begin{aligned}\|\hat{u} - u_0\|^2 &= (\hat{u} - u_0, \hat{u} - v) + (\hat{u} - u_0, v - u_0) \\ &\leq (\hat{u} - u_0, v - u_0) \leq \|\hat{u} - u_0\| \, \|v - u_0\|.\end{aligned}$$

Por tanto, también tenemos (2.15). □

**Observación 2.3** La caracterización (2.16) de $\hat{u}$ posee una sencilla interpretación geométrica: Por ejemplo, cuando $H = \mathbb{R}^N$ con la distancia Euclídea, $\hat{u}$ es el único punto de $K$ tal que el vector $u_0 - \hat{u}$ forma un ángulo obtuso con cualquier otro vector $v - \hat{u}$ correspondiente a un punto $v \in K$. Se dice que $\hat{u}$ es la *proyección ortogonal* de $u_0$ sobre $K$. □

**Ejemplo 2.2** Sean $H$ un espacio de Hilbert, $u \in H$ y $K = \overline{B}(u; R)$ (la bola cerrada de centro $u$ y radio $R$). Sea $u_0 \in H$. Entonces, si $u_0 \in K$, está claro que la correspondiente proyección es $\hat{u} = u_0$. Por el contrario, si $u_0 \notin K$, se tiene que

$$\hat{u} = u + \frac{R}{\|u_0 - u\|}\,(u_0 - u).$$

es decir, $\hat{u}$ es el único puto del segmento que une $u_0$ con $u$ que pertenece a la frontera de $K$. □

**Observación 2.4** La existencia y unicidad de solución de (2.15) es en realidad consecuencia de un resultado mucho más general. En efecto, en (2.15) estamos minimizando una función estrictamente convexa, continua y *coerciva* en un convexo cerrado de un espacio de Hilbert. En estas condiciones, está asegurada la existencia de un único punto donde la función alcanza el mínimo; véase por ejemplo [9]. □

**Observación 2.5** El teorema 2.3 puede ser también mirado como un resultado de existencia y unicidad de solución de (2.16). □

Como caso particular del teorema 2.3, tenemos:

**Teorema 2.4** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $M \subset H$ un subespacio cerrado y $u_0 \in H$. Entonces existe un único punto $\hat{u}$ que verifica*

$$\|\hat{u} - u_0\| = \inf_{v \in M} \|v - u_0\|, \quad \hat{u} \in M. \tag{2.17}$$

*Además, $\hat{u}$ es el único punto de $H$ que verifica*

$$\begin{cases} \hat{u} \in M, \\ u_0 - \hat{u} \in M^\perp. \end{cases} \tag{2.18}$$

El resultado que sigue es una reformulación del teorema 2.4:

**Teorema 2.5** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $M \subset H$ un subespacio cerrado y $u_0 \in H$. Entonces existen dos únicas aplicaciones lineales $P : H \mapsto M$ y $Q : H \mapsto M^\perp$ tales que*

$$v = Pv + Qv \quad \forall v \in H.$$

*Estas aplicaciones tienen las propiedades siguientes:*

1. *$P, Q \in \mathcal{L}(H)$ y $\|P\| = \|Q\| = 1$.*
2. *$v \in M$ si y sólo si $Pv = v$ y $Qv = 0$. Análogamente, $v \in M^\perp$ si y sólo si $Pv = 0$ y $Qv = v$.*
3. *$\|v - Pv\| = \inf_{m \in M} \|v - m\|$ para cada $v \in H$.*

**Observación 2.6** El operador $P$ del teorema 2.5 verifica

$$P \circ P = P, \quad P^* = P. \tag{2.19}$$

Lo mismo le ocurre al operador $Q$. Diremos que $P$ (resp. $Q$) es el *operador de proyección ortogonal* de $H$ sobre $M$ (resp. sobre $M^\perp$). □

**Corolario 2.1** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado. Entonces $H$ es la suma directa ortogonal de $M$ y $M^\perp$. Es decir, todo punto de $H$ se puede descomponer de una única forma en la suma de un elemento de $M$ y otro de $M^\perp$.*

**Ejemplo 2.3** Sea $H$ un espacio de Hilbert, sean $u, v \in H$ linealmente independientes y sea $M$ el subespacio de $H$ generado por $u$ y $v$. Sea $u_0 \in H$ un punto dado. Entonces la proyección ortogonal de $u_0$ sobre $M$ es

$$\hat{x} = Pu_0 = au + bv,$$

donde $a$ y $b$ están caracterizados por verificar el sistema

$$\begin{bmatrix} (u,u) & (u,v) \\ (v,u) & (v,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_0,u) \\ (u_0,v) \end{bmatrix}.$$

$\square$

**Corolario 2.2** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio. Entonces $M$ es denso en $H$ si y sólo si $M^\perp = \{0\}$.*

**Observación 2.7** Como consecuencia de este corolario, si $H$ es un espacio de Hilbert y $A \subset H$, para que el espacio vectorial generado por $A$ sea denso es necesario y suficiente que se tenga $A^\perp = \{0\}$. $\square$

## 2.4. Algunos resultados auxiliares sobre espacios de funciones

En esta Sección, recordaremos conceptos y resultados relacionados con los espacios de Lebesgue de funciones integrables. Para más detalles y demostraciones completas de todo lo que sigue, véase por ejemplo [17].

En adelante, $\Omega$ denotará un abierto no vacío de de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$ es un entero).

### 2.4.1. Soportes y funciones "test"

Comenzaremos con una definición:

**Definición 2.3** *Sea $\varphi \in C^0(\Omega)$. Llamaremos soporte de $\varphi$ (denotado $\operatorname{sop}\varphi$), a la adherencia del conjunto $\{\, x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0 \,\}$.*

El conjunto $\operatorname{sop}\varphi$ es un cerrado contenido en $\overline{\Omega}$. Necesitaremos considerar varios subespacios de $C^0(\Omega)$: $C^0_c(\Omega)$, $C^k_c(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$. Están definidos como sigue:

$$C^0_c(\Omega) = \{\, \varphi \in C^0(\Omega) : \operatorname{sop}\varphi \subset \Omega \text{ es compacto} \,\},$$

$$C^k_c(\Omega) = C^0_c(\Omega) \cap C^k(\Omega), \quad \mathcal{D}(\Omega) = C^0_c(\Omega) \cap C^\infty(\Omega).$$

En particular, por motivos que se verán más adelante, $\mathcal{D}(\Omega)$ suele denominarse *espacio de las funciones "test"*.

Veamos a continuación que $\mathcal{D}(\Omega)$ es un espacio no trivial y que, de hecho, ccontiene una gran cantidad de funciones:

**Lema 2.1** *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$, existe una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi > 0$ en $B(x_0; r)$ y $\operatorname{sop}\varphi = \overline{B}(x_0; r)$.*

La demostración es inmediata. En efecto, sea $\psi$ la función de $C^\infty(\mathbb{R})$ dada por
$$\psi(s) = e^{1/s} 1_{\{s<0\}} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$
Entonces basta tomar $\varphi(x) := \psi(|x - x_0|^2 - r^2)$.

Dados un conjunto $A$ de $\mathbb{R}^N$ y un número positivo $\delta$, denotaremos $A_\delta$ al conjunto
$$A_\delta = \{ \, x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}\,(x, A) \leq \delta \, \}.$$

A partir del lema 2.1 se obtiene el resultado siguiente:

**Proposición 2.2** *Dado un compacto no vacío $K \subset \Omega$, existe una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ y $\varphi = 1$ en un entorno de $K$.*

**Demostración:** En primer lugar, sea $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ una función positiva en la bola $B(0;1)$ y nula en su complementario. En virtud del lema 2.1, una tal $\rho$ existe. Multiplicando $\rho$ si hiciera falta por una constante positiva, podemos suponer que
$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1. \tag{2.20}$$

Sea $\varepsilon$ una cantidad positiva. Pongamos
$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N} \rho(\varepsilon^{-1} x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$
y
$$\varphi_\varepsilon(x) := \int_{K_{2\varepsilon}} \rho_\varepsilon(x - y)\, dy \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.21}$$
Se tiene entonces que, si $\varepsilon$ es suficientemente pequeño, $\varphi_\varepsilon$ cumple las propiedades deseadas.

En efecto, la función $\varphi_\varepsilon$ está bien definida para todo $x \in \Omega$ y verifica $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Además,
$$0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y)\, dy = 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el conjunto $K_{3\varepsilon}$ es un compacto contenido en $\Omega$. Por otra parte, si $x \in K_\varepsilon$,
$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y) 1_{K_{2\varepsilon}}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y) 1_{K_{2\varepsilon}}(x - y)\, dy = 1,$$
mientras que, si $x \notin K_{3\varepsilon}$, la bola $B(x;\varepsilon)$ no corta a $K_{2\varepsilon}$ y
$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y) 1_{K_{2\varepsilon}}(x - y)\, dy = 0.$$

Esto termina la demostración. $\square$

### 2.4.2. Funciones medibles e integrables. Espacios de Lebesgue

Denotaremos $\mathcal{M}(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ que son *medibles-Lebesgue*. Si $v \in \mathcal{M}(\Omega)$ y es no negativa, se puede hablar de su *integral en* $\Omega$ respecto de la medida de Lebesgue (finita o no). Por definición, la integral de $v$ es el supremo de las sumas finitas

$$\sum_{i=1}^{n} a_i |A_i|,$$

tomado en la familia de las *funciones escalonadas* $v_n := \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ que verifican $0 \le v_n \le v$. Sea finita o no, la integral se denota

$$\int_\Omega v(x)\,dx. \tag{2.22}$$

Si $v \in \mathcal{M}(\Omega)$, se dice que $v$ es integrable si las funciones $v_+ = \text{máx}(v, 0)$ y $v_- = \text{máx}(-v, 0)$ (que son medibles y no negativas) poseen integral finita. En tal caso, llamaremos *integral de* $v$ *en* $\Omega$ al número real

$$\int_\Omega v(x)\,dx = \int_\Omega v_+(x)\,dx - \int_\Omega v_-(x)\,dx. \tag{2.23}$$

Denotaremos $\mathcal{L}^1(\Omega)$ el subconjunto de $\mathcal{M}(\Omega)$ constituido por las funciones medibles e integrables.

Para cada $v \in \mathcal{M}(\Omega)$, se tiene que $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ si y sólo si $|v| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ y esto ocurre si y sólo si

$$\int_\Omega |v(x)|\,dx < +\infty.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{\, v \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_\Omega |v(x)|\,dx < +\infty \,\}.$$

Más generalmente, para cada $p \in [1, +\infty)$, denotaremos $\mathcal{L}^p(\Omega)$ el siguiente conjunto

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{\, v \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_\Omega |v(x)|^p\,dx < +\infty \,\}.$$

Se suele decir que las funciones de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ son $p$-integrables en $\Omega$ (respecto de la medida de Lebesgue). Para cada $p$, $\mathcal{L}^p(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega)$. Esto es consecuencia de la llamada desigualdad triangular, o *desigualdad de Minkowski* (véase el ejercicio 2.9):

*Si* $u, v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, *entonces*

$$\left(\int_\Omega |u+v|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |v|^p\,dx\right)^{1/p} \tag{2.24}$$

Sea $\mathcal{N}$ el subespacio de $\mathcal{M}(\Omega)$ formado por las funciones que se anulan c.p.d. en $\Omega$. Entonces $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ para cada $p$ y, dada $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, tenemos que $v \in \mathcal{N}$ si y sólo si

$$\int_\Omega |v|^p\,dx = 0.$$

Para poder trabajar en un marco funcional adecuado, nos interesará considerar el espacio-cociente $M(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$ (con las operaciones suma y producto por un escalar inducidas por las operaciones de $\mathcal{M}(\Omega)$ del modo habitual).

Obsérvese que $C^0(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ y que dos funciones de $C^0(\Omega)$ que coinciden c.p.d. necesariamente coinciden en todo punto $x \in \Omega$. Por tanto, no hay ambigüedad al identificar cada función de $C^0(\Omega)$ con la clase de $M(\Omega)$ a la que pertenece y podemos admitir que $C^0(\Omega)$ es un subespacio de $M(\Omega)$. Obviamente, lo mismo puede decirse de todo subespacio de $C^0(\Omega)$ y, en particular, de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Si dos funciones de $\mathcal{M}(\Omega)$ coinciden c.p.d. en $\Omega$ y una de ellas es integrable, también lo es la otra y sus integrales coinciden. Por tanto, tiene sentido considerar los espacios-cociente $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}$. Aunque no es totalmente correcto, diremos que los elementos de $L^p(\Omega)$ son las "funciones" medibles y $p$-integrables.

Para cada "clase" $v \in L^p(\Omega)$, la integral de $|v|^p$ en $\Omega$ es, por definición, la integral de Lebesgue de cualquiera de las funciones que forman parte de la clase $|v|^p$. Utilizaremos de nuevo la notación

$$\int_\Omega |v|^p \, dx$$

para designar la integral en $\Omega$ de una "función" $v \in L^p(\Omega)$. Así,

$$L^p(\Omega) = \{\, v \in M(\Omega) : \int_\Omega |v(x)|^p \, dx < +\infty \,\}.$$

Por supuesto, la desigualdad (2.24) es también cierta cuando $u, v \in L^p(\Omega)$. En consecuencia, la aplicación $\|\cdot\|_{L^p}$, definida por

$$\|v\|_{L^p} := \left( \int_\Omega |v|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \forall v \in L^p(\Omega),$$

es una norma en $L^p(\Omega)$. Seguiremos denotando $L^p(\Omega)$ el espacio normado así generado. En particular, la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ está inducida por el producto escalar $(\cdot\,,\cdot)_{L^2}$, donde

$$(u, v)_{L^2} := \int_\Omega uv \, dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Se puede demostrar que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach, es decir un espacio normado completo. Consecuentemente, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Por otra parte, denotaremos $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ el subespacio de $\mathcal{M}(\Omega)$ constituido por las funciones medibles y acotadas y pondremos $L^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{N}$. En este nuevo espacio vectorial, consideraremos la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$, con

$$\|v\|_{L^\infty} := \text{ínf}\,\{\, M > 0 : |v(x)| \le M \ \text{ c.p.d. en } \ \Omega \,\} \quad \forall v \in L^\infty(\Omega).$$

Con esta norma, $L^\infty(\Omega)$ es de nuevo un espacio de Banach y diremos que los elementos de $L^\infty(\Omega)$ son las "funciones" medibles *esencialmente acotadas.*

Usualmente, los espacios de Banach $L^p(\Omega)$, con $p \in [1, +\infty]$, se denominan *espacios de Lebesgue.*

Recordemos la siguiente propiedad, llamada *desigualdad de Hölder*, válida para cada $p \in [1, +\infty]$:

*Si* $u \in L^p(\Omega)$ *y* $v \in L^{p'}(\Omega)$*, entonces* $uv \in L^1(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}. \tag{2.25}$$

*Aquí,* $p'$ *es el exponente conjugado de* $p$*, definido por la igualdad*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{2.26}$$

Recordemos también que, para cada $p \in [1, +\infty)$, se tiene la *propiedad de convergencia dominada* en $L^p(\Omega)$:

> *Si* $\{u_n\}$ *es una sucesión en* $L^p(\Omega)$*, existe el límite* $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ *para* $x$ *c.p.d. en* $\Omega$ *y existe una función* $v \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|u_n(x)| \leq v(x)$ *c.p.d. en* $\Omega$ *para cada* $n \geq 1$*, entonces* $u \in L^p(\Omega)$ *y además*
> $$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0.$$

Tenemos el resultado de densidad siguiente:

**Teorema 2.6** *Para cada* $p \in [1, +\infty)$*,* $\mathcal{D}(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$*.*

**Demostración:** Sean $p \in [1, +\infty)$ y $v \in L^p(\Omega)$. Probaremos que, para cada $\kappa > 0$, existe una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ que verifica

$$\|v - \varphi\|_{L^p} \leq \kappa. \tag{2.27}$$

ETAPA 1: Para cada $\delta > 0$, sea $K(\delta)$ el compacto siguiente:

$$K(\delta) = \{\, x \in \Omega : |x| \leq \frac{1}{\delta}\,, \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta \,\}.$$

Pongamos $v_\delta = v\, 1_{K(\delta)}$. Entonces

$$\|v - v_\delta\|_{L^p} = \left( \int_\Omega |v|^p\, 1_{\Omega \setminus K(\delta)}\, dx \right)^{1/p}$$

converge a cero cuando $\delta \to 0$, gracias al teorema de la convergencia dominada. Por tanto, eligiendo $\delta$ suficientemente pequeño, tenemos

$$\|v - v_\delta\|_{L^p} \leq \frac{\kappa}{2}. \tag{2.28}$$

ETAPA 2: Fijemos $\delta$ tal que se tenga (2.28) y sea $K = K(\delta)$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\rho_\varepsilon$ la función introducida en la demostración de la proposición 2.2. Pongamos

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y) v_\delta(y)\, dy \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.29}$$

Entonces, si $\varepsilon$ es suficientemente pequeño, $w_\varepsilon$ cumple lo deseado.

En efecto, $w_\varepsilon$ está bien definida para todo $x \in \Omega$ y verifica $w_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el conjunto $K_\varepsilon$ es un compacto contenido en $\Omega$. Si $x \notin K_\varepsilon$, la bola $B(x;\varepsilon)$ no corta a $K$ y entonces

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y) v_\delta(x-y)\,dy = 0.$$

Por tanto, para $\varepsilon$ suficientemente pequeño, $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\|v_\delta - w_\varepsilon\|^p &= \int_\Omega \Big| \int_{B(0;\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)(v_\delta(x) - v_\delta(x-y))\,dy \Big|^p\,dx \\ &\le \int_\Omega \|\rho_\varepsilon\|^p_{L^{p'}} \int_{B(0;\varepsilon)} |v_\delta(x) - v_\delta(x-y)|^p\,dy\,dx \\ &\le C \int_{B(0;\varepsilon)} \left( \int_\Omega |v_\delta(x) - v_\delta(x-y)|^p\,dx \right) dy,\end{aligned}$$

donde $C$ es independiente de $\varepsilon$. Por tanto, para $\varepsilon$ suficientemente pequeño, tenemos

$$\|v_\delta - w_\varepsilon\|_{L^p} \le \frac{\kappa}{2}\,. \tag{2.30}$$

Combinando (2.28) y (2.30), obtenemos (2.27) para $\varphi = w_\varepsilon$. □

**Corolario 2.3** *Sea $u \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Entonces $u = 0$ c.p.d.*

**Demostración:** Gracias al teorema 2.6, $\mathcal{D}(\Omega)$ es un subespacio denso de $L^2(\Omega)$. Por tanto, $\mathcal{D}(\Omega)^\perp = \{0\}$ y, en las condiciones del corolario, $u \in \mathcal{D}(\Omega)^\perp$. □

**Observación 2.8** Este resultado también es cierto cambiando $L^2(\Omega)$ por cualquiera de los $L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$. De hecho, veremos más adelante que es cierto pidiéndole a $u$ tan sólo que pertenezca a un espacio adecuado que contiene a todos los $L^p(\Omega)$; véase la proposición 2.3. □

**Corolario 2.4** *Para cada $p \in [1, +\infty)$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach separable, esto es, posee un subconjunto denso y numerable.*

**Demostración:** Sea $\{K_n\}$ una sucesión no decreciente de compactos contenidos en $\Omega$ con $\Omega = \bigcup_{n\ge1} K_n$. Para cada $n \ge 1$, se considera el conjunto $Z_n$ de las funciones polinómicas en $K_n$ con coeficientes racionales. Dada $z \in Z_n$, designaremos $\tilde{z}$ la correspondiente función prolongada por cero a todo $\Omega$ y llamaremos $Z$ al conjunto de las funciones $\tilde{z}$ obtenidas de este modo.

Es obvio que $Z$ es numerable (es unión numerable de conjuntos numerables).

Por otra parte, $Z$ es denso en $L^p(\Omega)$. En efecto, sean $v \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Gracias al teorema 2.6, sabemos que existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\|v - \varphi\|_{L^p} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean $n \geq 1$ tal que $K_n$ contiene al soporte de $\phi$, $c_n$ la medida (de Lebesgue) de $K_n$ y $z \in Z_n$ tal que

$$\|\varphi - z\|_{C^0(K_n)} = \max_{x \in K_n} |\varphi(x) - z(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2c_n^{1/p}}\,.$$

La existencia de $z$ está garantizada por la densidad de $Z_n$ en $C^0(K_n)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{z}\|_{L^p} &\leq \|v - \varphi\|_{L^p} + \|\varphi - \tilde{z}\|_{L^p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left( \int_{K_n} |\varphi(x) - z(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Observación 2.9** El espacio de Banach $L^\infty(\Omega)$ no es separable. Para una demostración de esta afirmación, véase por ejemplo [4]; véase también el ejercicio 2.10. □

Con una demostración similar a la del teorema 2.6, tenemos:

**Teorema 2.7** *Sea $p \in [1, +\infty)$. Dada $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ tales que*

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p} \to 0, \quad \|\partial_i \varphi_n - \partial_i \varphi\|_{L^p} \to 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N. \tag{2.31}$$

**Demostración:** Razonaremos como en la Etapa 2 de la prueba del teorema 2.6.

En efecto, sea $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ y sea $K$ el soporte de $\varphi$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $w_\varepsilon$ la función definida por

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y)\varphi(y)\, dy \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.32}$$

Entonces es obvio que, si $\varepsilon$ es suficientemente pequeño, $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. Razonando como antes, se deduce que $\|\varphi - w_\varepsilon\|_{L^p} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Por otra parte, para cada $i = 1, \ldots, N$, se tiene que

$$\partial_i w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y)\partial_i \varphi(y)\, dy \quad \forall x \in \Omega.$$

En consecuencia, también se puede demostrar que $\|\partial_i \varphi - \partial_i w_\varepsilon\|_{L^p} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Esto prueba el teorema. □

### 2.4.3. Funciones localmente integrables

**Definición 2.4** *Sea $v \in M(\Omega)$. Se dice que $v$ es localmente integrable en $\Omega$ si, para cada compacto $K \subset \Omega$, se tiene $v1_K \in L^1(\Omega)$. El conjunto de las (clases de) funciones $v$ localmente integrables en $\Omega$ es un subespacio vectorial de $M(\Omega)$ y se denota $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

El resultado siguiente es una importante generalización del corolario 2.3:

**Proposición 2.3** *Sea* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u\varphi\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Entonces* $u = 0$ *c.p.d.*

**Demostración:** Supongamos en primer lugar que $\Omega$ es acotado y que $u \in L^1(\Omega)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\|u - \psi_\varepsilon\|_{L^1} \le \varepsilon.$$

Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos entonces que

$$\left|\int_\Omega \psi_\varepsilon \varphi\, dx\right| = \left|\int_\Omega (\psi_\varepsilon - u)\varphi\, dx\right| \le \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty}.$$

Sean $K_+$ y $K_-$ los dos conjuntos siguientes:

$$K_+ = \{\, x \in \Omega : \psi_\varepsilon(x) \ge \varepsilon \,\}, \quad K_- = \{\, x \in \Omega : \psi_\varepsilon(x) \le -\varepsilon \,\}.$$

Entonces $K_+$ y $K_-$ son dos compactos contenidos en $\Omega$ y, usando la proposición 2.2, es fácil probar que existe una función $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ que verifica:

$$-1 \le \varphi_\varepsilon \le 1, \quad \varphi_\varepsilon = 1 \text{ en } K_+, \quad \varphi_\varepsilon = -1 \text{ en } K_-.$$

Pongamos $K = K_+ \cup K_-$ y denotemos $m(\Omega)$ la medida de Lebesgue de $\Omega$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_K |\psi_\varepsilon(x)|\, dx &= \int_\Omega \psi_\varepsilon \varphi_\varepsilon\, dx - \int_{\Omega\setminus K} \psi_\varepsilon\varphi_\varepsilon\, dx \\ &\le \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |\psi_\varepsilon(x)|\, dx \\ &\le (1 + m(\Omega))\varepsilon,\end{aligned}$$

de donde

$$\|u\|_{L^1} \le \|u - \psi_\varepsilon\|_{L^1} + \|\psi_\varepsilon\|_{L^1} \le (2 + m(\Omega))\varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon$ es arbitrariamente pequeño, deducimos que $u = 0$ c.p.d.

Supongamos ahora que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto arbitrario y $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Para cada $n \ge 1$, sea

$$\Omega_n = \{\, x \in \Omega : |x| < n, \;\; \mathrm{dist}\,(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 1/n \,\}.$$

Es inmediato que cada $\Omega_n$ es un abierto acotado, cada $\overline{\Omega}_n$ es un compacto contenido en $\Omega$ y que además se tiene

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \quad \forall n \ge 1, \quad \cup_{n\ge 1}\Omega_n = \Omega.$$

En cada $\Omega_n$ podemos razonar como antes para deducir que $u$ se anula c.p.d. Gracias a las propiedades precedentes de los $\Omega_n$, es claro que esto implica $u = 0$ c.p.d. en $\Omega$. □

El Apéndice de este Capítulo contiene conceptos y resultados relacionados con abiertos de $\mathbb{R}^N$ “de frontera regular”. En particular, se consideran la medida “de superficie” sobre $\partial\Omega$ y los espacios de funciones integrables (o $p$-integrables) respecto de esta medida.

## 2.5. Distribuciones. Motivación, propiedades y ejemplos

Es claro que $\mathcal{D}(\Omega) \subset C_c^k(\overline{\Omega}) \subset C^k(\overline{\Omega}) \subset C^k(\Omega)C^0(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ para cada $k \geq 0$ (con la identificación habitual en $C^0(\Omega)$) y, por otra parte, $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ para cada $p \in [1, +\infty]$. Así, $\mathcal{D}(\Omega)$ y $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pueden ser observados como los espacios de funciones de interés respectivamente "más pequeño" y "más grande", al menos en el contexto de las EDPs.

En todos los espacios anteriores se pueden definir estructuras topológicas adecuadas. Como hemos visto, en los $L^p(\Omega)$ basta considerar las correspondientes normas. De igual modo, para cada $k \geq 0$, $C^k(\overline{\Omega})$ se convierte en un espacio de Banach separable para la norma siguiente:

$$\|\varphi\|_{C^k} := \max_{|\alpha| \leq k} \left( \max_{x \in \overline{\Omega}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \right) \quad \forall \varphi \in C^k(\overline{\Omega}).$$

En $\mathcal{D}(\Omega)$, los $C_c^k(\Omega)$, los $C^k(\Omega)$ y $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, no es posible definir estructuras normadas con buenas propiedades. Sin embargo, estos espacios vectoriales se pueden dotar de topologías "naturales" que son compatibles con la estructura vectorial, es decir, que hacen en cada caso las aplicaciones $(v, w) \mapsto v + w$ y $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ continuas. Por simplicidad, no daremos demasiados detalles; tan sólo hablaremos de los conceptos de convergencia asociados a estas topologías; para una presentación más completa, véase [3, 21, 22].

**Definición 2.5**

- *Se dice que $v_n \to v$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si, para todo compacto $K \subset \Omega$, se tiene*

$$\int_K |v_n - v| \, dx \to 0.$$

- *Se dice que $\varphi_n \to \varphi$ en $C^k(\Omega)$ si, para todo compacto $K \subset \Omega$, se tiene*

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{en} \quad C^k(K),$$

  *es decir, $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ uniformemente en $K$ para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ con $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leq k$.*

- *Finalmente, se dice que $\varphi_n \to \varphi$ en $C_c^k(\Omega)$ si existe un compacto $K \subset \Omega$ que contiene los soportes de $\varphi$ y de todas las $\varphi_n$ y, además, para todo multi-índice $\alpha$ con $|\alpha| \leq k$,*

$$\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi \quad \text{uniformemente en} \quad K.$$

- *Se dice que $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ si se tiene la propiedad precedente para todo $k \geq 0$.*

Se tiene entonces que la aplicación identidad de $C^0(\Omega)$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es secuencialmente continua, esto es,

$$\varphi_n \to \varphi \;\text{ en }\; C^0(\Omega) \;\Rightarrow\; \varphi_n \to \varphi \;\text{ en }\; L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Diremos que $C^0(\Omega)$ se inyecta en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, con inyección (secuencialmente) continua y escribiremos que $C^0(\Omega) \hookrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Obsérvese que lo mismo puede decirse de las aplicaciones identidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $C^k_c(\Omega)$, $C^k_c(\Omega)$ en $C^k(\Omega)$, etc. Por tanto, también diremos que estas inyecciones son continuas y escribiremos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow C^k_c(\Omega)$, $C^k_c(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$, etc.

A continuación, introduciremos un nuevo concepto que jugará un papel fundamental en la resolución de problemas formulados para EDPs:

**Definición 2.6** *Se denomina distribución en $\Omega$ a toda aplicación lineal $S : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ secuencialmente continua.*

Dada una distribución $S$, el valor asociado por $S$ a una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se denotará $\langle S, \varphi \rangle$.

El conjunto de las distribuciones en $\Omega$ posee estructura de espacio vectorial para las operaciones habituales y se denota $\mathcal{D}'(\Omega)$. Por otra parte, en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es también posible definir una topología adecuada (de nuevo compatible con la estructura vectorial), que conduce al siguiente concepto de convergencia:

**Definición 2.7** *Se dice que $S_n \to S$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si*

$$\langle S_n, \varphi \rangle \to \langle S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Ejemplos 2.4**

1. Sea $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y pongamos

$$\langle S_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.33}$$

   Entonces es fácil comprobar que $S_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

   En breve se verá que $S_f$ puede identificarse con $f$. Más precisamente, veremos que la aplicación $f \mapsto S_f$, que es evidentemente lineal, es también secuencialmente continua e inyectiva de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y que, por tanto, $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ puede ser mirado como un subespacio no trivial de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2. Sean $N = 2$ y $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ y sea $\delta_{(0,0)} : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle = \varphi(0,0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

   Entonces $\delta_{(0,0)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

   Se trata de una distribución de gran importancia, denominada *distribución de Dirac* (o delta de Dirac) en $(0,0)$.

3. Finalmente, con los mismos $N$ y $\Omega$, sea

$$\langle S, \varphi \rangle = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

   De nuevo, $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

   De hecho, veremos más delante que esta distribución puede interpretarse como la derivada segunda respecto de $x_1$ y $x_2$ de $\delta_{(0,0)}$. $\square$

Veamos a continuación que las funciones localmente integrables pueden ser observadas como distribuciones:

**Lema 2.2** *Sea* $f \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ *y consideremos la aplicación* $S_f : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, *definida por* (2.33). *Entonces* $S_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Además, la aplicación* $f \mapsto S_f$ *es lineal, secuencialmente continua e inyectiva de* $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Demostración:** Es fácil comprobar que todas estas afirmaciones son ciertas. En particular, $S_f$ es secuencialmente continua, puesto que, si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces

$$\int_\Omega f\,\varphi_n\,dx \to \int_\Omega f\,\varphi\,dx.$$

Por otra parte, la inyectividad de la aplicación $f \mapsto S_f$ es consecuencia directa de la proposición 2.3: si $S_f = 0$, entonces $f = 0$ c.p.d. □

Luego, efectivamente, $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ puede ser observado como un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (el espacio de las distribuciones definidas por funciones localmente integrables); además, podemos escribir que $L^1_{\rm loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Hablaremos a continuación de las distribuciones de Dirac:

**Definición 2.8** *Sea* $z \in \Omega$. *Se llama delta de Dirac en* $z$ *a la distribución siguiente:*

$$\langle \delta_z, \varphi \rangle := \varphi(z) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se tiene el resultado siguiente:

**Lema 2.3** *Sea* $z \in \Omega$. *Entonces* $\delta_z \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *y no existe ninguna* $f \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ *tal que* $\delta_z = S_f$.

**Demostración:** Está claro que la aplicación $\varphi \mapsto \varphi(z)$ está bien definida y es lineal y secuencialmente continua de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, $\delta_z \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Supongamos que existe $f \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ tal que $S_f = \delta_z$. Entonces, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $z \notin \operatorname{sop}\varphi$, tenemos que

$$\int_\Omega f\,\varphi\,dx = \langle S_f, \varphi \rangle = 0.$$

Luego, por la proposición 2.3, $f = 0$ c.p.d. en el abierto $\Omega \setminus \{z\}$. Pero entonces $f = 0$ c.p.d. en $\Omega$.

Ahora bien, esto es imposible, puesto que implicaría $\delta_z = 0$, lo que no es cierto. □

Así, como habíamos anunciado, resulta que el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ es "estrictamente" más grande que $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ y una distribución debe ser concebida como un objeto que generaliza el concepto de función localmente integrable.

La gran ventaja que tienen las distribuciones es que admiten derivadas de cualquier orden. Esto es, en el marco de las distribuciones, podemos generalizar el cálculo diferencial de manera que siempre es posible derivar y obtener nuevas distribuciones. Naturalmente, esto deja abiertas muchas posibilidades en el contexto que nos interesa.

**Definición 2.9** *Sean $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ un multi-índice. Se denomina derivada en el sentido de las distribuciones (o derivada distribucional) de orden $\alpha$ de $S$ a la distribución $\partial^\alpha S$, dada por*

$$\langle \partial^\alpha S, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle S, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Claramente, si $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha$ es un multi-índice, $\partial^\alpha S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Además, para cada $\alpha$, la aplicación $S \mapsto \partial^\alpha S$ es lineal y secuencialmente continua del espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ en sí mismo.

En ocasiones, en vez de $\partial^\alpha S$, escribiremos de forma más explícita

$$\frac{\partial^{|\alpha|} S}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} .$$

En particular, las derivadas distribucionales de primer y segundo orden de $S$ se denotarán, respectivamente,

$$\partial_i S = \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \partial_i \partial_j S = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{con} \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Igualmente, $\nabla S$ es el vector de componentes las $\partial_i S$, también llamado *gradiente* de $S$:

$$\nabla S = (\partial_1 S, \ldots, \partial_N S).$$

**Ejemplos 2.5**

1. La distribución que aparece en el ejemplo 2.4.3 es ciertamente la derivada segunda de $\delta_{(0,0)}$: $S = \partial_1^2 \delta_{(0,0)}$.

2. Sean de nuevo $N = 2$, $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ y $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Entonces

$$\langle \partial_2 S_f, \varphi \rangle = -\int_\Omega f \, \partial_2 \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

   En el caso partcular en que $f$ es la función que vale $x_2$ si $x_2 > 0$ y 0 en caso contrario, tenemos para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ que

$$\langle \partial_2 S_f, \varphi \rangle = -\int_{-1}^1 \int_0^1 x_2 \partial_2 \varphi \, dx_2 \, dx_1 = \int_{-1}^1 \int_0^1 \varphi \, dx_2 \, dx_1 = \langle S_g, \varphi \rangle,$$

   donde $g$ es una función que coincide con $\partial_2 f$ allá donde esta derivada tiene sentido.

   Vemos por tanto en este caso que, al derivar en el sentido de las distribuciones una función localmente integrable, obtenemos otra función localmente integrable.

3. Con los mismos $N$ y $\Omega$, sea ahora $f$ la función que vale 1 si $x_2 > 0$ y 0 en caso contrario. Entonces

$$\langle \partial_2 S_f, \varphi \rangle = -\int_{-1}^1 \int_0^1 \partial_2 \varphi \, dx_2 \, dx_1 = \int_{-1}^1 \varphi(x_1, 0) \, dx_1 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

   y ahora no existe ninguna $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\partial_2 S_f = S_g$. Luego, en general, no se conserva la propiedad que tiene la distribución del ejemplo precedente. Dicho de otro modo, en general, la derivada distribucional de una función localmente integrable no es una función localmente integrable.

   □

Veamos a continuación que la definición 2.9 es coherente y extiende la definición clásica de derivada parcial:

**Proposición 2.4** *Sea $u \in C^0(\Omega)$ y supongamos que*

$$\exists\, \partial_i u(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \textit{con} \quad \partial_i u \in C^0(\Omega)$$

*(la derivada parcial "clásica" de $u$ respecto de $x_i$). Entonces*

$$\partial_i S_u = S_{\partial_i u}\,. \tag{2.34}$$

**Demostración:** Hay que demostrar que

$$\int_\Omega \partial_i u\, \varphi\, dx = -\int_\Omega u\, \partial_i \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tenemos que $u\varphi$ posee derivada parcial respecto de $x_i$ en $\Omega$, que ésta es continua y que

$$\int_\Omega \partial_i (u\varphi)\, dx = \int_\Omega \partial_i u\, \varphi\, dx + \int_\Omega u\, \partial_i \varphi\, dx. \tag{2.35}$$

Veamos que el primer miembro de (2.35) es cero.

Para ello, denotemos $\widetilde{u\varphi}$ la prolongación por cero a todo $\mathbb{R}^N$ de la función $u\varphi$. Entonces, si $M > 0$ es suficientemente grande,

$$\mathrm{sop}\,(\widetilde{u\varphi}) \subset \{\, x \in \mathbb{R}^N : -M \le x_i \le M \,\}$$

y

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{u\varphi})\, dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left( \int_{-M}^{M} \frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{u\varphi})\, dx_i \right) dx',$$

donde $dx'$ denota el elemento de integración en $\mathbb{R}^{N-1}$. Pero esta última integral es cero, de donde se tiene el resultado deseado. $\square$

**Observación 2.10** La igualdad (2.34) sigue siendo cierta en condiciones más generales. Por ejemplo, esto ocurre si $u \in C^0(\Omega)$ y existe la derivada clásica $\partial_i u(x)$ en casi todo $x \in \Omega$, con $\partial_i u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. La demostración es muy parecida a la precedente. Por el contrario, como hemos visto en el ejemplo 2.5.3, la igualdad deja de ser cierta si $u$ no es continua. $\square$

En lo que sigue, mientras no genere confusión, dada una función $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, denotaremos también $u$ la distribución $S_u$ asociada. Así, por ejemplo denotaremos $\partial_1^2 u$ la derivada (distribucional) segunda respecto de $x_1$ dos veces de (la distribución definida por) $u$.

## 2.6. Los espacios de Sobolev $H^1$, $H_0^1$ y $H^{-1}$. Propiedades

Ahora, nuestra intención es aplicar los resultados de las Secciones 2.2 y 2.3 en espacios de funciones adecuados y con formas lineales y bilineales apropiadas, determinadas por ciertas EDPs. Estos espacios de funciones son subespacios de los $L^p(\Omega)$ y se denominan *espacios de Sobolev.*

de ahora en adelante, $\|\cdot\|_{L^2}$ y $(\cdot\,,\cdot)_{L^2}$ denotan respectivamente la norma y el producto escalar de $L^2(\Omega)$.

Consideremos el conjunto

$$H^1(\Omega) := \{\, v \in L^2(\Omega) : \exists\, \partial_i v \in L^2(\Omega) \text{ para } 1 \le i \le N \,\}, \tag{2.36}$$

donde las derivadas se entienden en el sentido de las distribuciones. Dotado de las operaciones habituales, $H^1(\Omega)$ se convierte en un subespacio vectorial de $L^2(\Omega)$, que será denotado de igual manera. Por otra parte, en $H^1(\Omega)$ se puede introducir el producto escalar "natural"

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega), \tag{2.37}$$

para el cual se tiene lo siguiente:

**Teorema 2.8** *Dotado del producto escalar* $(\cdot\,,\cdot)_{H^1}$*,* $H^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert.*

**Demostración:** La norma inducida por (2.37) es

$$\|v\|_{H^1} := \left(\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.38}$$

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy para esta norma; veamos que $\{u_n\}$ es convergente en $H^1(\Omega)$.

Claramente, $\{u_n\}$ y $\{\partial_i u_n\}$ $(1 \le i \le N)$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$, por lo que existen funciones $u, v_1, \dots, v_N$ tales que

$$u_n \to u, \quad \partial_i u_n \to v_i \ \text{ en } L^2(\Omega) \quad (1 \le i \le N). \tag{2.39}$$

Veamos que, para cada $i$, $v_i$ es la derivada distribucional de $u$, con lo cual quedará probado que $u \in H^1(\Omega)$ y que $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$.

Dados $i$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos que

$$\int_\Omega \partial_i u_n \, \varphi \, dx = -\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \tag{2.40}$$

para cada $n \ge 1$. Gracias a (2.39), podemos pasar al límite en (2.40) y deducir que

$$\int_\Omega v_i \, \varphi \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx. \tag{2.41}$$

Pero, como $\varphi$ es arbitraria en $\mathcal{D}(\Omega)$, esto significa que $u$ posee derivada en $L^2(\Omega)$ respecto de $x_i$. Esto prueba lo que queríamos. $\square$

En lo que sigue, $H^1(\Omega)$ denotará el espacio de Hilbert resultante de considerar el producto escalar $(\cdot\,,\cdot)_{H^1}$. Se dice que $H^1(\Omega)$ es un *espacio de Sobolev.*

En virtud de la proposición 2.4, con la identificación habitual, tenemos que $C^1_c(\Omega) \subset H^1(\Omega)$; por otra parte, si $\Omega$ es acotado, también se tiene que $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ (porque, en este caso, toda función de $C^1(\overline{\Omega})$ está en $L^2(\Omega)$ y posee derivada distribucional en $L^2(\Omega)$). En ambos casos, las inyecciones son secuencialmente continuas:

$$C^1_c(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \ \text{ y } \ C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow H^1(\Omega) \ \text{ si } \Omega \text{ es acotado.}$$

**Teorema 2.9** *El espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$ es separable.*

**Demostración:** Recordemos que el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ es separable, véase el corolario 2.4 en la Sección 2.4.

Sea $Y$ el espacio producto $Y = L^2(\Omega)^{N+1}$, dotado del producto escalar

$$((u_0, u_1, \ldots, u_N), (v_0, v_1, \ldots, v_N))_Y = \sum_{i=0}^{N} (u_i, v_i)_{L^2}.$$

Entonces $Y$ es un espacio de Hilbert separable.

Sea ahora $J : H^1(\Omega) \mapsto Y$ la aplicación definida por

$$Jv = (v, \partial_1 v, \ldots, \partial_n v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

que es lineal, continua, inyectiva e *isométrica*, es decir, verifica

$$\|Jv\|_Y = \|v\|_{H^1} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Los espacios $H^1(\Omega)$ y $R(J)$ son isomorfos e isométricos. En particular, $R(J)$ es un subespacio cerrado de $Y$ y es por tanto un nuevo espacio de Hilbert separable. De donde $H^1(\Omega)$ es separable. □

**Observación 2.11** En general, $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $H^1(\Omega)$. De hecho, $\mathcal{D}(\Omega)$ nunca es denso si $\Omega$ es acotado y su frontera es por ejemplo "de clase $C^{0,1}$".[1] Sin embargo, sí lo es cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$ (para la demostración, véase [4]; véase también el ejercicio 2.18). Por otra parte, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo de frontera $\partial\Omega$ regular, se puede demostrar que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, que coincide con el espacio de las restricciones a $\Omega$ de las funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, es denso en $H^1(\Omega)$ (véase [6]; véase también el ejercicio 2.19). □

**Definición 2.10** *Llamaremos $H^1_0(\Omega)$ a la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Se trata por tanto de un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ que, para el producto escalar de $H^1(\Omega)$, se convierte en un nuevo espacio de Hilbert separable.*

La mejor forma que hay de caracterizar $H^1_0(\Omega)$ es a través de la *aplicación traza.* Para una correcta introducción, necesitamos utilizar el espacio de Hilbert $L^2(\partial\Omega)$, cuya definición y propiedades están dadas en el Apéndice de este Capítulo.

[1] Esto es consecuencia de algo que se verá más adelante: si $\Omega$ es un abierto acotado de frontera regular y $v \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces $v$ pertenece a la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ si y sólo si $v(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

**Teorema 2.10** *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y que, o bien $\Omega$ es un abierto conexo acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{0,1}$, o bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Existe una única aplicación $\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); L^2(\partial\Omega))$ tal que*

$$\gamma\varphi = \varphi|_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi \in C^1_c(\overline{\Omega}) \tag{2.42}$$

*(aquí, $C^1_c(\overline{\Omega})$ es el espacio de las restricciones a $\Omega$ de las funciones de $C^1_c(\mathbb{R}^N)$). El espacio imagen $R(\gamma)$ está estrictamente contenido en $L^2(\partial\Omega)$ y, por otra parte, $N(\gamma) = H^1_0(\Omega)$. Además, se verifica la siguiente propiedad, llamada fórmula generalizada de integración por partes:*

$$\int_\Omega u\,\partial_i v\,dx = -\int_\Omega \partial_i u\,v\,dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u\,\gamma v\,n_i\,d\Gamma \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \tag{2.43}$$

**Demostración:** Presentaremos la prueba sólo para $\Omega = \mathbb{R}^N_+$; véase el ejercicio 2.20 para la demostración correspondiente al otro caso; véase también [6, 24].

Observemos en primer lugar que, en este caso, $\partial\Omega = \{ (x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{N-1} \}$ y el espacio $\mathcal{H} := C^1_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N_+)$.

Sea $\gamma_0$ la aplicación definida por

$$\gamma_0\varphi = \varphi|_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}.$$

Entonces $\gamma_0 : \mathcal{H} \mapsto L^2(\partial\Omega)$ está bien definida y es lineal.

Veamos que $\gamma_0$ es continua cuando $\mathcal{H}$ se dota de la norma y producto escalar de $H^1(\mathbb{R}^N_+)$. En efecto, sean $\varphi \in \mathcal{H}$ y $x = (x', 0)$ un punto de $\partial\Omega$. Entonces

$$|\varphi(x', 0)|^2 = -2 \int_0^{+\infty} \varphi(x', y_N) \frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x', y_N)\,dy_N.$$

Luego

$$|\varphi(x', 0)|^2 \leq 2 \left( \int_0^{+\infty} |\varphi(x', y_N)|^2\,dy_N \right)^{1/2} \left( \int_0^{+\infty} |\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x', y_N)|^2\,dy_N \right)^{1/2}$$

e, integrando respecto de $x'$ en $\mathbb{R}^{N-1}$, obtenemos:

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \left[ |\varphi|^2 + |\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}|^2 \right] dy_N\,dx' \leq \|\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}.$$

En consecuencia, existe una única extensión lineal continua $\gamma$ de $\gamma_0$ que verifica (2.42).

Existen funciones de $L^2(\partial\Omega)$ que no pertenecen a $R(\gamma)$. En efecto, sea $f \in R(\gamma)$ y denotemos $\hat{f}$ la transformada de Fourier de $f$, es decir, la función de $L^2(\partial\Omega)$ definida por

$$\hat{f}(\xi') = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i\xi'\cdot x'} f(x')\,dx' \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Entonces no es difícil probar que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} |\hat{f}(\xi')|^2\,d\xi' < +\infty \tag{2.44}$$

(véase el ejercicio 2.21). Pero es fácil construir funciones de $L^2(\partial\Omega)$ para las cuales no se tiene (2.44).

Por otra parte, $N(\gamma) = H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$. En efecto, si $v \in N(\gamma)$, podemos construir explícitamente una sucesión de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$ que converge a $v$ en el sentido de la norma de $H^1(\mathbb{R}_+^N)$. Más precisamente, para cada $\varepsilon > 0$, pongamos

$$K_\varepsilon = \{\, x \in \mathbb{R}_+^N : |x| \leq \varepsilon^{-1}, \quad x_N \geq 3\varepsilon \,\} \tag{2.45}$$

y

$$A_\varepsilon = \{\, x \in \mathbb{R}_+^N : |x| \leq \varepsilon^{-1} + 1, \quad x_N \geq 2\varepsilon \,\}, \tag{2.46}$$

sea $\psi_\varepsilon$ una función que verifica

$$\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \operatorname{sop} \psi_\varepsilon \subset A_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon = 1 \ \text{ en } \ K_\varepsilon, \quad 0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1 \tag{2.47}$$

y, finalmente, sea $v_\varepsilon$ la función definida como sigue:

$$v_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\,(\psi_\varepsilon v)(y)\,dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N-1}. \tag{2.48}$$

Entonces se puede demostrar fácilmente que $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$ para todo $\varepsilon > 0$ y, además, $v_\varepsilon \to v$ en $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ (véase el ejercicio 2.22). En consecuencia, $v \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$.

Finalmente, veamos que se tiene (2.43). Por ejemplo, probemos esta desigualdad para $N \geq 3$.

Supongamos en primer lugar que $u, v \in \mathcal{H}$. Entonces (2.43) es inmediato: basta tener en cuenta que, para $M > 0$ suficientemente grande, $\operatorname{sop}(uv) \subset [-M, M]^{N-1} \times [0, M]$.

Si $1 \leq i \leq N-1$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \partial_i(uv)\,dx = \int_0^M \int_{(-M,M)^{N-2}} \left( \int_{-M}^M \partial_i(uv)\,dx_i \right) dx_i'\,dx_N,$$

donde hemos agrupado en $dx_i'$ los elementos de integración $dx_j$ con $1 \leq j \leq N-1$, $j \neq i$. Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \partial_i(uv)\,dx = \int_0^M \int_{(-M,M)^{N-2}} \Big[ uv \Big]_{x_i=-M}^{x_i=M} dx_i'\,dx_N = 0.$$

Si, por el contrario, $i = N$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \partial_i(uv)\,dx = \int_{(-M,M)^{N-1}} \Big[ uv \Big]_{x_N=0}^{x_N=M} dx' = -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x',0)\,v(x',0)\,dx'.$$

Por tanto, tenemos efectivamente (2.43).

Ahora, procediendo por densidad, es posible probar (2.43) primero cuando $u \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$ y $v \in \mathcal{H}$ y después, finalmente, cuando $u, v \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$. $\square$

El resultado precedente es conocido como *teorema de trazas en* $H^1(\Omega)$. La aplicación $\gamma$ es por definición la *aplicación traza.* También se dice que $\gamma v$ es la traza de $v$ sobre $\partial\Omega$ y es costumbre escribir $v|_{\partial\Omega}$ en vez de $\gamma v$.

Obsérvese que, en principio, no tiene sentido hablar de la restricción de una función de $L^2(\Omega)$ sobre $\partial\Omega$, dado que $\partial\Omega$ es un conjunto de medida nula. Sin embargo, la aplicación traza permite hablar de los valores frontera de las funciones de $H^1(\Omega)$. En particular, a la vista de lo que precede, si $v \in H_0^1(\Omega)$, interpretamos que "$v$ se anula sobre $\partial\Omega$".

**Teorema 2.11** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío, acotado al menos en una dirección. Entonces existe una constante positiva $C$ (que sólo depende de $\Omega$) tal que*

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \le C\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx. \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.49}$$

**Demostración:** Por densidad, basta probar (2.49) cuando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Sea entonces $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ una función dada. Denotaremos también $v$ la prolongación por cero de $v$ a todo $\mathbb{R}^N$ (una función de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$).

No es restrictivo suponer que $\Omega$ es acotado en la dirección de $x_1$. Esto quiere decir que existe $M > 0$ tal que $\Omega \subset (-M, M)\times\mathbb{R}^{N-1}$. Sea $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$. Entonces

$$v(x) = \int_{-M}^{x_1} \partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)\,dy_1,$$

de donde

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &\le \left(\int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)|\,dy_1\right)^2 \\ &\le 2M\int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)|^2\,dy_1. \end{aligned}$$

Integrando respecto de $x$ en $\Omega$, tenemos ahora:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v(x)|^2\,dx &\le 2M\int_\Omega\int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)|^2\,dy_1\,dx \\ &= 4M^2\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)|^2\,dy_1\,dx', \end{aligned} \tag{2.50}$$

donde $dx'$ denota el elemento de integración en $\mathbb{R}^{N-1}$.

De (2.50), se deduce fácilmente (2.49). □

Se dice que (2.49) es la *desigualdad de Poincaré.* Obsérvese que (2.49) es falsa en general para las funciones de $H^1(\Omega)$.

Si el abierto $\Omega$ es acotado al menos en una dirección, podemos definir un nuevo producto escalar en $H_0^1(\Omega)$. En efecto, pongamos

$$(u, v)_{H_0^1} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.51}$$

Entonces, gracias a (2.49), $(\cdot\,,\cdot)_{H_0^1}$ es un verdadero producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ e induce en este espacio una norma, denotada $\|\cdot\|_{H_0^1}$, equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_{H^1}$.

**Definición 2.11** *Denominaremos $H^{-1}(\Omega)$ al dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.*

Tenemos que $H^{-1}(\Omega)$ es un nuevo espacio de Hilbert, isomorfo e isométrico a $H_0^1(\Omega)$. El resultado que sigue proporciona una importante caracterización de $H^{-1}(\Omega)$:

**Teorema 2.12** *Sean $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$ y sea $F : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma lineal definida como sigue:*

$$F(v) = \int_\Omega \left( f_0\, v + \sum_{i=1}^N f_i\, \partial_i v \right) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.52}$$

*Entonces $F \in H^{-1}(\Omega)$. Además, si denotamos $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ la norma en $H^{-1}(\Omega)$ inducida por la norma de $H^1(\Omega)$,*

$$\|F\|_{H^{-1}} \leq \left( \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}. \tag{2.53}$$

*Recíprocamente, si $F \in H^{-1}(\Omega)$, existen $N+1$ funciones $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$ tales que se tiene* (2.52) *y*

$$\|F\|_{H^{-1}} = \left( \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}. \tag{2.54}$$

**Demostración:** Supongamos en primer lugar dadas $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$. Es entonces inmediato que la forma lineal $F$ definida por (2.52) es continua. Por tanto, $F \in H^{-1}(\Omega)$. Además,

$$|F(v)| \leq \|f_0\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2} \|\partial_i v\|_{L^2} \leq \left( \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \|v\|_{H^1},$$

de donde tenemos (2.53).

Recíprocamente, sea $F \in H^{-1}(\Omega)$. Por el teorema 2.1, existe $u_F \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_F\|_{H^1} = \|F\|_{H^{-1}}, \quad (u_F, v)_{H^1} = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $f_0 = u_F$ y $f_i = \partial_i u_F$ para $1 \leq i \leq N$, tenemos (2.52) y (2.54). □

Supongamos que $F \in H^{-1}(\Omega)$ está definida por (2.52), donde las $f_i$ son funciones de $L^2(\Omega)$. Entonces la restricción de $F$ a $\mathcal{D}(\Omega)$ coincide con la distribución

$$S := f_0 - \sum_{i=1}^N \partial_i f_i.$$

Por otra parte, como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, la única extensión posible de $S$ como forma lineal continua sobre $H_0^1(\Omega)$, es decir, como elemento de $H^{-1}(\Omega)$, es $F$. Por estos motivos, pondremos

$$F = f_0 - \sum_{i=1}^N \partial_i f_i \tag{2.55}$$

e identificaremos toda distribución que sea suma de una función de $L^2(\Omega)$ y derivadas parciales de funciones de $L^2(\Omega)$ con un elemento de $H^{-1}(\Omega)$.[2]

En lo que sigue, usaremos el teorema 2.1 para identificar $L^2(\Omega)$ con su dual. Por el contrario, no haremos uso de la identificación posible de $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$, sino que utilizaremos la fórmula (2.52) para describir los elementos de $H^{-1}(\Omega)$. De este modo, $L^2(\Omega)$ puede identificarse con un subespacio de $H^{-1}(\Omega)$ y podemos escribir que, salvo isomorfismos isométricos,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \tag{2.56}$$

(con inyecciones continuas).

**Observación 2.12** La manera correcta de interpretar (2.56) consiste en decir que las funciones de $H_0^1(\Omega)$ están en $L^2(\Omega)$ (aunque en el segundo espacio hay más funciones que en el primero) y que, por otra parte, las funciones de $L^2(\Omega)$ determinan formas lineales continuas sobre $H_0^1(\Omega)$ (aunque hay formas lineales continuas que no están definidas por elementos de $L^2(\Omega)$). Para convencerse de esto último, basta elegir $N = 1$ y $\Omega = (-1, 1)$ y considerar la forma lineal $F$, dada como sigue:

$$F(v) = \int_0^1 v'(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(-1,1).$$

□

## 2.7. Formulación débil de problemas elípticos

A continuación, analizaremos algunos problemas de contorno para determinadas EDPs. Como ya hemos indicado con anterioridad, para ello es conveniente "relajar" o "debilitar" el concepto de solución.

Para mayor claridad, nos limitaremos de momento a considerar el problema siguiente:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.57}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío y $f \in L^2(\Omega)$.

**Definición 2.12** *Se llama solución débil de* (2.57) *a toda función $u$ que verifique:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.58}$$

Este concepto de solución generaliza el de solución clásica. Más precisamente, tenemos el resultado siguiente:

**Proposición 2.5** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío y supongamos (por ejemplo) que $f \in L^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución clásica de* (2.57)*, entonces $u$ es solución débil.*

[2] Se suele decir también que $H^{-1}(\Omega)$ es el espacio de las distribuciones sobre $\Omega$ que se escriben como suma de una función de $L^2(\Omega)$ y derivadas parciales de funciones de $L^2(\Omega)$.

**Demostración:** En las condiciones de esta proposición, $u \in H_0^1(\Omega)$ (véase el ejercicio 2.23).

Sea por otra parte $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ una función dada. Para cada $i = 1, \dots, N$, se tiene que

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, \varphi \, dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \varphi \right) dx - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx. \tag{2.59}$$

La primera integral del lado derecho vale cero. En consecuencia, sumando las igualdades (2.59) para $i = 1, \dots, N$ y teniendo en cuenta que $-\Delta u = f$ en $\Omega$, obtenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por densidad, se deduce de aquí que $u$ es solución débil de (2.57). □

**Observación 2.13** También es cierto que, si $f$ es suficientemente regular, $u$ es solución débil de (2.57) y $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, entonces $u$ es solución clásica; véase el ejercicio 2.26. □

**Observación 2.14** *A priori,* cabe esperar que resolver (2.58) sea más fácil que resolver (2.57) en un sentido clásico. En efecto, en el primer caso estamos buscando la solución en un espacio mayor (donde sólo tienen sentido derivadas de primer orden) y estamos pidiendo a la solución propiedades menos exigentes. De hecho, aplicando directamente el teorema 2.2 vemos que, para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe una única solución débil de (2.58). □

Consideraremos a continuación una situación más general. Para ello, supongamos dados unos coeficientes

$$a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in L^\infty(\Omega) \quad (i, j = 1, \dots, N) \tag{2.60}$$

y unas funciones

$$f_0, f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega), \quad g \in H^1(\Omega). \tag{2.61}$$

Nuestro problema es ahora el siguiente:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f_0 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.62}$$

**Definición 2.13** *Se llama solución débil de* (2.62) *a toda función* $u$ *que verifique:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \partial_j u \, \partial_i v + \sum_{i=1}^N b_i \, \partial_i u \, v + c\, uv)\, dx = \int_\Omega (f_0 v + \sum_{i=1}^N f_i \partial_i v)\, dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega); \quad u \in g + H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.63}$$

Bajo condiciones de regularidad para los datos precedentes, no es difícil probar un resultado análogo a la proposición 2.5 para el problema (2.63). En consecuencia, la definición 2.13 es la adecuada.

**Observación 2.15** También está claro que $u$ es solución débil de (2.62) si y sólo si $u \in H^1(\Omega)$, $\gamma u = \gamma g$ en $L^2(\partial\Omega)$ y

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_{i=1}^{N} b_i \partial_i u + cu = f_0 - \sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega),$$

donde la notación $\partial_i$ se asocia, como antes, a las derivadas en $\mathcal{D}'(\Omega)$; véase el párrafo que sigue al teorema 2.12. □

Para probar un resultado de existencia y unicidad de solución débil de (2.62), introduciremos la notación siguiente:

$$a(u,v) := \int_\Omega \Big( \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, \partial_j u \, \partial_i v + \sum_{i=1}^{N} b_i\, \partial_i u\, v + c\, uv \Big)\, dx,$$

$$F(v) := \int_\Omega \Big( f_0 v + \sum_{i=1}^{N} f_i \partial_i v \Big)\, dx, \quad \ell(v) := F(v) - a(g,v),$$

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - F(v) \tag{2.64}$$

El resultado principal de esta Seción es el siguiente:

**Teorema 2.13** *Supongamos que los coeficientes $a_{ij}$, $b_i$ y $c$ verifican* (2.60) *y que las funciones $f_i$ y $g$ verifican* (2.61). *Supongamos además que la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$. Entonces existe una única solución débil de* (2.62).

**Demostración:** Introduzcamos el cambio de variable $u = w + g$. Entonces, con la notación introducida, todo se reduce a probar que existe una única $w \in H_0^1(\Omega)$ solución de

$$a(w,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega); \quad w \in H_0^1(\Omega). \tag{2.65}$$

Para probar la existencia y unicidad de solución débil de (2.65), basta aplicar directamente el teorema 2.2. En efecto, es inmediato que la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ está bien definida y es continua y coerciva en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, mientras que la forma lineal $\ell$ pertenece a $H^{-1}(\Omega)$. □

Un caso particular importante se da cuando los coeficientes $b_i$ se anulan. Entonces tenemos:

**Corolario 2.5** *Sea $\Omega$ acotado. Supongamos que los $a_{ij}$ verifican*

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1,\dots,N), \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad c.p.d. \text{ en } \Omega, \quad \alpha_0 > 0, \end{cases} \tag{2.66}$$

*los $b_i = 0$, $c \geq 0$ y las $f_i$ y $g$ verifican* (2.61)*. Entonces existe una única solución débil $u$ del problema* (2.62)*. Además, $u$ es la única solución del problema de mínimos*

$$\begin{cases} J(u) \leq J(z) \quad \forall z \in g + H_0^1(\Omega), \\ u \in g + H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.67}$$

**Demostración:** Veamos que, bajo las condiciones impuestas, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$.

En efecto, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene en virtud de (2.66) que

$$a(v,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}\, \partial_j v\, \partial_i v\, dx + \int_\Omega c\, |v|^2\, dx \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^2}^2.$$

Dado que $\Omega$ es acotado, tenemos entonces

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

para algún $\alpha > 0$; es decir, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva.

De nuevo, gracias al teorema 2.2, existe una única solución $w$ de (2.65) y tenemos que $u = w + g$ es la única solución débil de (2.62).

Por otra parte, teniendo en cuenta que $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica y aplicando de nuevo el teorema 2.2, deducimos que $w$ es, además, el único punto de $H_0^1(\Omega)$ donde la función

$$\frac{1}{2}\, a(v,v) - \ell(v)$$

alcanza el mínimo:

$$\frac{1}{2}\, a(w,w) - \ell(w) \leq \frac{1}{2}\, a(v,v) - \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pero, teniendo en cuenta la definición de $J$, vemos que esto es equivalente a decir que

$$J(u) \leq J(z) \quad \forall z \in g + H_0^1(\Omega).$$

Esto termina la demostración. □

Cuando se cumple la hipótesis (2.66), se dice que estamos frente a una *EDP elíptica de segundo orden* (con independencia de cómo sean los coeficientes $b_i$ y $c$).

**Observación 2.16** Es obvio que el teorema 2.13 y el corolario 2.5 dan cobertura a muchos otros casos. Por ejemplo, sean $\Omega_1$ y $\Omega_2$ dos abiertos contenidos en $\Omega$ tales que

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$$

y sea $a(x) = \alpha$ para $x$ c.p.d. en $\Omega_1$ y $a(x) = \beta$ para $x$ c.p.d. en $\Omega_2$, con $0 < \alpha < \beta$. Entonces, para cada $f \in L^2(\Omega)$ y cada $g \in H^1(\Omega)$, existe una única solución débil del problema

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

□

**Observación 2.17** En el enunciado del corolario 2.5, se puede sustituir la hipótesis "$\Omega$ es acotado" por esta otra:

$$c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq \alpha_1 > 0 \ \text{ c.p.d. en } \ \Omega.$$

□

**Observación 2.18** Se pueden probar variantes del teorema 2.13 en el espacio $H^1(\Omega)$ o en algún otro subespacio cerrado de éste. Por ejemplo, si la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H^1(\Omega)$, los coeficientes $a_{ij}$, $b_i$ y $c$ verifican (2.60), $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega)$ y ponemos

$$H(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} h v \, d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

existe una única $u$ que verifica

$$\begin{cases} a(u,v) = H(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \\ u \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.68}$$

Se interpreta entonces que $v$ es solución débil del *problema de Neumann*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f_0 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,, & x \in \Omega, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = h(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.69}$$

donde las $n_i$ son las componentes del vector normal exterior sobre $\partial\Omega$. En los ejercicios que se presentan al final del Capítulo, pueden encontrarse más variantes. □

## 2.8. Apéndice: Abiertos de frontera regular y propiedades

En este Apéndice, aclararemos qué es un abierto de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular y qué consecuencias puede tener este hecho.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo y acotado no vacío y $k \geq 0$ un entero.

**Definición 2.14** *Se dice que $\Omega$ es de clase $C^k$ (o bien que $\partial\Omega \in C^k$) si existen*

- *Dos números reales positivos $\alpha$ y $\beta$ y*
- *Para cada $r = 1, \dots, m$, un vector $b^r \in \mathbb{R}^N$, una matriz ortogonal $M^r$ de orden $N$ con* $\det M^r = 1$ *y una función $a_r$*

*con la propiedad siguiente:*

*Si ponemos*

$$\Delta_r := \{\, z^r \in \mathbb{R}^{N-1} : |z_i^r| < \alpha \ \ \forall i = 1, \dots, N-1 \,\}$$

*y* $A_r(x) := M^r x + b^r$*, entonces* $a_r \in C^k(\overline{\Delta}_r)$ *para cada* $r = 1, \dots, m$*, los conjuntos*

$$\Lambda_r := A_r^{-1}(\{\, (z^r, x_N^r) \in \mathbb{R}^N : z^r \in \Delta_r, \quad x_N^r = a_r(z^r)\,\}),$$

*verifican* $\cup_{r=1}^m \Lambda_r = \partial\Omega$ *y los conjuntos*

$$U_r^+ := A_r^{-1}(\{\, (z^r, x_N^r) \in \mathbb{R}^N : z^r \in \Delta_r, \quad a_r(z^r) < x_N^r < a_r(z^r) + \beta\,\})$$

*y*

$$U_r^- := A_r^{-1}(\{\, (z^r, x_N^r) \in \mathbb{R}^N : z^r \in \Delta_r, \quad a_r(z^r) - \beta < x_N^r < a_r(z^r)\,\})$$

*verifican respectivamente* $U_r^+ \subset \Omega$ *y* $U_r^- \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$*.*

Esta definición está tomada de [16] y de [18]. Cuando se cumple, se suele decir también que $\partial\Omega$ es una *variedad diferenciable de clase* $C^k$ y que $\Omega$ está situado *localmente a un lado de su frontera*.

Si $\Omega$ es de clase $C^k$ para todo $k \geq 0$, se dice que es de clase $C^\infty$. Por ejemplo, toda bola abierta de $\mathbb{R}^N$ es un abierto de clase $C^\infty$.

Podemos también hablar de abiertos de clase $C^{k,a}$ para cada entero $k \geq 0$ y cada número real $a \in (0, 1]$:

**Definición 2.15** *Sean* $k \geq 0$ *un entero y* $a$ *un número real, con* $0 < a \leq 1$*. Se dice que* $\Omega$ *es de clase* $C^{k,a}$ *si cumple la definición 2.14 con funciones* $a_r \in C^{k,a}(\overline{\Delta}_r)$*.*

Recuérdese que esto significa que las $a_r \in C^k(\overline{\Delta}_r)$ y que, además, sus derivadas de orden $k$ son Hölder-continuas en $\overline{\Delta}_r$ con exponente $a$. En otras palabras, existe una constante $C > 0$ tal que, si $D^k a_r$ es una cualquiera de estas derivadas, entonces

$$|D^k a_r(z^r) - D^k a_r(w^r)| \leq C|z^r - w^r|^a \quad \forall z^r, w^r \in \overline{\Delta}_r.$$

Obviamente, si $\Omega$ es de clase $C^{k,a}$, también es de clase $C^{j,b}$ para cada $j$ y cada $b$ que verifiquen $j + b \leq k + a$.

Cuando $\Omega$ es un abierto (como mínimo) de clase $C^{0,1}$, se puede hablar del vector normal unitario "en casi todo punto" de $\partial\Omega$:

**Definición 2.16** *Sea* $\Omega$ *un abierto de clase* $C^{0,1}$ *y sea* $x \in \partial\Omega$*. Con la notación utilizada en la definición 2.14, supongamos que* $x \in \Lambda_r$ *y* $x = A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))$*, donde* $y^r \in \Delta_r$ *es un punto de diferenciabilidad de* $a_r$*. Sea* $q(x)$ *el vector cuyas* $N-1$ *primeras componentes son las derivadas* $\partial_i a_r(y^r)$ *(*$1 \leq i \leq N-1$*) y cuya* $N$*-ésima componente vale* $-1$*. Entonces se llama vector normal unitario exterior a* $\Omega$ *en el punto* $x$ *al vector*

$$n(x) = \frac{1}{|q(x)|}(M^r)^{-1} q(x). \tag{2.70}$$

Recordemos que, si $a_r$ es como en la definición precedente, existen las derivadas parciales primeras de $a_r$ respecto de todas las variables $y_1^r, \dots, y_{N-1}^r$ c.p.d. en $\Delta_r$, esto es, en todo punto de $\Delta_r$ salvo a lo sumo en un conjunto de medida de Lebegue $(N-1)$-dimensional nula. Además, en esta situación, las funciones

$\partial_i a_r$, definidas en casi todo $\Delta_r$ y con valores en $\mathbb{R}$, son medibles y acotadas. Para una demostración de estas afirmaciones, véase por ejemplo [17] y [18].

Se puede comprobar que la definición precedente de $n(x)$ es correcta e independiente de los sistemas de referencia utilizados en las definiciones 2.14 y 2.15 para describir $\partial\Omega$. También se puede probar que (2.70) corresponde a la noción geométrica habitual de vector normal unitario en $x$ dirigido hacia el exterior de $\Omega$.

Sea $\Omega$ un abierto de clase $C^{0,1}$. Con la notación de la definición 2.14, sea para cada $r = 1, \ldots, m$

$$\psi_r(y^r) := \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} (\partial_i a_r(y^r))^2\right)^{1/2} \quad \text{c.p.d. en } \Delta_r. \tag{2.71}$$

Dada una función $g \in C^0(\partial\Omega)$, por coherencia con las definiciones usuales, es natural definir la integral de $g$ sobre $\Lambda_r$ como sigue:

$$\int_{\Lambda_r} g(x)\, d\Gamma(x) = \int_{\Delta_r} g(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r)))\, \psi_r(y^r)\, dy^r.$$

No obstante, no es posible extender directamente esta fórmula de manera que proporcione la integral de $g$ en toda la frontera $\partial\Omega$, dado que los $\Lambda_r$ no pueden ser disjuntos dos a dos.

Para superar esta dificultad, procederemos como sigue. Pongamos $U_r = U_r^+ \cup \Lambda_r \cup U_r^-$ para cada $r$. Entonces $\{U_r\}_{1\le r\le m}$ es un *recubrimiento abierto* de $\partial\Omega$.

Sea $\{\varphi_r\}_{1\le r\le m}$ una *partición de la unidad* en $\partial\Omega$ subordinada a este recubrimiento. Esto significa que las $\varphi_r$ verifican

$$\begin{cases} \varphi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \operatorname{sop}\varphi_r \subset U_r, \\ 0 \le \varphi_r \le 1 \ \text{ en } \ \mathbb{R}^N, \quad \sum_{r=1}^m \varphi_r = 1 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.72}$$

(la existencia de particiones de la unidad subordinadas a recubrimientos abiertos está demostrada por ejemplo en [1] y [6]).

**Definición 2.17** *Sean $\Omega$ un abierto de clase $C^{0,1}$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$. Con la notación precedente, diremos que la integral de $g$ sobre $\partial\Omega$ (respecto de la medida superficial $d\Gamma$) es la cantidad siguiente:*

$$\int_{\partial\Omega} g(x)\, d\Gamma(x) = \sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} g(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r)\varphi_r(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))\, \psi_r(y^r)\, dy^r.$$

Se puede demostrar que la definición precedente es correcta, independiente de la partición de la unidad elegida de modo que se tenga (2.72) y de los sistemas de referencia elegidos para describir $\partial\Omega$.

La noción de integral de superficie que precede corresponde en realidad a la integración respecto de una medida positiva $d\Gamma$, definida sobre una $\sigma$-álgebra adecuada $\Sigma$ de partes de $\partial\Omega$.

Más precisamente, supongamos de nuevo que $\Omega$ es de clase $C^{0,1}$ y supongamos fijados unos sistemas de referencia y una partición de la unidad como los anteriores. Diremos que el conjunto $W \subset \partial\Omega$ es *$d\Gamma$-medible* si todos los

$$W_r = \{\, y^r \in \Delta_r : (y^r, a_r(y^r)) \in A_r(W) \,\}$$

son medibles para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{N-1}$. Denotemos $\Sigma$ la familia de los conjuntos $W \subset \partial\Omega$ que son $d\Gamma$-medibles y pongamos

$$d\Gamma(W) = \sum_{r=1}^{m} \int_{W_r} \varphi_r(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))\, \psi_r(y^r)\, dy^r \quad \forall W \in \Sigma.$$

Entonces $\Sigma$ es un $\sigma$-álgebra de partes de $\partial\Omega$ y $d\Gamma$ es una medida positiva finita sobre $\Sigma$. De nuevo, las definiciones de $\Sigma$ y $d\Gamma$ son independientes de las elecciones de los sistemas de referencia y de la partición de la unidad.

Además, una función $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ es medible (resp. integrable) respecto de la medida $d\Gamma$ si y sólo si las funciones

$$y^r \mapsto g(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))\varphi_r(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))$$

son medibles (resp. integrables) respecto de la medida de Lebesgue. Cuando $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ es integrable, su integral respecto de $d\Gamma$ viene dada por la cantidad indicada en la definición 2.17.

Como consecuencia de lo todo que precede y repitiendo argumentos de la Sección 2.4, tiene sentido hablar de los espacios de Lebesgue $L^p(\partial\Omega, \Sigma, d\Gamma)$, que denotaremos más brevemente $L^p(\partial\Omega)$.

## 2.9. Ejercicios

**E 2.1** Sean $X$ e $Y$ dos espacios normados y sea $T : X \mapsto Y$ una aplicación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $T$ es acotada.
2. $T : X \mapsto Y$ es continua en 0.
3. $T : X \mapsto Y$ es continua en todo punto.

**E 2.2** Sean $X$ e $Y$ dos espacios de Banach.

1. Probar que, si $T : X \mapsto Y$ es una aplicación lineal, continua y sobreyectiva, $T$ es *abierta,* esto es, la imagen mediante $T$ de todo abierto de $X$ es un abierto de $Y$ (teorema de la aplicación abierta).
2. Deducir que, si $T : X \mapsto Y$ es una aplicación lineal, continua y biyectiva, su inversa $T^{-1} : Y \mapsto X$ es también lineal y continua (teorema de Banach de la aplicación inversa).
3. Deducir también que, si $T : X \mapsto Y$ es una aplicación lineal y para cada sucesión $\{x_n\}$ en $X$ con $x_n \to 0$ y $Ax_n \to y$ se tiene $y = 0$, entonces $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ (teorema del grafo cerrado).

*Indicación:* Daremos por válido el *teorema de Baire* y, más concretamente, que un espacio de Banach no puede escribirse como la unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío.

Pruébese en primer lugar que, si $T : X \mapsto Y$ es una aplicación lineal, continua y sobreyectiva, el conjunto $\overline{T(B)}$ (donde $B$ es la bola unidad de $X$), es un entorno de 0 en $Y$. A continuación, demuéstrese que $T(B)$ es también un entorno de 0 y que, en consecuencia, $T$ es abierta.

**E 2.3** Sean $X$ e $Y$ dos espacios normados y sea $\mathcal{L}(X;Y)$ el espacio normado de las aplicaciones lineales continuas $T : X \mapsto Y$. Probar que, si $Y$ es completo, entonces también lo es $\mathcal{L}(X;Y)$.

*Indicación:* Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X;Y)$. Probar que, para cada $x \in X$, $\{T_n x\}$ una sucesión de Cauchy en $Y$. Deducir que existe $T : X \mapsto Y$ tal que $T_n x \to Tx$ en $Y$ para todo $x \in X$ y probar a continuación que $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(X;Y)$.

**E 2.4** Sean $H$ un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal. Probar que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $a(\cdot\,,\cdot)$ es acotada.
2. $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $(0,0)$.
3. $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo punto.

**E 2.5** Sean $H$ un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal continua. Probar que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. Para cada $f \in H'$, existe un único $u$ que verifica
$$a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in H, \quad u \in H.$$
2. $a(\cdot\,,\cdot)$ verifica la propiedad siguiente, conocida como *condición inf-sup:*
$$\inf_{u \in H} \sup_{v \in H} \frac{a(u,v)}{\|u\|\,\|v\|} > 0.$$

Dar un ejemplo de forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ no coerciva que verifique la condición inf-sup precedente.

**E 2.6** Sea $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$ una función dada. Por definición, el *operador integral de Fredholm en $L^2(a,b)$ de núcleo $K$* es la aplicación $T_K$, dada por
$$(T_K\phi)(t) = \int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \quad \forall \phi \in L^2(a,b).$$
Probar que $T_K \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$ y que $(T_K)^* = T_{K^*}$, donde el núcleo $K^*$ está dado por
$$K^*(t,s) = K(s,t) \quad \text{c.p.d. en } (a,b).$$

**E 2.7** Sea $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$. Se denomina *operador integral de Volterra en $L^2(a,b)$ de núcleo $K$* a la aplicación $V_K$, dada por
$$(V_K\phi)(t) = \int_a^t K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \quad \forall \phi \in L^2(a,b).$$
Probar que $V_K \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$. ¿ Qué operador es $\cdot V_K^*$ ?

En los ejercicios que siguen, $I$ (resp. $\Omega$) denota un intervalo abierto (resp. un abierto conexo no vacío de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$).

**E 2.8** Sea $p \in [1, +\infty)$ y sea $p'$ el exponente conjugado de $p$. Probar la desigualdad de Hölder en los $\mathcal{L}^p(\Omega)$:

$$\int_\Omega |uv|\,dx \le \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \quad \forall u \in \mathcal{L}^p(\Omega),\ \forall v \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega).$$

**E 2.9** Sea $p \in [1, +\infty)$. Probar la desigualdad de Minkowski en $\mathcal{L}^p(\Omega)$:

$$\left(\int_\Omega |u+v|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |v|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \forall u, v \in \mathcal{L}^p(\Omega).$$

**E 2.10** Probar que el espacio de Banach $L^\infty(\Omega)$ no es separable.

*Indicación:* Sea $\{E_n : n \ge 1\}$ una familia numerable de abiertos no vacíos $E_n \subset \Omega$, disjuntos dos a dos. Sea $\mathcal{F}$ la famila de funciones de $L^\infty(\Omega)$ que toman el valor 0 ó 1 en cada $E_n$ y 0 en $\Omega \setminus \cup_n E_n$. Pruébese que $\mathcal{F}$ es no numerable y que la distancia en $L^\infty(\Omega)$ de dos funciones de $\mathcal{F}$ distintas es siempre 1.

**E 2.11** Sea $\Omega$ acotado, supongamos que $K \in L^\infty(\Omega\times\Omega)$ y pongamos $\hat{K} := \|K\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)}$. Utilizando el teorema de Lax-Milgram y suponiendo que $\hat{K}|\Omega| < 1$, probar que para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $u \in L^2(\Omega)$ de la ecuación integral

$$u(x) - \int_\Omega K(x,y)\,u(y)\,dy = f(x), \qquad x \in \Omega \ \text{ c.p.d.}$$

**E 2.12** Calcular las derivadas primeras y segundas en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de las funciones siguientes:

1. Función de Heaviside: $H(x) = 0$ si $x < 0$ y $H(x) = 1$ si $x > 0$.
2. Función valor absoluto.

**E 2.13** Sean $\Omega = (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $g$ la función definida en $\Omega$ por

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1x_2 & \text{si } x_1 > 0, \\ x_1 & \text{si } x_1 \le 0. \end{cases}$$

Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de $g$ en el sentido de las distribuciones en $\Omega$.

**E 2.14** Sea $Q$ el interior del cuadrado de vértices $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,1)$ y $(2,2)$ (un abierto de $\mathbb{R}^2$). Denotemos $T$ la función característica de $Q$, i.e. $T(x) = 1_Q(x) = 1$ si $x \in Q$ y $T(x) = 0$ en caso contrario. Se pide calcular las siguientes derivadas en el sentido de las distribuciones en $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 x_2}.$$

**E 2.15** Sea $B = B(0;1) \subset \mathbb{R}^N$ con $N \ge 3$ y sea $u(x) = |x|^{-\alpha}$, con $\alpha < N/2 - 1$. Probar que $u \in H^1(B)$ y que, por tanto, cuando $N \ge 3$, las funciones de $H^1(\Omega)$ no pertenecen necesariamente a $L^\infty(\Omega)$.

**E 2.16** Sea $\Omega = B(0;\rho) \subset \mathbb{R}^2$ con $\rho < 1$. Probar que la función $u(x) = (-\log|x|)^k$, definida para $x \in \Omega \setminus \{0\}$, pertenece a $H^1(\Omega)$ si $0 < k < 1$. En consecuencia, tampoco para $N = 2$ las funciones de $H^1(\Omega)$ pertenecen necesariamente a $L^\infty(\Omega)$.

**E 2.17** Sea $u \in L^2(\Omega)$. Demostrar que $u \in H^1(\Omega)$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\left|\int_\Omega u\,\partial_i\varphi\,dx\right| \leq C\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ 1 \leq i \leq N.$$

**E 2.18** Probar que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N)$.

*Indicación:* Sea $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Construir en primer lugar una sucesión $\{v_n\}$ de funciones de $H^1(\mathbb{R}^N)$ tales que los $\operatorname{sop} v_n$ son compactos y $v_n \to v$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ cuando $n \to +\infty$. A continuación, con ayuda de una sucesión regularizante, fijado $n$, construir una sucesión $\{v_{nm}\}$ de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ que verifican $v_{nm} \to v_n$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ cuando $m \to +\infty$.

**E 2.19** Supongamos que $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

1. Probar que existe una aplicación lineal continua $E : H^1(\Omega) \mapsto H^1(\mathbb{R}^N)$ que permite "extender" las funciones de $H^1(\Omega)$, esto es, verifica

$$Ev = v \quad \text{en} \quad \Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2. Probar que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$.

**E 2.20** Probar el teorema 2.10 cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{0,1}$.

*Indicación:* Con ayuda de cartas locales, descomponer la construcción de $\gamma$ en un número finito de construcciones análogas a las que corresponden al caso en que $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

**E 2.21** Probar que, cuando $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ y $f \in R(\gamma)$ se tiene (2.44).

*Indicación:* Pruébese previamente que toda función $v \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$ verifica

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[(1+|\xi'|^2)|\hat{v}(\xi',x_N)|^2 + |\partial_N\hat{v}(\xi',x_N)|^2\right]\,d\xi'\,dx_N < +\infty,$$

donde $\hat{v} = \hat{v}(\xi',x_N)$ denota la transformada de Fourier de $v$ respecto de la variable $\xi'$.

**E 2.22** Para cada $\varepsilon > 0$, sea $v_\varepsilon$ la función definida por (2.45)–(2.48). Probar que $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ para todo $\varepsilon > 0$ y, además, $v_\varepsilon \to v$ en $H^1(\mathbb{R}^N_+)$.

*Indicación:* Pruébese previamente que las funciones $\psi_\varepsilon v$ verifican

$$\psi_\varepsilon v \to v \quad \text{en} \quad H^1(\mathbb{R}^N_+).$$

Para ello, el punto más delicado es demostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \left|\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_N}\right|^2 |v|^2\,dx \to 0.$$

**E 2.23** Probar que si $v \in H^1(\Omega)$ y existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $v = 0$ en $\Omega \setminus K$, entonces $v \in H_0^1(\Omega)$. Probar también que si $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y $v(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, entonces $v \in H_0^1(\Omega)$.

**E 2.24** Sean $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$ y sea $F : H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma lineal definida como sigue:

$$F(v) = \int_\Omega (f_0\, v + \sum_{i=1}^N f_i\, \partial_i v)\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.73}$$

Probar que $F \in (H^1(\Omega))'$ y que

$$\|F\|_{(H^1)'} \leq \left( \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

donde $\|\cdot\|_{(H^1)'}$ es la norma en $(H^1(\Omega))'$ inducida por la norma de $H^1(\Omega)$. Probar también que, recíprocamente, si $F \in (H^1(\Omega))'$, existen $N+1$ funciones $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$ tales que se tiene (2.73) y

$$\|F\|_{(H^1)'} = \left( \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

**E 2.25** Supongamos que $\Omega$ es acotado al menos en una dirección. Sea $f_i \in L^2(\Omega)$ para $i = 1, \ldots, N$ y sea $F : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma lineal definida como sigue:

$$F(v) = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^N f_i\, \partial_i v \right) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.74}$$

Probar que $F \in H^{-1}(\Omega)$ y que

$$\|F\|_* \leq \left( \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

donde $\|\cdot\|_*$ es la norma en $H^{-1}(\Omega)$ inducida por la norma de $H_0^1(\Omega)$. Probar también que, recíprocamente, si $F \in H^{-1}(\Omega)$, existen $N$ funciones $f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$ tales que se tiene (2.74) y

$$\|F\|_* = \left( \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

**E 2.26** Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío y $f \in C^0(\overline{\Omega})$ una función dada. Supongamos que $u$ es solución débil de (2.57) y que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Probar que $u$ es solución clásica.

**E 2.27** Demostrar las afirmaciones siguientes:

1. Existe una función $\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ tal que

$$\int_I \varphi_0(x)\, dx = 1.$$

2. Para cada $f \in \mathcal{D}(I)$, existe $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ tal que

$$f(x) = \varphi'(x) + \left( \int_I f(y)\,dy \right) \varphi_0(x) \quad \forall x \in I,$$

siendo $\varphi_0$ la función que aparece en el apartdo precedente.

3. Si $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(I)$ es tal que

$$\int_I v(x)\,\varphi'(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) = C$ c.p.d. en $I$.

4. Si $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(I)$, $x_0 \in I$ y ponemos $G(x) := \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(y)\,dy$, entonces $G \in C^0(I)$ y

$$\int_I G(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_I g(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

*Indicación:* Pruébese el resultado en primer lugar cuando $g \in C^0(I)$ y razónese a continuación por densidad.

5. Se supone a partir de ahora que $I$ es acotado. Si $u \in H^1(I)$, entonces existe un único representante $\tilde{u}$ de $u$ que verifica $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ y

$$\tilde{u}(t_2) - \tilde{u}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u'(s) ds \quad \forall t_1,\, t_2 \in \overline{I}. \tag{1}$$

En consecuencia, identificando cada elemento de $H^1(I)$ con su representante continuo, podemos escribir que $H^1(I) \subset C^0(\overline{I})$.

*Indicación:* Sean $\bar{u}$ un representante de $u$, $\bar{v}$ un representante de $u'$ y pongamos

$$u_0(x) := \int_{x_0}^{x} \bar{v}(s)\,ds.$$

Entonces $u_0 \in C^0(\overline{I})$ y $u_0 - \bar{u}$ es c.p.d. igual a una constante $C$. uego basta tomar $\tilde{u} = \bar{u} = u_0 - C$.

6. Existe una constante $C_I$ tal que

$$|\tilde{u}(t)| \le C_I \|u\|_{H^1(I)} \quad \forall t \in \overline{I}.$$

Por tanto, $u \mapsto \tilde{u}$ es una aplicación lineal continua e inyectiva de $H^1(I)$ en $C^0(\overline{I})$.

*Indicación:* Úsese (1) con $t_2 = t \in \overline{I}$ fijo y $t_1$ en un intervalo contenido en $I$ e intégrese respecto de $t_1$.

7. De hecho, la inyección precedente es *compacta,* es decir: la imagen mediante ella de todo acotado de $H^1(I)$ es relativamente compacto en $C^0(\overline{I})$.

*Indicación:* Úsese el teorema de Ascoli-Arzelà.

8. Se tiene la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_I u'(x)\,v(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_I u(x)\,v'(x)\,dx \quad \forall u,\, v \in H^1(I).$$

**E 2.28** Compruébese que $C^0(\overline{I}) \not\subset H^1(I)$, esto es, que existen funciones continuas que no poseen derivada generalizada en $L^2(I)$.

En los siguientes ejercicios se suponen conocidos los resultados del ejercicio 2.27. También se supone conocido el resultado siguiente, que es consecuencia inmediata del apartado 5:

*Si $u,\, v \in C^0(\overline{I})$ y*

$$\int_I v\,\varphi\,dx = -\int_I u\,\varphi'\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

*entonces $u \in C^1(\overline{I})$ y su derivada clásica coincide con $v$ en $\overline{I}$.*

Usaremos que, cuando $I$ es acotado, $C^1(\overline{I})$ es denso en $H^1(I)$ y, más generalmente, que $C^1(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

**E 2.29** Sean $I = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ y $f : H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$, con $f(v) = v(0)$ para todo $v \in H^1(I)$.

1. Demostrar que $f \in (H^1(I))'$.
2. Probar que existe una única función $u$ que verifica

$$(u, v)_{H^1(I)} = f(v) \quad \forall v \in H^1(I), \quad u \in H^1(I).$$

   Determinar $u$.

3. Probar que $f \in H^{-1}(I)$ y hallar $w$ tal que

$$(w, v)_{H_0^1(I)} = f(v) \quad \forall v \in H_0^1(I), \quad w \in H_0^1(I).$$

**E 2.30** Sea $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Sea $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$a(u, v) := \int_0^1 (u'v' + 2xu'v + 3uv)\,dx$$

1. Demostrar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es continua y coerciva en $H^1(I)$.
2. Probar que existe una única función $u$ que verifica

$$a(u, v) = v(0) + v(1) \quad \forall v \in H^1(I), \quad u \in H^1(I).$$

3. Concluir de manera razonada que $u \in C^\infty([0, 1])$ y es solución clásica de un problema de contorno que se determinará.

**E 2.31** Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Sea $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) := \int_I (u'v' + uv)\, dx + ku(0)v(0),$$

con $k > -1$ fijado. Se considera el siguiente subespacio cerrado de $H^1(I)$: $V := \{\, v \in H^1(I) : \, v(1) = 0 \,\}$.

1. Demostrar que la forma $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $V$.
2. Dada $f \in L^2(I)$, probar que existe una y sólo una $u_f$ tal que

   $$a(u_f, v) = \int_I f\, v\, dx \quad \forall v \in V, \quad u_f \in V.$$

   Caracterizar $u_f$ como solución de un problema de mínimos.
3. ¿ Qué se puede decir de $u_f$ si $f \in C^0(\bar{I})$ ? Caracterizar en este caso $u_f$ como solución clásica de un problema de contorno.

**E 2.32** Se define $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(0,1) \times H^1(0,1) \mapsto \mathbb{R}$ como

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\, dx - \left( \int_0^1 u\, dx \right) \left( \int_0^1 v\, dx \right)$$

para $u, v \in H^1(0,1)$. Por otra parte, para una constante $k \neq 1$ fija, ponemos $V = \{\, v \in H^1(0,1) : \, v(0) = kv(1) \,\}$.

1. Demostrar que existe una constante $C_0 > 0$ tal que

   $$\|v\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_0 \|v'\|_{L^2(0,1)} \; \forall v \in V$$

   y que existe otra constante $C_1 > 0$ tal que

   $$\|v\|_{H^1(0,1)} \leq C_1 \|v'\|_{L^2(0,1)} \; \forall v \in V.$$

2. Probar que, cualquiera que sea $f \in L^2(0,1)$, existe una única $u_f$ con la propiedad de que

   $$a(u_f, v) = \int_I f\, v\, dx \quad \forall v \in V, \quad u_f \in V.$$

3. Probar que, si $f \in C^0([0,1])$, entonces $u_f \in C^2([0,1])$. Caracterizar el problema de contorno que satisface $u_f$, así como el problema de mínimos asociado.

**E 2.33** Sean $I = (1,3) \subset \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$ la forma bilineal continua definida por

$$a(u,v) = \int_1^3 \left[ t^2 u'(t)v'(t) + tu'(t)v(t) + 4u(t)v(t) \right] dt \quad \forall u, v \in H^1(I).$$

Se pide:

1. Demostrar que la forma $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva sobre $H^1(I)$.
2. Demostrar que existe una única solución del problema
$$a(u,v) = \frac{9}{2}v(3) - \frac{1}{6}v(1) + \int_1^3 v(t)\,dt \quad \forall v \in H^1(I), \quad u \in H^1(I). \tag{2.75}$$
3. Demostrar que la solución $u$ de (2.75) pertenece a $C^\infty(\overline{I})$ y es solución clásica de un problema de contorno que se determinará.

**E 2.34** Sea $V = \{\, v \in H^1(0,1) : v(0) = 0 \,\}$ y consideremos la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ sobre $V$ definida por
$$a(u,v) = \int_0^1 u'(t)v'(t)dt - \frac{1}{2}u(1)v(1) \quad \forall u,v \in H^1(0,1).$$
Se pide:

1. Probar que para toda $v \in V$ se tiene que $\|v\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|v'\|^2_{L^2(0,1)}$
2. Sea $f \in L^2(0,1)$. Demostrar que existe una y sólo una solución del problema
$$\text{(PV)} \qquad \text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u,v) = \int_0^1 f(t)\,v'(t)\,dt \quad \forall v \in V$$
y que, para dicha solución, se tiene $\|u\|_{C^0([0,1])} \leq 2\|f\|_{L^2(0,1)}$.
3. Caracterizar la solución $u$ del problema (PV) como solución de un problema de mínimos.
4. Probar que, si $f \in C^1([0,1])$, entonces la solución $u$ de (PV) pertenece a $C^2([0,1])$. Obtener el problema de contorno del que $u$ es solución.

**E 2.35** Sean $I = (1,2) \subset \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$, definida por
$$a(u,v) = \int_1^2 (u'(t)v'(t) + tu'(t)v(t) + 2u(t)v(t))\,dt \quad \forall u,v \in H^1(I).$$

1. Demostrar que la forma $a(\cdot\,,\cdot)$ es continua y coerciva sobre $H^1(I)$.
2. Demostrar que existe una y sólo una solución del problema
$$a(u,v) = v(1) + \int_1^2 v(t)\,dt \quad \forall v \in H^1(I) \quad u \in H^1(I). \tag{2.76}$$
3. Demostrar que la solución $u$ de (2.76) pertenece a $C^2(\overline{I})$ y determinar el problema de contorno del que $u$ es solución clásica.

**E 2.36** Sea $i \in \{1,...,N\}$. Se pide:

1. Probar que si $a \in C^1(\Omega)$ entonces
$$\int_\Omega a(x)\,\varphi(x)\,\partial_i\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_i a(x)\,\varphi^2(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega).$$

2. Probar que si $a \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $\partial_i a \in L^\infty(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega a(x)\, u(x)\, \partial_i u(x)\, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \partial_i a(x)\, u^2(x)\, dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

**E 2.37** Sea $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0,1)$.

1. Demostrar que toda $u \in H_0^1(\Omega)$ verifica $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_3 u\|_{L^2(\Omega)}$.
2. Demostrar que la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por
$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega x_3\, v\, \partial_3 u\, dx$$
es continua y coerciva en $H_0^1(\Omega)$.
3. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dada. Demostrar de manera razonada que existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega x_3\, v\, \partial_3 u\, dx = \int_\Omega x_3\, f(x_1,x_2)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$
4. Acotar la norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ en función de $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.
5. Caracterizar $u$ como solución de un problema de contorno.

**E 2.38** Para $\Omega = (-1,1) \times \mathbb{R}^2$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se considera la forma bilineal continua $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) := 9 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega \sqrt{2(x_1+3)}\, u\, \partial_1 v\, dx - \beta \int_\Omega u\, v\, dx$$

1. Demostrar que $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 4\|\partial_1 u\|^2_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.
2. Demostrar que si $\beta < 2$ la forma bilineal es coerciva en $H_0^1(\Omega)$ y, para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que
$$a(u,v) = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$
3. Caracterizar $u$ como solución de un problema de contorno.

**E 2.39** Sean $\Omega = (-1,1)^N \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega (x \cdot \nabla u) v\, dx + \gamma \int_\Omega uv\, dx.$$

1. Usando la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$, probar que, para $\gamma > N/4$, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$.
2. Probar que la función $g : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \sum_{i=1}^N |x_i|$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$, pertenece a $H^1(\Omega)$.

3. Probar que, para cada $\gamma > N/4$, existe una única $u$ que verifica

$$a(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in g + H_0^1(\Omega).$$

Hallar una estimación de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ en función de $\|g\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$.

4. Caracterizar $u$ como solución de un problema de contorno.

**E 2.40** Sean $\Omega = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega |x|(x \cdot \nabla v)u \, dx + \gamma \int_\Omega uv \, dx.$$

1. Probar que, para $\gamma > (N + 1)/2$, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$.

2. Probar que la función $g : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, dada por $g(x) \equiv |x|$, pertenece a $H^1(\Omega)$.

3. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Probar que para cada $\gamma > (N + 1)/2$ existe una única $u$ que verifica

$$a(u, v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in g + H_0^1(\Omega).$$

Con $f(x) \equiv |x|$, hallar una estimación de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

4. Caracterizar $u$ como solución de un problema de contorno.

**E 2.41** Sean $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$, $K > 3$, $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma bilineal continua definida por

$$a(u, v) := \int_\Omega (K^2 \partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v + x_1 v \partial_1 u - uv) \, dx.$$

y $g$ la función definida en $\Omega$ por $g(x_1, x_2) = x_2 \sin x_1$ si $x_1 > 0$, $g(x_1, x_2) = x_1$ si $x_1 \leq 0$.

1. Demostrar que $g \in H^1(\Omega)$.

2. Demostrar que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}$ para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ y deducir que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$.

3. Demostrar de manera razonada que existe una y sólo una función $u$ que verifica

$$a(u, v) = \int_\Omega x_1 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in g + H_0^1(\Omega).$$

# Capítulo 3

# Teoría espectral de operadores compactos y aplicaciones a las EDPs

En este Capítulo presentaremos una introducción a la *teoría espectral* de operadores. En particular, analizaremos la estructura del *espectro* de un operador lineal *compacto* y *autoadjunto*. Este análisis permitirá llegar a importantes consecuencias en el marco de las EDPs lineales de segundo orden. Por ejemplo, conducirá a resultados de existencia y unicidad de solución para problemas de valores iniciales y de contorno para la EDP del calor.

## 3.1. Operadores lineales compactos. Propiedades

### 3.1.1. Definiciones y propiedades

En esta Sección, $X$ e $Y$ son espacios de Banach cuyas normas se denotan respectivamente $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$.

En el espacio de Banach $\mathcal{L}(X;Y)$ hay algunos operadores particulares que merecen nuestra atención: los operadores lineales compactos.

**Definición 3.1** *Sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Se dice que $T$ es compacto si la imagen $T(B)$ de todo conjunto acotado $B \subset X$ es relativamente compacta en $Y$.*

Recordemos que un conjunto $K \subset X$ es relativamente compacto si su adherencia $\overline{K}$ es un compacto, es decir, si y sólo si de todo recubrimiento abierto de $\overline{K}$ puede extraerse un sub-recubrimiento finito. Recordemos también que, si $K \subset X$ es relativamente compacto, todo subconjunto de $K$ de nuevo lo es.

Dado que todo espacio de Banach es en particular un espacio métrico completo, $K$ es relativamente compacto si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de $K$ formado por bolas de radio $\varepsilon$; véase por ejemplo [17] y el ejercicio 3.1.

Esto es también equivalente a la siguiente propiedad, de carácter secuencial: de toda sucesión $\{v_n\}$ con los $v_n \in K$ puede extraerse una subsucesión convergente (por supuesto, el límite de esta subsucesión pertenecerá necesariamente a $\overline{K}$, pero puede no estar en $K$); véase el ejercicio 3.2.

Es útil tener presente que, en todo espacio de Banach, la suma algebraica de conjuntos relativamente compactos es relativamente compacta y que el producto por un escalar de un conjunto relativamente compacto también lo es.

**Observación 3.1** Sabemos que la bola unidad cerrada $B_X$ es compacta si y sólo si $X$ posee dimensión finita; para una demostración de esta afirmación, véase por ejemplo [4]; véase también el ejercicio 3.3. Por tanto, si $X$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, la identidad $\mathrm{Id} : X \mapsto X$ es un operador lineal continuo no compacto. Por el contrario, si $Y$ es de dimensión finita, todo operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es compacto. □

**Proposición 3.1** *Sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Son equivalentes:*

1. *$T$ es compacto.*

2. *De toda sucesión $\{x_n\}$ que sea acotada se puede extraer una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}$ es convergente (en $Y$).*

3. *$T(B_X)$ es relativamente compacto en $Y$.*

**Demostración:** Evidentemente, la primera afirmación implica la segunda.

Por otra parte, si suponemos que la segunda afirmación es cierta, es también evidente que de toda sucesión $\{Tx_n\}$ con los $x_n \in B_X$ se puede extraer una subsucesión convergente. Luego $T(B_X)$ es relativamente compacto. Esto muestra que la segunda afirmación implica la tercera.

Finalmente, supongamos que $T(B_X)$ es relativamente compacto en $Y$ y sea $B \subset X$ un acotado. Entonces existe $r > 0$ tal que $B \subset rB_X$, de donde $T(B) \subset rT(B_X)$. Pero, por hipótesis, $rT(B_X)$ es relativamente compacto; por tanto, también lo es $T(B)$. Así, la tercera afirmación implica la primera. □

**Proposición 3.2** *Sean $X$, $Y$ y $Z$ tres espacios de Banach y sean $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y;Z)$. Si alguno de los operadores $T$ ó $S$ es compacto, entonces lo es el operador $S \circ T$.*

La demostración es inmediata. En particular, si $X$ es de dimensión infinita y $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es compacto, entonces $T$ no puede tener inverso en $\mathcal{L}(Y;X)$. Esa última propiedad “sugiere” que los operadores compactos deben tener un rango en cierto modo “pequeño”, lo cual es cierto, como veremos a continuación.

Por el momento, consideraremos un tipo especial de operadores compactos de gran utilidad práctica: los operadores *de rango finito*.

**Definición 3.2** *Sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Se dice que $T$ es de rango finito si $R(T)$ posee dimensión finita.*

Como consecuencia de la proposición 3.1, todo operador de rango finito es compacto (en todo espacio de dimensión finita los acotados son relativamente compactos).

En lo que sigue, denotaremos $\mathcal{K}(X;Y)$ el conjunto de los operadores lineales compactos de $X$ en $Y$. Cuando tengamos $X = Y$, pondremos $\mathcal{K}(X)$ en vez de $\mathcal{K}(X;X)$.

**Teorema 3.1** *$\mathcal{K}(X;Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X;Y)$.*

**Demostración:** Es fácil probar que toda combinación lineal de operadores compactos es un nuevo operador compacto. Por tanto, $\mathcal{K}(X;Y)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(X;Y)$.

Veamos ahora que $\mathcal{K}(X;Y)$ es cerrado. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores de $\mathcal{K}(X;Y)$, sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y supongamos que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(X;Y)$. Debemos probar que $T$ es compacto.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $B_X$. Por el procedimiento diagonal habitual, es posible extraer de ella una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que todas las sucesiones $\{T_i(x_{n_k})\}$ convergen en $Y$. Veamos que $\{T(x_{n_k})\}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea entonces $\varepsilon > 0$. Existe $i \geq 1$ tal que

$$\|T_i - T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.1}$$

Por otra parte, como la sucesión $\{T_i(x_{n_k})\}$ es de Cauchy, existe $k_0 \geq 1$ tal que, si $k, j \geq k_0$, entonces

$$\|T_i(x_{n_k}) - T_i(x_{n_j})\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2) deducimos que, cuando $k, j \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \|T(x_{n_k}) - T(x_{n_j})\|_Y &\leq \|T(x_{n_k}) - T_i(x_{n_k})\|_Y \\ &\quad + \|T_i(x_{n_k}) - T_i(x_{n_j})\|_Y + \|T_i(x_{n_j}) - T(x_{n_j})\|_Y \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Así, hemos demostrado que para cada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \geq 1$ tal que, si $k, j \geq k_0$, necesariamente

$$\|T(x_{n_k}) - T(x_{n_j})\|_Y \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $\{T(x_{n_k})\}$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, termina la demostración. □

Una consecuencia inmediata de este teorema es el corolario siguiente:

**Corolario 3.1** *Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores de rango finito y sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces $T \in \mathcal{K}(X;Y)$.*

**Observación 3.2** Si $X$ e $Y$ son espacios de Hilbert, se puede demostrar el recíproco del corolario 3.1. En otras palabras, dado $T \in \mathcal{K}(X;Y)$, siempre existen sucesiones $\{T_n\}$ de operadores de rango finito tales que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \to 0$. La demostración no es excesivamente complicada; véase el ejercicio 3.7 para el caso en que $Y$ es separable. No obstante, este resultado no es cierto en general; para más detalles, véase [4]. □

Terminaremos esta Sección con el teorema siguiente:

**Teorema 3.2** *Sean $H$ y $G$ dos espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H;G)$. Entonces $T$ es compacto si y sólo si $T^*$ es compacto.*

**Demostración:** Basta demostrar que si $T$ es compacto también lo es $T^*$, dado que $(T^*)^* = T$.

Supongamos por tanto que $T$ es compacto y sea $\{y_n\}$ una sucesión acotada en $G$. Sea $M > 0$ tal que $\|y_n\|_H \leq M$ para cada $n \geq 1$. Tenemos que probar que existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ tal que $\{T^* y_{n_k}\}$ converge en $H$.

La sucesión $\{T^* y_n\}$ está acotada en $H$:

$$\|T^* y_n\|_H \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(G;H)}\, M \quad \forall n \geq 1.$$

Por tanto, existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ tal que $\{T(T^* y_{n_k})\}$ converge. Veamos que $\{T^* y_{n_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en $H$, con lo cual estará probado lo que queríamos. En efecto, para $k, \ell \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|T^* y_{n_k} - T^* y_{n_\ell}\|_H^2 &= (y_{n_k} - y_{n_\ell}, (T \circ T^*)(y_{n_k} - y_{n_\ell}))_H \\
&= (y_{n_k} - y_{n_\ell}, T(T^* y_{n_k}) - T(T^* y_{n_\ell}))_H \\
&\leq 2M \|T(T^* y_{n_k}) - T(T^* y_{n_\ell})\|_H
\end{aligned}$$

y este último miembro tiende a cero cuando $k, \ell \to \infty$. □

### 3.1.2. Primeros ejemplos: operadores integrales

Los ejemplos no triviales más naturales de operadores compactos son los operadores integrales.

Recuérdese que, para cada $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$, el *operador integral de Fredholm* en $L^2(a,b)$ de núcleo $K$ está dado como sigue:

$$T_K(\phi)(t) := \int_a^b K(t,s)\phi(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \quad \forall \phi \in L^2(a,b). \tag{3.4}$$

Por otra parte, si $K \in C^0([a,b] \times [a,b])$, llamaremos operador integral de Fredholm en $C^0([a,b])$ de núcleo $K$ a la aplicación definida por

$$(S_K \phi)(t) := \int_a^b K(t,s)\phi(s)\, ds \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall \phi \in C^0([a,b]). \tag{3.5}$$

Se tiene el resultado siguiente:

**Teorema 3.3** *Si $K \in L^2((a,b)\times(a,b))$, el operador lineal $T_K$ definido por* (3.4) *es compacto: $T_K \in \mathcal{K}(L^2(a,b))$.*

*Por otra parte, si $K \in C^0([a,b] \times [a,b])$, el operador lineal $S_K$ definido por* (3.5) *es compacto: $S_K \in \mathcal{K}(C^0([a,b]))$.*

**Demostración:** Supongamos en primer lugar que $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$. Sabemos que $T_K : L^2(a,b) \mapsto L^2(a,b)$ está bien definido, es lineal y continuo y verifica

$$\|T_K \phi\|_{L^2(a,b)} \leq \|K\|_{L^2((a,b)\times(a,b))} \|\phi\|_{L^2(a,b)} \quad \forall \phi \in L^2(a,b). \tag{3.6}$$

Veamos que $T_K$ es compacto. Para ello, probaremos que $T_K$ es el límite en el espacio de Hilbert $\mathcal{L}(L^2(a,b))$ de una sucesión de operadores compactos.

La sucesión puede ser construida del modo siguiente. Como $C^0(([a,b]\times[a,b])$ es denso en $L^2((a,b)\times(a,b))$, existe una sucesión $\{K_n\}$ de funciones de $C^0([a,b]\times[a,b])$ que verifican

$$\iint_{(a,b)\times(a,b)} |K_n(t,s)-K(t,s)|^2\,dt\,ds \to 0 \tag{3.7}$$

cuando $n\to\infty$. Para cada $n$, denotaremos $T_n$ el operador de Fredholm en $L^2(a,b)$ de núcleo integral $K_n$, esto es, la aplicación lineal definida por

$$(T_n\phi)(t) := \int_a^b K_n(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \quad \forall\phi\in L^2(a,b). \tag{3.8}$$

Entonces $T_n$ converge a $T_K$ en $\mathcal{L}(L^2(a,b))$. En efecto, $T_n-T_K$ es, para cada $n$, el operador integral de núcleo $K_n-K$; en virtud de (3.6) con $K$ sustituido por $K_n-K$ y (3.7), tenemos que $\|T_n-T_K\|_{\mathcal{L}(L^2(a,b))}\to 0$.

Veremos a continuación que los operadores de Fredholm $T_n$ son compactos. Para ello, probaremos que $T_n$ es el límite en $\mathcal{L}(L^2(a,b))$ de una sucesión de operadores de rango finito.

En efecto, el espacio de las funciones polinómicas es denso en $C^0(([a,b]\times[a,b])$. Así, existe una sucesión $\{H_m\}$ de funciones de la forma

$$H_m(t,s) := \sum_{i=0}^{d_m} a_i(t)\,s^i,$$

con las $a_i$ polinómicas, tales que $H_m\to K_n$ en $C^0(([a,b]\times[a,b])$ cuando $m\to\infty$. Obviamente, esto implica

$$\iint_{(a,b)\times(a,b)} |H_m(t,s)-K_n(t,s)|^2\,dt\,ds \to 0 \tag{3.9}$$

cuando $m\to\infty$. Sea $S_m$ el operador de Fredholm en $L^2(a,b)$ de núcleo $H_m$. Entonces $S_m$ es de rango finito y, gracias a (3.9), tenemos que $\|S_m-T_n\|_{\mathcal{L}(L^2(a,b))}\to 0$ cuando $m\to\infty$.

Por tanto, los $T_n$ son efectivamente compactos, de donde lo es $T_K$. Esto prueba la primera parte del teorema.

La demostración de la segunda parte es análoga (e incluso más sencilla) y se deja como ejercicio. □

## 3.2. El teorema de alternativa de Fredholm. Primeras aplicaciones

Sean $H$ y $G$ dos espacios de Hilbert cuyos productos escalares (resp. cuyas normas) se denotan por el momento, respectivamente, $(\cdot\,,\cdot)_H$ y $(\cdot\,,\cdot)_G$ (resp. $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_G$). Sea $T\in\mathcal{L}(H;G)$. Por definición, el *núcleo* de $T$ es el conjunto $N(T) := \{\, v\in H : Tv=0\,\}$. Por otra parte, el *rango* de $T$ es $R(T) := \{\, Tv : v\in H\,\}$. Obviamente, $N(T)$ es un subespacio cerrado de $H$ y $R(T)$ es un subespacio (no necesariamente cerrado) de $G$.

**Proposición 3.3** *Dado un operador $T \in \mathcal{L}(H;G)$, se tiene:*

1. $N(T) = R(T^*)^\perp$ *y* $N(T^*) = R(T)^\perp$.
2. $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$ *y* $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$.

**Demostración:** Observemos que $u \in N(T)$ si y sólo si $(Tu, v)_G = 0$ para cada $v \in G$ y que esto ocurre si y sólo si $(u, T^*v)_H = 0$ para cada $v \in G$, es decir, si y sólo si $u \in R(T^*)^\perp$. Esto prueba la primera parte del aptdo. 1.

Por otra parte, como $H$ es la suma directa ortogonal de $\overline{R(T^*)}$ y $R(T^*)^\perp$ y sabemos ya que $R(T^*)^\perp = N(T)$, deducimos que $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$. Esto prueba la primera igualdad del aptdo. 2.

Las restantes afirmaciones son ahora inmediatas, cambiando $T$ por su adjunto $T^*$. $\square$

El resultado central de esta Sección está relacionado con la existencia o no de soluciones de ecuaciones de la forma

$$v - Tv = f, \quad v \in H, \tag{3.10}$$

donde $T \in \mathcal{K}(H)$ y $f \in H$. Para su demostración, necesitaremos el resultado siguiente, cuya prueba es inmediata:

**Lema 3.1** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado no trivial. Entonces existen puntos $v \in H$ tales que*

$$\|v\|_H = 1, \quad \mathrm{dist}\,(v, M) := \inf_{m \in M} \|v - m\|_H = 1. \tag{3.11}$$

**Teorema 3.4** *Sean $H$ un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{K}(H)$ y denotemos* Id *el operador identidad en $H$. Se tiene entonces lo siguiente:*

1. $N(\mathrm{Id} - T)$ *es un espacio de dimensión finita.*
2. $R(\mathrm{Id} - T)$ *es un subespacio cerrado de $H$. Por tanto,*
$$R(\mathrm{Id} - T) = N(\mathrm{Id} - T^*)^\perp.$$
3. $N(\mathrm{Id} - T) = \{0\}$ *si y sólo si* $R(\mathrm{Id} - T) = H$.
4. *Las dimensiones de los espacios* $N(\mathrm{Id} - T)$ *y* $N(\mathrm{Id} - T^*)$ *coinciden.*

**Demostración:**

Veamos en primer lugar que $N(\mathrm{Id} - T)$ es un espacio de dimensión finita. Pongamos $M = N(\mathrm{Id} - T)$ y sea $B_M$ la bola unidad cerrada de $M$. Entonces es inmediato que $B_M \subset T(B_M) \subset T(B_H)$, de donde $B_M$ es compacta y la dimensión de $M$ es necesariamente finita.

Veamos ahora que $R(\mathrm{Id} - T)$ es cerrado. Sean entonces $\{v_n\}$ una sucesión de $H$ y supongamos que las $y_n = v_n - Tv_n$ convergen en $H$ hacia $y$. Comprobemos que $y \in R(\mathrm{Id} - T)$.

Si $y = 0$, esto es evidente. En caso contrario, podemos suponer que $y_n \neq 0$ (y por tanto $v \notin M$) para cada $n \geq 1$. Sea $P : H \mapsto M$ el operador de proyección ortogonal habitual. Entonces $TPv_n = Pv_n$ y podemos escribir que

$$y_n = v_n - Pv_n - T(v_n - Pv_n) \quad \forall n \geq 1. \tag{3.12}$$

La sucesión $\{v_n - Pv_n\}$ está acotada. En efecto, si no fuera así, al menos para una subsucesión $\{v_{n_k} - Pv_{n_k}\}$ tendríamos $\|v_{n_k} - Pv_{n_k}\|_H \to \infty$. Poniendo

$$z_{n_k} = \frac{v_{n_k} - Pv_{n_k}}{\|v_{n_k} - Pv_{n_k}\|_H},$$

encontraríamos que $z_{n_k} \in M^\perp$, $\|z_{n_k}\|_H = 1$ y

$$z_{n_k} - Pz_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\|v_{n_k} - Pv_{n_k}\|_H} \to 0. \tag{3.13}$$

Eventualmente extrayendo una nueva subsucesión, podríamos suponer que las $Tz_{n_k}$ convergen a $z$ en $H$. Luego también tendríamos que $z_{n_k} \to z$ y que $\|z\|_H = 1$. Pero entonces habríamos encontrado un punto $z \in M \cap M^\perp$ distinto de 0, lo que es absurdo.

Como $\{v_n - Pv_n\}$ está acotada, existen una subsucesión $\{v_{n_j} - Pv_{n_j}\}$ y un punto $w \in H$ tales que $T(v_{n_j} - Pv_{n_j}) \to w$. Pero entonces $v_{n_j} - Pv_{n_j} \to w + y$ y en consecuencia $T(v_{n_j} - Pv_{n_j}) \to Tw + Ty$. Pasando al límite en (3.12) con $n = n_j$, obtenemos que $y = (\mathrm{Id} - T)(y + w)$, esto es, $y \in R(\mathrm{Id} - T)$.

Dado que $R(\mathrm{Id} - T)$ es cerrado, tenemos que coincide con su adherencia y por tanto con $N(\mathrm{Id} - T^*)^\perp$.

Veamos a continuación que si $N(\mathrm{Id} - T) = \{0\}$ entonces $R(\mathrm{Id} - T) = H$. Supongamos lo contrario. Entonces $H_1 = R(\mathrm{Id} - T)$ es un subespacio cerrado propio de $H$ (y por tanto un nuevo espacio de Hilbert). Si denotamos $T_1$ la restricción de $T$ a $H_1$, es inmediato que $T_1 \in \mathcal{K}(H_1)$ y $H_2 = R(\mathrm{Id} - T_1)$ vuelve a ser un subespacio cerrado propio de $H_1$, etc.

De este modo, conseguiríamos una sucesión estrictamente decreciente de espacios de Hilbert $\{H_n\}$, todos ellos subespacios de $H$. De acuerdo con el lema 3.1, para cada $n \geq 1$ existe $e_n \in H_n$ tal que

$$\|e_n\|_H = 1, \quad \mathrm{dist}\,(e_n, H_{n+1}) = 1. \tag{3.14}$$

Para $n > m$, tenemos que

$$\begin{aligned} Te_n - Te_m &= -(e_n - Te_n) + (e_m - Te_m) + (e_n - e_m) \\ &= [-(e_n - Te_n) + (e_m - Te_m) + e_n] - e_m \end{aligned}$$

y, como $-(e_n - Te_n) + (e_m - Te_m) + e_n \in H_{m+1}$, obtenemos la desigualdad

$$\|Te_n - Te_m\|_H \geq 1\,.$$

Pero esto está en contradicción con que $T$ sea compacto. Por tanto, necesariamente $R(\mathrm{Id} - T) = H$.

Recíprocamente, supongamos que $R(\mathrm{Id} - T) = H$. Entonces $N(\mathrm{Id} - T^*) = R(\mathrm{Id} - T)^\perp = \{0\}$. Dado que $T^* \in \mathcal{K}(H)$, podemos aplicar el razonamiento precedente a $T^*$, lo que conduce a que $R(\mathrm{Id} - T^*) = H$. En consecuencia, $N(\mathrm{Id} - T) = R(\mathrm{Id} - T^*)^\perp = \{0\}$.

Esto prueba que, efectivamente, $N(\mathrm{Id} - T) = \{0\}$ si y sólo si $R(\mathrm{Id} - T) = H$.

La demostración de que los espacios $N(\mathrm{Id} - T)$ y $N(\mathrm{Id} - T^*)$ poseen la misma dimensión queda como ejercicio. □

**Observación 3.3** Se puede demostrar un resultado análogo al teorema 3.4 cuando $X$ es un espacio de Banach y $T \in \mathcal{K}(X)$; para más detalles, véase [4]. □

El teorema 3.4 se conoce con nombre de *teorema de alternativa de Fredholm.* Para justificar esta denominación, consideremos la ecuación (3.10), donde $T \in \mathcal{K}(H)$ y $f \in H$ es dada. En primer lugar, podemos afirmar que la *ecuación homogénea* asociada

$$v - Tv = 0, \quad v \in H, \tag{3.15}$$

posee a lo sumo un número finito de soluciones linealmente independientes.

En segundo lugar, tenemos que (3.10) posee solución para cada $f \in H$ si y sólo si (3.15) sólo posee la solución trivial.

Finalmente, si (3.15) posee soluciones no triviales, entonces, dada $f \in H$, la correspondiente ecuación (3.10) posee solución (en cualquier caso no única) si y sólo si $f$ es ortogonal a las soluciones de la *ecuación adjunta*

$$v - T^*v = 0, \quad v \in H. \tag{3.16}$$

En la práctica, esto significa que $f$ debe satisfacer un número de restricciones lineales que coincide con la dimensión del espacio de soluciones de (3.15).

**Observación 3.4** El teorema 3.4 es evidentemente cierto (y bien conocido) cuando $H$ posee dimensión finita. En particular, si $H$ es de dimensión finita, toda aplicación lineal de $H$ en sí mismo es inyectiva si y sólo si es sobreyectiva.

Por el contrario, el resultado no es cierto en general si la dimensión de $H$ es infinita y $T$ no es compacto. Así, por ejemplo, en el espacio de Hilbert $\ell^2$ de las sucesiones de cuadrado sumable,[1] la aplicación lineal

$$L\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{0, x_1, x_2, \dots\} \quad \forall \{x_n\} \in \ell^2 \tag{3.17}$$

es inyectiva pero no sobreyectiva. Por otra parte, la aplicación

$$S\{x_1, x_2, \dots\} = \{x_2, x_3, \dots\} \quad \forall \{x_n\} \in \ell^2$$

es sobreyectiva pero no inyectiva. □

## 3.3. El espectro de un operador lineal compacto

Con frecuencia, en las aplicaciones se encuentran ecuaciones similares a (3.10) en donde interviene también un parámetro (un número real), en principio desconocido. Se trata de ecuaciones que tienen la estructura

$$v - \lambda Tv = f, \quad (v, \lambda) \in H \times \mathbb{R}, \tag{3.18}$$

donde $T \in \mathcal{L}(H)$ y $f \in H$ son dadas. En esta Sección, veremos (entre otras cosas) qué se puede decir sobre la existencia de solución de (3.18) cuando $T$ es compacto.

[1] Tenemos $\ell^2 := \{\, \{x_n\} : x_n \in \mathbb{R} \;\; \forall n \geq 1, \;\; \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 < +\infty \,\}$, con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar y el producto escalar $(\{x_n\}, \{y_n\})_{\ell^2} := \sum_{n\geq 1} x_n y_n$.

### 3.3.1. Definiciones y resultados fundamentales

**Definición 3.3** *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Se llama resolvente de $T$ al conjunto de los $\mu \in \mathbb{R}$ tales que el operador $T - \mu \mathrm{Id} : H \mapsto H$ es biyectivo. Se llama espectro de $T$ al conjunto $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.*

Gracias al *teorema de Banach del operador inverso*, si $\mu \in \rho(T)$, existe $(T - \mu \mathrm{Id})^{-1}$ y es un operador lineal continuo de $H$ en sí mismo. Por otra parte, si $\mu \in \sigma(T)$, al menos una de las dos cosas siguientes ocurre: o bien $N(T - \mu \mathrm{Id}) \neq \{0\}$, o bien $R(T - \mu \mathrm{Id}) \neq H$.

**Definición 3.4** *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Se dice que $\mu$ es un valor propio de $T$ si $N(T - \mu \mathrm{Id}) \neq \{0\}$. En tal caso, se dice que $N(T - \mu \mathrm{Id})$ es el subespacio propio asociado a $\mu$ y a los elementos de $N(T - \mu \mathrm{Id})$ no nulos se les llama vectores propios o autovectores asociados.*

Dado $T \in \mathcal{L}(H)$, denotaremos $\mathrm{VP}(T)$ el conjunto de valores propios de $T$. Obviamente $\mathrm{VP}(T) \subset \sigma(T)$, pero esta inclusión puede ser estricta. Así, para la aplicación definida en (3.17), tenemos que $0 \in \sigma(T)$ pero $0 \notin \mathrm{VP}(T)$.

Si $\mu \in \sigma(T) \setminus \mathrm{VP}(T)$, necesariamente $R(T - \mu \mathrm{Id}) \neq H$. Esto puede ocurrir de dos maneras:

- $R(T - \mu \mathrm{Id})$ es denso en $H$, pero no es cerrado. En este caso se dice que $\mu$ pertenece al *espectro continuo* de $T$.
- $R(T - \mu \mathrm{Id})$ no es denso en $H$. Se dice entonces que $\mu$ pertenece al *espectro residual* de $T$.

Por tanto, $\sigma(T)$ se puede escribir como la unión disjunta

$$\sigma(T) = \mathrm{VP}(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T), \tag{3.19}$$

donde $\sigma_c(T)$ (resp. $\sigma_r(T)$) es el espectro continuo (resp. residual) de $T$.

Obsérvese que, si $\mu \in \sigma_c(T)$, entonces necesariamente

$$\inf_{v \in H, v \neq 0} \frac{\|(T - \mu \mathrm{Id})v\|_H}{\|v\|_H} = \inf_{\|v\|_H = 1} \|(T - \mu \mathrm{Id})v\|_H = 0; \tag{3.20}$$

véase el ejercicio 3.12. Por tanto, cuando $\mu \in \sigma_c(T)$, existen puntos $v_1, v_2, \dots$ en $H$ tales que

$$Tv_n - \mu v_n \to 0, \quad \|v_n\|_H = 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Por esta razón, los $\mu \in \sigma_c(T)$ se suelen denominar *valores propios generalizados.*

**Proposición 3.4** *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces $\sigma(T)$ es un compacto contenido en el intervalo $[-\|T\|_{\mathcal{L}(H)}, \|T\|_{\mathcal{L}(H)}]$. En consecuencia, $\rho(T)$ es un abierto no acotado de $\mathbb{R}$.*

**Demostración:** Veamos en primer lugar que si $|\mu| > \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ entonces $\mu \in \rho(T)$. Esto probará que $\sigma(T) \subset [-\|T\|_{\mathcal{L}(H)}, \|T\|_{\mathcal{L}(H)}]$.

En efecto, si $|\mu| > \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$, para cada $f \in H$ la ecuación

$$Tv - \mu v = f, \quad v \in H, \tag{3.21}$$

posee solución única. Esto es consecuencia de que (3.21) admite la formulación equivalente

$$v = \frac{1}{\mu}(Tv - f), \quad v \in H,$$

que es una ecuación de punto fijo a la que se puede aplicar el *teorema de Banach.*

Veamos ahora que $\rho(T)$ es un abierto. Con esto quedará demostrada la proposición. Sea entonces $\mu_0 \in \rho(T)$. Dada $f \in H$, la ecuación (3.21) equivale a

$$Tv - \mu_0 v = f + (\mu - \mu_0)v, \quad v \in H.$$

Pero ésta puede también escribirse en la forma

$$v = (T - \mu_0 \mathrm{Id})^{-1}(f + (\mu - \mu_0)v), \quad v \in H,$$

que es de nuevo una ecuación de punto fijo a la que puede aplicarse el *teorema de Banach* a condición de que $|\mu - \mu_0|$ sea suficientemente pequeño. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $\mu \in \mathbb{R}$ y $|\mu - \mu_0| \leq \varepsilon$, tenemos $\mu \in \rho(T)$.

Esto prueba, como queríamos, que $\rho(T)$ es un abierto. □

El resultado principal de esta Sección es el siguiente:

**Teorema 3.5** *Sean $H$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita y $T \in \mathcal{K}(H)$. Se tiene entonces lo siguiente:*

1. *$0 \in \sigma(T)$ (y por tanto $\sigma(T)$ es un compacto no vacío).*

2. *$\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{VP}(T) \setminus \{0\}$.*

3. *Los puntos de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ son aislados. Más precisamente, o bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es el vacío, o bien es un conjunto finito, o bien es numerable. En este último caso, los puntos de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ pueden ser ordenados como los términos de una sucesión cuyos valores absolutos decrecen estrictamente y convergen a 0.*

**Demostración:** En primer lugar, observemos que, si tuviéramos $0 \in \rho(T)$, el operador $T$ sería biyectivo, en contra de ser $T$ compacto y $H$ de dimensión infinita. Por tanto, $0 \in \sigma(T)$.

Veamos a continuación que si $\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ entonces $N(T - \mu\mathrm{Id}) \neq \{0\}$. Esto probará que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{VP}(T) \setminus \{0\}$.

Supongamos entonces que $\mu \in \sigma(T)$, $\mu \neq 0$ y $N(T - \mu\mathrm{Id}) = \{0\}$. Como $N(T - \mu\mathrm{Id}) = N(\mathrm{Id} - \frac{1}{\mu}T)$ y el operador $\frac{1}{\mu}T$ es compacto, por el teorema 3.4 tenemos que

$$H = R(\mathrm{Id} - \frac{1}{\mu}T) = R(T - \mu\mathrm{Id}).$$

Luego $T - \mu\mathrm{Id}$ es biyectivo, en contra de que sea $\mu \in \sigma(T)$.

Para demostrar el aptdo. 3, supongamos dada una sucesión $\{\mu_n\}$ de puntos de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ todos distintos que converge a $\mu$ y veamos que $\mu = 0$. Para cada $n \geq 1$, tenemos $\mu_n \in \mathrm{VP}(T)$, de donde podemos elegir $e_n \in N(T - \mu_n\mathrm{Id})$ con $e_n \neq 0$.

Los $e_n$ son linealmente independientes. En efecto, si tuviéramos $e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ para algún $n \geq 1$ y algunos $\alpha_i \in \mathbb{R}$, también tendríamos que

$$Te_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i T e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i e_i$$

y

$$\mu_{n+1} e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_{n+1} e_i,$$

de donde necesariamente $\alpha_i(\mu_i - \mu_{n+1}) = 0$ para cada $i$, lo que es imposible.

Para cada $n \geq 1$, pongamos $X_n := [e_1, \dots, e_n]$ (el espacio generado por los $e_i$ con $i = 1, \dots, n$). Pongamos también $X_0 := \{0\}$. Entonces $\{X_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de subespacios de $H$ de dimensión finita (y por tanto cerrados) que verifican

$$(T - \mu_n)X_n \subset X_{n-1} \quad \forall n \geq 1. \tag{3.22}$$

En virtud del lema 3.1, existe una sucesión $\{v_n\}$ de puntos de $H$ que verifican lo siguiente:

$$v_n \in X_n, \quad \|v_n\|_H = 1 \ \text{ y } \ \mathrm{dist}\,(v_n, X_{n-1}) = 1 \ \text{ para cada } \ n \geq 1.$$

Veamos que

$$\|\frac{1}{\mu_m} T v_m - \frac{1}{\mu_j} T v_j\|_H \geq 1 \quad \forall m, j \geq 1, \quad m \neq j. \tag{3.23}$$

En efecto, podemos suponer por ejemplo que $j < m$. Entonces $X_{j-1} \subset X_j \subset X_{m-1}$. Como

$$\|\frac{1}{\mu_m} T v_m - \frac{1}{\mu_j} T v_j\|_H = \|v_m + \frac{1}{\mu_m}(T v_m - \mu_m v_m) - \frac{1}{\mu_j}(T v_j - \mu_j v_j) - v_j\|_H$$

y se cumple (3.22), esta cantidad es necesariamente $\geq \mathrm{dist}\,(v_m, X_{m-1})$, de donde obtenemos (3.23).

Dado que $T \in \mathcal{K}(H)$, es evidente que $\{Tv_n\}$ posee subsucesiones convergentes. Sin embargo, esto sólo puede ocurrir si $\mu = 0$. En efecto, si fuera $\mu \neq 0$, también podríamos extraer subsucesiones convergentes de $\{\mu_n^{-1} T v_n\}$, lo cual contradice (3.23).

Finalmente, comprobemos que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es como se dice en el aptdo. 3.

Para cada $n \geq 1$, sea

$$\sigma_n(T) = \sigma(T) \cap \{\, \mu \in \mathbb{R} : |\mu| \geq \frac{1}{n} \,\}.$$

Entonces $\sigma_n(T)$ es vacío o a lo sumo finito (si fuera infinito, contendría un punto de acumulación, en contra de lo que se afirma en el aptdo. 3). Por tanto, $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es a lo sumo numerable. Además, si este conjunto contiene una infinidad de puntos distintos, es claro que éstos pueden ordenarse en la forma que se ha indicado. $\square$

**Observación 3.5** En las condiciones del teorema 3.5, puede ocurrir que el origen sea un valor propio, un valor propio generalizado o un valor espectral residual. Véanse los ejercicios 3.13–3.15, donde se muestran ejemplos de operadores que están en cada una de estas tres situaciones. □

**Observación 3.6** Sea $X$ un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. De forma análoga a como se hizo más arriba, se pueden definir en este contexto los conjuntos $\rho(T)$, $\sigma(T)$ y $\mathrm{VP}(T)$. Hecho esto, la proposición 3.4 y el teorema 3.5 son de nuevo ciertos. Para la demostración, véase [4]. □

### 3.3.2. Aplicación a la resolución de algunas ecuaciones integrales

Gracias a los resultados precedentes, podemos analizar la existencia de solución de la *ecuación integral de Fredholm de segunda especie*

$$\begin{cases} \phi(t) - \lambda \displaystyle\int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds = f(t) \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \\ (\phi,\lambda) \in L^2(a,b) \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.24}$$

En (3.24) supondremos que $K \in L^2((a,b)\times(a,b))$ y $f \in L^2(a,b)$. Pondremos $M = \|K\|_{L^2((a,b)\times(a,b))}$ y supondremos que $M > 0$.

El primer resultado de existencia se obtiene fácilmente a partir del teorema de Banach del punto fijo cuando $|\lambda|$ es suficientemente pequeño:

**Teorema 3.6** *Para cada $f \in L^2(a,b)$ y cada $\lambda \in (-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$ existe una única solución $\phi$ de* (3.24).

**Demostración:** Supongamos que $f$ y $\lambda$ son dadas y cumplen las condiciones del teorema. Sea $\Lambda : L^2(a,b) \mapsto L^2(a,b)$ la aplicación dada por

$$(\Lambda\phi)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } \ (a,b) \tag{3.25}$$

para cada $\phi \in L^2(a,b)$.

Entonces es fácil comprobar que $\Lambda$ está bien definida y es contractiva (esto último gracias a que $|\lambda| < 1/M$). En consecuencia, $\Lambda$ posee un único punto fijo en $L^2(a,b)$ que evidentemente coincide con la única solución de (3.24). □

Sabemos que para los valores precedentes de $\lambda$ el método de las aproximaciones sucesivas aplicado a $\Lambda$ converge. Por tanto, si ponemos

$$\begin{array}{rcl} \phi_0(t) &=& f(t), \\ \phi_1(t) &=& f(t) + \lambda \displaystyle\int_a^b K(t,s)\phi_0(s)\,ds, \\ \phi_2(t) &=& f(t) + \lambda \displaystyle\int_a^b K(t,s)\phi_1(s)\,ds, \\ \cdots && \cdots \end{array}$$

para $t \in (a,b)$ c.p.d., sabemos que la sucesión $\{\phi_n\}$ converge en $L^2(a,b)$ hacia la solución $\phi$. Tras un cálculo simple, no es difícil probar que, para cada $n \geq 1$,

$$\phi_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \left( \sum_{j=1}^{n} K_j(t,s)\lambda^{j-1} \right) f(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en } (a,b),$$

donde las funciones $K_j$ son las siguientes:

$$K_1(t,s) \equiv K(t,s),$$
$$K_{j+1}(t,s) \equiv \int_a^b K(t,\sigma)K_j(\sigma,s)\, ds \quad \text{para} \quad j \geq 1.$$

También es sencillo probar que, para casi todo $t$, la serie $\sum_{j\geq 1} K_j(t,s)\lambda^{j-1}$ converge en $L^2(a,b)$.

Por tanto, cuando $f \in L^2(a,b)$ y $\lambda \in (-1/M, 1/M)$, la única solución de (3.24) verifica

$$\phi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda) f(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en} \quad (a,b), \tag{3.26}$$

donde hemos hecho uso de la notación siguiente:

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{j\geq 1} K_n(t,s)\lambda^{j-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{c.p.d. en} \quad (a,b)\times(a,b). \tag{3.27}$$

Investiguemos a continuación qué puede ocurrir cuando $|\lambda| \geq 1/M$.

Consideremos el operador integral de Fredholm $T_K$. Sabemos que $T_K$ es un operador lineal compacto del espacio de Hilbert $L^2(a,b)$ en sí mismo. Para $\lambda \neq 0$, la ecuación integral también se puede escribir en la forma

$$T_K\phi - \mu\phi = -\mu f, \tag{3.28}$$

donde $\mu = 1/\lambda$.

Por tanto, por el teorema 3.4, existe un conjunto a lo sumo numerable $\{\lambda_n\}$ tal que

- Si $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $n$, para cada $f \in L^2(a,b)$ existe una única solución de la correspondiente ecuación (3.24).
- Si $\lambda = \lambda_n$ para algún $n$, dada $f \in L^2(a,b)$, existe solución (no única) de (3.24) si y sólo si $(f,\psi)_{L^2(a,b)} = 0$ para toda solución de la *ecuación adjunta*

  $$\psi - \lambda_n T_K^*\psi = 0. \tag{3.29}$$

  En la práctica, esto significa que $f$ debe verificar un número finito de condiciones de ortogonalidad que coincide con la dimensión del espacio propio asociado a $\lambda_n$.

Obsérvese que $T_K^*$ es un nuevo operador integral de Fredholm. En efecto, coincide con el operador asociado al núcleo $K^*$, donde

$$K^*(t,s) \equiv K(s,t).$$

Se suele decir que los $\lambda_n$ son los *autovalores de* $T_K$ (naturalmente, se trata de los inversos de los valores propios).

Si el conjunto de los $\lambda_n$ es el vacío, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para toda $f \in L^2(a,b)$ la ecuación (3.24) posee solución única. Si es finito, esto mismo es cierto salvo un número finito de valores de $\lambda$. La tercera y última posibilidad es que $\{\lambda_n\}$ sea numerable y entonces los $\lambda_n$ pueden enumerarse como los términos de una sucesión cuyos valores absolutos tienden a $+\infty$.

**Observación 3.7** Se puede construir una función *meromorfa* cuyos ceros sobre la recta real coinciden con los autovalores de $T_K$. En efecto, para cada $j \geq 1$, pongamos

$$H_j(t_1,\dots,t_j,s_1,\dots,s_j) = \det \begin{pmatrix} K(t_1,s_1) & \cdots & K_j(t_1,s_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_j,s_1) & \cdots & K_j(t_j,s_j) \end{pmatrix}$$

para $t_1,\dots,t_j,s_1,\dots,s_j \in (a,b)$ c.p.d. y

$$d_j = \int_a^b \cdots \int_a^b H_j(t_1,\dots,t_j,t_1,\dots,t_j)\, dt_1 \dots dt_j.$$

Entonces la serie de potencias

$$\sum_{j\geq 1} (-1)^j d_j \,\frac{\lambda^j}{j!}$$

converge en todo el campo complejo y la función entera

$$d(\lambda) = 1 + \sum_{j\geq 1} (-1)^j d_j \,\frac{\lambda^j}{j!} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.30}$$

tiene la propiedad deseada: los autovalores de $K$ son los ceros reales de $d$. □

Para más detalles sobre las ecuaciones integrales de Fredholm, véase por ejemplo [7, 13].

## 3.4. El teorema de Hilbert-Schmidt

A continuación, consideraremos el caso en que $H$ es un espacio de Hilbert separable y el operador lineal $T : H \mapsto H$ es compacto y autoadjunto (recuérdese que esto último quiere decir que $T = T^*$).

Todo espacio de Hilbert separable posee *bases ortonormales,* esto es, *sistemas ortonormales completos* que pueden ser construidos fácilmente por el procedimiento de Gram-Schmidt; véase el ejercicio 3.6. En el resultado principal de esta Sección, veremos que, si $T$ es compacto y autoadjunto, existe una base ortonormal de $H$ que permite "diagonalizar" $T$.

**Proposición 3.5** *Sea* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un operador autoadjunto y pongamos*

$$m_T := \inf_{v\in H, \|v\|_H=1} (Tv,v)_H, \quad M_T := \sup_{v\in H, \|v\|_H=1} (Tv,v)_H.$$

*Entonces* $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$. *Además, se tiene que* $m_T \in \sigma(T)$ *y* $M_T \in \sigma(T)$.

**Demostración:** Sea $\mu \in \mathbb{R}$, con $\mu > M_T$. Veamos que $\mu \in \rho(T)$.

Tenemos por definición que

$$(Tv, v)_H \leq M_T \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

Por tanto,

$$(\mu v - Tv, v)_H \geq (\mu - M_T)\|v\|_H^2 \quad \forall v \in H, \tag{3.31}$$

con $\mu - M_T > 0$. Teniendo en cuenta (3.31), resulta que la forma bilineal $a_T(\cdot\,,\cdot)$, con

$$a_T(u, v) := (\mu u - Tu, v)_H \quad \forall u, v \in H,$$

es continua y coerciva. Por tanto, en virtud del teorema 2.2, $\mu \mathrm{Id} - T$ es un isomorfismo y, efectivamente, $\mu \in \rho(T)$.

De modo análogo se prueba que todo $\mu \in \mathbb{R}$ con $\mu < m_T$ también pertenece a $\rho(T)$. En consecuencia, $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$.

Veamos ahora que $M_T \in \sigma(T)$. Consideremos la forma bilineal $\tilde{a}_T(\cdot\,,\cdot)$, con

$$\tilde{a}_T(u, v) := (M_T u - Tu, v)_H \quad \forall u, v \in H.$$

Claramente, $\tilde{a}_T(\cdot\,,\cdot)$ es continua, simétrica (porque $T$ es autoadjunto) y no negativa, es decir,

$$\tilde{a}_T(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Por tanto,

$$|\tilde{a}_T(u, v)| \leq \tilde{a}_T(u, u)^{1/2} \tilde{a}_T(v, v)^{1/2} \quad \forall u, v \in H,$$

de donde, tomando $v = M_T u - Tu$, obtenemos que

$$\|M_T u - Tu\|_H^2 = \tilde{a}_T(u, v) \leq C \tilde{a}_T(u, u)^{1/2} \|M_T u - Tu\|_H$$

y

$$\|M_T u - Tu\|_H \leq C \tilde{a}_T(u, u)^{1/2} \quad \forall u \in H. \tag{3.32}$$

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de puntos de $H$ tal que $\|u_n\|_H = 1$ para todo $n$ y $(Tu_n, u_n)_H \to M_T$ cuando $n \to \infty$. Se deduce de (3.32) que, necesariamente, $\|M_T u_n - Tu_n\|_H \to 0$.

Si fuera $M_T \in \rho(T)$, entonces $M_T \mathrm{Id} - T$ sería un isomorfismo y tendríamos $u_n \to 0$ en $H$, lo que es imposible. Luego $M_T \in \sigma(T)$.

La demostración de que $m_T \in \sigma(T)$ es análoga y se deja como ejercicio. □

Como consecuencia, tenemos el resultado siguiente:

**Corolario 3.2** *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto y supongamos que $\sigma(T) = \{0\}$. Entonces $T = 0$.*

**Demostración:** Por hipótesis, $m_T = M_T = 0$, de donde

$$(Tv, v)_H = 0 \quad \forall v \in H.$$

Por tanto,

$$(Tu, v)_H = \frac{1}{2}\left[(T(u + v), u + v)_H - (Tu, u)_H - (Tv, v)_H\right] = 0 \quad \forall u, v \in H$$

y en consecuencia $T = 0$. □

**Definición 3.5** *Sea $\{ H_n : n \geq 0 \}$ una familia de subespacios cerrados de $H$. Se dice que $H$ es la suma de Hilbert de los $H_n$ si*

1. *Los $H_n$ son ortogonales dos a dos, esto es, se tiene que*

$$(v_m, v_n)_H = \delta_{mn} \quad \forall v_m \in H_m, \quad \forall v_n \in H_n, \quad \forall m, n \geq 1.$$

2. *El espacio vectorial generado por $\cup_{n\geq 0} H_n$ (formado por las combinaciones lineales finitas de puntos de $\cup_{n\geq 0} H_n$) es denso en $H$.*

**Teorema 3.7** *Sea $\{ H_n : n \geq 0 \}$ una familia de subespacios cerrados de $H$ y supongamos que $H$ es la suma de Hilbert de los $H_n$. Para cada $n \geq 0$, sea $P_n : H \mapsto H_n$ el operador de proyección ortogonal sobre $H_n$. Entonces*

$$v = \sum_{n\geq 0} P_n v = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} P_n v \quad \forall v \in H \tag{3.33}$$

*y*

$$\|v\|_H^2 = \sum_{n\geq 0} \|P_n v\|_H^2 \quad \forall v \in H \tag{3.34}$$

*(igualdad de Parseval generalizada).*

*Por otra parte, si los $v_n$ son dados y tenemos $v_n \in H_n$ para cada $n \geq 0$ y $\sum_{n\geq 0} \|v_n\|^2 < +\infty$, entonces la serie $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge en $H$ hacia un $v \in H$ que verifica $P_n v = v_n$ para todo $n \geq 0$.*

**Demostración:** Para cada $k \geq 1$, pongamos

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} P_n.$$

Sea $v \in H$. Entonces $S_k v = \sum_{n=0}^{k} P_n v$ y $\|S_k v\|_H^2 = \sum_{n=0}^{k} \|P_n v\|_H^2$. Veamos que $\lim_{k\to\infty} \|v - S_k v\|_H = 0$ y $\lim_{k\to\infty} \|S_k v\|_H^2 = \|v\|_H^2$, lo cual probará (3.33) y (3.34).

Denotemos $F$ al subespacio generado por $\cup_{n\geq 0} H_n$; sabemos que $F$ es denso en $H$. Por otra parte,

$$\|S_k w\|_H \leq \|w\|_H \quad \forall w \in H \tag{3.35}$$

para cada $k \geq 1$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $v_\varepsilon \in F$ tal que $\|v - v_\varepsilon\|_H \leq \varepsilon/2$. Existe $k_\varepsilon$ tal que $v_\varepsilon$ es suma de puntos de $H_0$, $H_1$, ..., $H_{k_\varepsilon}$; por tanto,

$$S_k v_\varepsilon = v_\varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon. \tag{3.36}$$

En consecuencia, si $k \geq k_\varepsilon$ tenemos que

$$\|v - S_k v\|_H \leq \|v - v_\varepsilon\|_H + \|S_k v_\varepsilon - S_k v\|_H \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $\lim_{k\to\infty} \|v - S_k v\|_H = 0$.

Teniendo en cuenta que

$$\|v - S_k v\|_H^2 = \|v\|_H^2 - \sum_{n=0}^{k} \|P_n v\|_H^2 = \|v\|_H^2 - \|S_k v\|_H^2,$$

se deduce también que $\lim_{k\to\infty}\|S_k v\|_H^2 = \|v\|_H^2$.

Recíprocamente, supongamos que $v_n \in H_n$ para cada $n$ y $\sum_{n\geq 0}\|v_n\|^2 < +\infty$. Entonces, para $m > k \geq 0$ tenemos que

$$\|S_m v_n - S_k v_n\|_H^2 = \sum_{n=k+1}^{m} \|v_n\|_H^2 \to 0$$

cuando $k, m \to \infty$. Por tanto, la serie $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge en $H$ hacia un $v$ que, evidentemente, verifica las igualdades $P_n v = v_n$ para cada $n$. □

El resultado principal de esta Sección es el teorema siguiente, conocido como *teorema de Hilbert-Schmidt:*

**Teorema 3.8** *Sea $H$ un espacio de Hilbert separable y sea $T \in \mathcal{K}(H)$ un operador autoadjunto. Entonces existe una base ortonormal de $H$ formada por autovectores de $T$.*

**Demostración:** Supongamos de momento que el conjunto $\sigma(T)\setminus\{0\}$ es numerable y sea $\{\mu_n\}$ una enumeración de éste, con

$$|\mu_1| > |\mu_2| > \cdots > |\mu_n| > \cdots, \quad \mu_n \to 0.$$

Pongamos $\mu_0 = 0$ y $H_n = N(T - \mu_n \mathrm{Id})$ para cada $n \geq 0$. Entonces $H$ es la suma de Hilbert de los $H_n$.

En efecto, los $H_n$ son ortogonales dos a dos: si $v_n \in H_n$ y $v_m \in H_m$ con $n \neq m$, entonces

$$\mu_n(v_n, v_m)_H = (Tv_n, v_m)_H = (v_n, Tv_m)_H = \mu_m(v_n, v_m)_H,$$

de donde $(v_n, v_m)_H = 0$.

Por otra parte, si llamamos $F$ al espacio generado por $\cup_{n\geq 0} H_n$, tenemos que $F^\perp = \{0\}$.

Para probar esta última afirmación, razonaremos como sigue. En primer lugar, observamos que $T(F) \subset F$ (porque $T(H_n) \subset H_n$ para cada $n$); por tanto, también se tiene que $T(F^\perp) \subset F^\perp$. Así, $T_* = T|_{F^\perp}$ está bien definido como operador de $\mathcal{L}(F^\perp)$ y es autoadjunto y compacto en $F^\perp$.

Si $\sigma(T_*)$ contuviera un número real $\mu \neq 0$, tendríamos $\mu \in \mathrm{VP}(T_*)\setminus\{0\}$ y entonces

$$T_* v_* = \mu v_*$$

para algún $v_* \in F^\perp$, $v_* \neq 0$. Pero esto significa que $v_* \in F$ y por tanto conduce al absurdo de que $F^\perp \cap F \neq \{0\}$. Luego $\sigma(T_*) = \{0\}$.

En virtud del corolario 3.2, obtenemos que $T_* = 0$, de donde $F^\perp \subset N(T) \subset F$ y, finalmente, $F^\perp = \{0\}$.

Eso prueba que $F$ es denso en $H$ y, en consecuencia, $H$ es la suma de Hilbert de los $H_n$. Ahora, eligiendo en cada uno de los $H_n$ una base ortonormal, obtenemos fácilmente una base ortonormal de $H$. Esto prueba el teorema cuando $\sigma(T)\setminus\{0\}$ es numerable.

Cuando $\sigma(T)\setminus\{0\}$ es un conjunto finito, la demostración es análoga (e incluso más sencilla) y se deja como ejercicio. □

**Observación 3.8** En la demostración precedente, los $H_1, H_2, \dots$ son espacios de dimensión finita. El único $H_n$ que puede no ser de dimensión finita es $H_0$. De hecho, la separabilidad de $H$ se usa sólo para poder asegurar que $H_0$ posee una base ortonormal. □

**Observación 3.9** En el caso particular en que $T$ es inyectivo, el espacio $H_0 = \{0\}$ y $H$ es la suma de Hilbert de los $H_n$ con $n \geq 1$ (todos de dimensión finita). Si además $T$ es positivo, es decir,

$$(Tv, v)_H \geq 0 \quad \forall v \in H,$$

entonces todos los valores propios de $T$ son estrictamente positivos. □

## 3.5. El caso de un operador elíptico autoadjunto

En esta Sección, aplicaremos los resultados precedentes en el caso particular en que $H = L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo no vacío) y $T$ es el operador que asocia a cada $f \in L^2(\Omega)$ la solución débil de un problema elíptico similar a (2.62) en donde $f$ aparece como segundo miembro. A continuación, deduciremos algunas consecuencias.

Necesitaremos previamente probar un resultado abstracto que conecta los valores propios de un operador compacto autoadjunto con los autovalores de una forma bilineal continua.

### 3.5.1. Un resultado abstracto

Utilizaremos la definición siguiente:

**Definición 3.6** *Sean $V$ y $H$ dos espacios de Hilbert. Se dice que $(V, H)$ es un par de Lions si $V$ es un subespacio denso de $H$ y la inyección $V \hookrightarrow H$ es continua.*[2]

Como ejemplos inmediatos de pares de Lions encontramos $(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ y $(L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, donde hemos identificado, una vez más, $L^2(\Omega)$ con un espacio de formas lineales continuas sobre $H_0^1(\Omega)$; véase el ejercicio 3.23.

**Teorema 3.9** *Sean $V$ y $H$ dos espacios de Hilbert separables de dimensión infinita. Supongamos que $(V, H)$ es un par de Lions tal que la inyección $V \hookrightarrow H$ es compacta, es decir que todo acotado de $V$ es relativamente compacto en $H$. Sea $a(\cdot\,,\cdot)$ una forma bilineal continua, simétrica y coerciva sobre $V$. Entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ de números reales y una base ortonormal $\{\, e_n : n \geq 1 \,\}$ de $H$ que verifican*

$$\left\{ \begin{array}{l} a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_H \quad \forall v \in V, \quad e_n \in V, \\ 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \quad \lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty. \end{array} \right. \tag{3.37}$$

*Además, $\{\, \lambda_n^{-1/2} e_n : n \geq 1 \,\}$ es una base ortonormal de $V$ para el producto escalar $a(\cdot\,,\cdot)$.*

[2] Algunos autores usan la denominación *par de Courant.*

**Demostración:** Vamos a aplicar el teorema 3.8 a un operador lineal compacto apropiado. Este operador se construye como sigue.

Dado que la inyección $V \hookrightarrow H$ es continua, existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_H \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V. \tag{3.38}$$

Por tanto, para cada $f \in H$, $v \mapsto (f, v)_H$ es una forma lineal continua sobre $V$ y en virtud del teorema 2.2 existe un único $u_f$ que verifica:

$$a(u_f, v) = (f, v)_H \quad \forall v \in V, \quad u_f \in V. \tag{3.39}$$

Consideremos la aplicación $S : H \mapsto V$ definida por

$$Sf = u_f \quad \forall f \in H.$$

Es inmediato que $S \in \mathcal{L}(H; V)$. Además, combinando (2.7), (3.39) y (3.38), obtenemos

$$\|Sf\|_V \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_H \quad \forall f \in H.$$

El operador $T$ deseado es la composición de $S$ con la inyección de $V$ en $H$.

Gracias a la proposición 3.2, $T$ es un operador lineal compacto: $T \in \mathcal{K}(H)$. Además, dado que $a(\cdot\,, \cdot)$ es simétrica y coerciva, deducimos que $T$ es autoadjunto y positivo. En efecto, tenemos por una parte que

$$(Tf, g)_H = (g, Tf)_H = a(u_g, u_f) = a(u_f, u_g) = (f, Tg)_H \quad \forall f, g \in H,$$

mientras que

$$(Tf, f)_H = a(u_f, u_f) \geq \|u_f\|_V^2 \quad \forall f \in H.$$

El operador $T$ es también inyectivo puesto que, si $Tf = 0$, entonces

$$(f, v)_H = a(u_f, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

y entonces $f$ es ortogonal a $V$ (que es denso en $H$), de donde $f = 0$.

Por el teorema 3.8 y la observación 3.9, el conjunto de los valores propios de $T$ puede escribirse como una sucesión $\{\tilde{\mu}_n\}$ de números reales positivos que decrece estrictamente a cero. Consideremos la nueva sucesión $\{\mu_n\}$, donde hemos contado cada $\tilde{\mu}_n$ tantas veces como indica su multiplicidad y pongamos

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} \quad \forall n \geq 1.$$

Entonces $\{\lambda_n\}$ es una sucesión no decreciente de números reales positivos que tiende a $+\infty$.

Eligiendo una base ortonormal en cada uno de los espacios $N(T - \tilde{\mu}_n\mathrm{Id})$, conseguimos una base ortonormal $\{e_n\}$ de $H$.

Es claro que los $e_n \in V$. En efecto, cada $e_n$ verifica $Te_n = \mu_n e_n$ para algún $n$, con $\mu_n \neq 0$. Teniendo en cuenta las definiciones de $T$ y de los $\lambda_n$, obtenemos además que

$$a(e_n, v) = \lambda_n a(Te_n, v) = \lambda_n(e_n, v)_H \quad \forall n \geq 1.$$

Por tanto, para terminar la demostración del teorema, sólo queda probar que $\{\lambda_n^{-1/2}e_n\}$ es una base ortonormal de $V$ para el producto escalar $a(\cdot\,, \cdot)$.

Que los $\lambda_n^{-1/2} e_n$ son ortonormales para este producto escalar es inmediato. Por otra parte, si $v \in V$ y

$$a(e_n, v) = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

entonces

$$(e_n, v)_H = \frac{1}{\lambda_n} a(e_n, v) = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

de donde $v = 0$. Esto prueba que el subespacio generado por los $\lambda_n^{-1/2} e_n$ es denso en $V$ para la norma inducida por el producto escalar $a(\cdot\,,\cdot)$. Luego $\{\lambda_n^{-1/2} e_n\}$ es efectivamente una base ortonormal. $\square$

En las condiciones del teorema, se suele decir que los $\lambda_n$ son los *autovalores* de la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ y que los $e_n$ son los *autovectores* o *vectores propios* asociados.

### 3.5.2. Autovalores y autofunciones de un operador elíptico autoadjunto

A menos que se indique otra cosa, supondremos en lo que sigue que el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es acotado. Supondremos dados los coeficientes

$$a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad (i, j = 1, \ldots, N), \quad c \in L^\infty(\Omega)$$

y utilizaremos la notación

$$Lv = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + cv. \tag{3.40}$$

**Definición 3.7** *Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se dice que $\lambda$ es un autovalor de $L$ en $\Omega$ (con condiciones de Dirichlet) si el problema*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.41}$$

*posee soluciones débiles no triviales. En tal caso, estas soluciones se llaman autofunciones asociadas a $\lambda$.*

Obviamente, $\lambda$ es un autovalor de $L$ en $\Omega$ y $u$ es una autofunción asociada si y sólo si

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Big( \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + c\,u\,v \Big)\, dx = \lambda \int_\Omega u\,v\,dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.42}$$

es decir, si y sólo si $\lambda$ es un autovalor de la forma bilineal sobre $H_0^1(\Omega)$ asociada a $L$ del modo habitual. Esto explica la terminología utilizada.

El conjunto de todas las autofunciones correspondientes a un autovalor $\lambda$ es obviamente un subespacio vectorial de $L^2(\Omega)$ que se denomina *subespacio propio* asociado a $\lambda$.

**Observación 3.10** En (3.42), $u$ no es necesariamente el mínimo de un funcional cuadrático asociado a $L$ y $\lambda$. En efecto, puede ocurrir perfectamente que la función

$$v \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega \Big( \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \frac{\partial v}{\partial x_j}\, \frac{\partial v}{\partial x_i} + (c-\lambda)\,|v|^2 \Big)\, dx$$

no esté acotada inferiormente. □

El primer objetivo de esta Sección es probar que existe una sucesión de autovalores de $L$ que crece hacia $+\infty$.

Utilizaremos el resultado siguiente, conocido como *teorema de Rellich:*

**Teorema 3.10** *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado no vacío, la inyección $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta.*

La prueba se basa en los dos lemas siguientes:

**Lema 3.2** *Para cada $f \in H_0^1(\Omega)$, sea $Ef$ la función definida c.p.d. en $\mathbb{R}^N$ como sigue:*

$$Ef(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{si } x \in \Omega, \\ 0 & \textit{si no.} \end{cases}$$

*Entonces la aplicación $E : H_0^1(\Omega) \mapsto H^1(\mathbb{R}^N)$ está bien definida y es lineal, continua e isométrica.*

**Lema 3.3** *Sea $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ un conjunto no vacío. Se tiene que $B$ es relativamente compacto en $L^2(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si $B$ es acotado,*

$$\lim_{R\to+\infty} \left( \sup_{f\in B} \int_{\{|x|>R\}} |f|^2\, dx \right) = 0 \tag{3.43}$$

*y*

$$\lim_{a\to 0} \left( \sup_{f\in B} \|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right) = 0. \tag{3.44}$$

*Aquí se usa la notación $\tau_a f$ para designar la función definida como sigue:*

$$\tau_a f(x) := f(x-a) \quad \textit{c.p.d. en } \mathbb{R}^N.$$

Para las demostraciones de estos lemas, véanse los ejercicios 3.24 y 3.26.

**Demostración del teorema 3.10:** Veamos que la imagen mediante la aplicación identidad de todo acotado de $H_0^1(\Omega)$ es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$.

Claramente, esta aplicación puede escribirse como la composición del operador de extensión $E$ con el operador de restricción canónica $r : L^2(\mathbb{R}^N) \mapsto L^2(\Omega)$, definido como sigue:

$$(rF)(x) = F(x) \ \text{ c.p.d. en } \Omega, \ \forall F \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Obviamente, $r$ es lineal y continuo. Por tanto, basta probar que la imagen mediante $E$ de todo acotado de $H_0^1(\Omega)$ es relativamente compacto en $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Si $B \subset H_0^1(\Omega)$ es acotado, entonces $E(B)$ es un acotado de $L^2(\mathbb{R}^N)$ para el que se cumplen las condiciones (3.43) y (3.43). En efecto, si $R_0 > 0$ es tal que $\Omega \subset B(0; R_0)$, para cada $R \geq R_0$ y cada $f \in B$ se tiene

$$\int_{\{|x|>R\}} |Ef|^2 \, dx = 0.$$

Esto prueba (3.43) para $E(B)$. Por otra parte, para todo $f \in B$, se dan las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
\|\tau_a Ef - Ef\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &= \int_{B(0;R_0+|a|)} |Ef(x-a) - Ef(x)|^2 \, dx \\
&= \int_{B(0;R_0+|a|)} \left| \int_0^1 \nabla Ef(x - sa) \cdot a \, ds \right|^2 \, dx \\
&\leq |a|^2 \int_{B(0;R_0+|a|)} \int_0^1 |\nabla Ef(x - sa)|^2 \, ds \, dx \\
&= |a|^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Ef|^2 \, dx \\
&\leq C|a|^2.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce fácilmente (3.43) para $E(B)$.

La consecuencia es que, si $B$ es un acotado de $H_0^1(\Omega)$, $E(B)$ es relativamente compacto en $L^2(\mathbb{R}^N)$. □

Gracias al teorema 3.10, tenemos que $(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ es un par de Lions que cumple las condiciones del teorema 3.9.

**Observación 3.11** Se puede demostrar que las funciones de $H^1(\Omega)$ pertenecen a adecuados espacios $L^p(\Omega)$ con $p > 2$. Más precisamente, pongamos $2^* := +\infty$ si $N = 1$, $2^* :=$ cualquier exponente en $[1, +\infty)$ si $N = 2$ y $2^* := 2N/(N-2)$ si $N \geq 3$. Entonces $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, con inyección continua. Combinando este resultado con el teorema 3.10, no es difícil demostrar que, si $\Omega$ es acotado y $1 \leq p < 2^*$, la inyección $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacta; véase el ejercicio 3.27. Para más detalles, véase por ejemplo [1, 12]. □

**Teorema 3.11** *Sea L como en* (3.40)*, donde los $a_{ij}$ y c verifican las condiciones siguientes:*

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1, \dots, N), \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad c.p.d. \text{ en } \Omega, \quad \alpha > 0, \end{cases} \tag{3.45}$$

$$c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq 0 \quad c.p.d. \text{ en } \Omega. \tag{3.46}$$

1. *Los autovalores de L forman una sucesión no decreciente $\{\lambda_n\}$ de números positivos que tiende a $+\infty$. Además, existe una base ortonormal $\{\, \varphi_n : n \geq 1 \,\}$ de $L^2(\Omega)$ formada por autofunciones asociadas. Las correspondientes*

$\lambda_n^{-1/2}\varphi_n$ *constituyen una base ortonormal de* $H_0^1(\Omega)$ *para el producto escalar* $a(\cdot\,,\cdot)$ *definido por los* $a_{ij}$ *y* $c$*:*

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big( \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}\, \frac{\partial v}{\partial x_i} + c\, u\, v \Big)\, dx \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.47}$$

2. *Para cada* $f \in L^2(\Omega)$*, la solución débil del problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.48}$$

*está dada por*

$$u = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} (f,\varphi_n)_{L^2}\, \varphi_n, \tag{3.49}$$

*donde la serie converge en* $H_0^1(\Omega)$*.*

**Demostración:** Casi todo es inmediato, en virtud de los teoremas 3.9 y 3.10. Lo único relativamente nuevo es que debemos probar que, para cada $f \in L^2(\Omega)$, la correspondiente solución débil de (3.48) es (3.49).

Pero esto es consecuencia de las propiedades de las $\varphi_n$. En efecto, como $\{\lambda_n^{-1/2}\varphi_n\}$ es una base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$ para el producto escalar (3.47), la serie que aparece en (3.49) converge en $H_0^1(\Omega)$ hacia la única función $u$ que verifica

$$a(u,\varphi_n) = (f,\varphi_n)_{L^2} \quad \forall n \geq 1, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Pero ésta es la solución de (3.48). □

Analizaremos a continuación la existencia de pares $(u,\lambda)$ que resuelven el problema

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu = \lambda u + f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.50}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$.

Gracias al teorema 2.2, sabemos que, para cada $\lambda \leq 0$, existe una única $u$ tal que $(u,\lambda)$ es solución de (3.50). Cuando $\lambda > 0$, la situación es más compleja, pero queda clarificada en el resultado siguiente:

**Teorema 3.12** *Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$*, con* $\lambda > 0$*.*

1. *Si* $\lambda$ *no es autovalor de* $L$ *en* $\Omega$*, para cada* $f \in L^2(\Omega)$ *existe una única función* $u$ *tal que* $(u,\lambda)$ *es solución de* (3.50)*.*

2. *Por el contrario, si* $\lambda$ *es autovalor de* $L$ *en* $\Omega$*, dada* $f \in L^2(\Omega)$ *existe* $u$ *tal que* $(u,\lambda)$ *es solución de* (3.50) *si y sólo si*

$$(f,v)_{L^2} = 0 \quad \forall v \in E(\lambda),$$

*donde* $E(\lambda)$ *es el subespacio propio asociado a* $\lambda$*. En tal caso, el conjunto de todas estas* $u$ *es una variedad afín de* $L^2(\Omega)$ *de espacio soporte* $E(\lambda)$*.*

La demostración es sencilla, a partir de los teoremas precedentes y del teorema 3.4 (recuérdese la interpretación que se dio de la ecuación (3.10) tras la demostración del teorema 3.4).

**Ejemplo 3.1** En el caso más sencillo posible, con $N = 1$, $\Omega = (0, \pi)$ y $c \in \mathbb{R}_+$, el problema (3.50) se reduce a

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + cu = \lambda u + f, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Los $\lambda_n$ y las autofunciones asociadas se pueden calcular explícitamente. Se trata de los siguientes:

$$\lambda_n = c + n^2, \quad \varphi_n(x) = (2/\pi)^{1/2} \sin(nx) \ \ \forall x \in (0, \pi), \quad n \geq 1.$$

□

**Ejemplo 3.2** Otro caso en que se pueden realizar cálculos explícitos es el que sigue. Pongamos $N = 2$, $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ y de nuevo $c \in \mathbb{R}_+$ y consideremos el problema

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = \lambda u + f, & (x, y) \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Buscando soluciones de variable separada, es decir, funciones $u$ que se puedan escribir como el producto de una función de la variable $x$ por una función de la variable $y$, no es difícil demostrar que, en este caso, los autovalores y autofunciones son los siguientes:

$$\lambda_{n,m} = c+n^2+m^2, \quad \varphi_{n,m}(x) = \frac{2}{\pi} \sin(nx) \sin(my) \ \ \forall (x, y) \in \Omega, \quad n, m \geq 1.$$

□

**Observación 3.12** Es posible deducir muchas propiedades de los autovalores de $L$ y de las autofunciones asociadas. En particular, si denotamos $V_n$ el subespacio de $L^2(\Omega)$ generado por las $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y ponemos $W_0 = \{0\}$ y $W_n := V_n^\perp$ para $n \geq 1$, se puede demostrar la caracterización variacional siguiente:

$$\lambda_n = \inf_{v \in W_{n-1}} \frac{a(v, v)}{\|v\|_{L^2}^2} \quad \forall n \geq 1.$$

Para un análisis detallado, véase por ejemplo [11]. □

**Observación 3.13** Si $\Omega$ es un abierto conexo y acotado de frontera suficientemente regular, la inyección $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es de nuevo compacta. Por tanto, en este caso, se pueden repetir los argumentos precedentes en el contexto del problema de Neumann

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu = \lambda u + f, & x \in \Omega, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.51}$$

Es posible demostrar resultados similares a los teoremas 3.11 y 3.12 que se dejan como ejercicio. □

## 3.6. Soluciones débiles de problemas de evolución. Casos particulares

El teorema 3.11 puede también ser aplicado a la resolución (al menos formal) de problemas de Cauchy-Dirichlet para las EDPs de evolución

$$u_t + Lu = f \quad \text{y} \quad u_{tt} + Lu = f.$$

Recuérdese que, cuando $L = -\Delta$, estamos respectivamente frente a las EDPs del calor y ondas $N$-dimensionales.

Una vez conocidos los autovalores de $L$, la construcción de la candidata a solución es casi inmediata en ambos casos por el *método de separación de variables.* De este modo, llegamos a una serie de funciones cuyas propiedades de convergencia deben ser analizadas en una etapa posterior. Este proceso permite resolver una gran cantidad de problemas de valores iniciales y de contorno para las EDPs precedentes.

En esta Sección, presentaremos brevemente las ideas que hay debajo de este procedimiento.

### 3.6.1. Soluciones débiles de EDPs de tipo parabólico

Consideremos en primer lugar el problema

$$\begin{cases} u_t + Lu = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.52}$$

donde $L$ está en las condiciones del teorema 3.11 y $u_0 \in L^2(\Omega)$. Se suele decir que la EDP de (3.52) es de tipo *parabólico.*

**Definición 3.8** *Diremos que $u$ es solución débil de* (3.52) *si*

$$u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{3.53}$$

$$u(\cdot\,,0) = u_0 \quad \textit{(igualdad en } L^2(\Omega)\textit{)} \tag{3.54}$$

*y, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, la función $t \mapsto (u(\cdot\,,t), v)_{L^2}$ verifica*

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot\,,t), v)_{L^2} + a(u(\cdot\,,t), v) = 0, \tag{3.55}$$

*donde $a(\cdot\,,\cdot)$ es la forma bilineal dada por* (3.47) *y la derivada en tiempo se debe entender en el sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.*

Obsérvese que, si $u$ es solución débil, las funciones $t \mapsto (u(\cdot\,,t), v)_{L^2}$, que en principio sólo son continuas, poseen derivada en $L^2(0,T)$.

Nótese también que la definición que precede es coherente. En efecto, si $u$ y los coeficientes de $L$ son regulares en $\Omega \times (0,T)$ y $u$ es una solución clásica de la EDP de (3.52), entonces, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot\,,t),\varphi)_{L^2} = -\int_\Omega Lu(x,t)\,\varphi(x)\,dx = -a(u(\cdot\,,t),\varphi),$$

es decir, (3.55).

Es natural buscar la solución de (3.52) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x), \tag{3.56}$$

donde los $\lambda_n$ son los autovalores de $L$ en $\Omega$ y las $\varphi_n$ son autofunciones asociadas, por comodidad elegidas con norma unidad en $L^2(\Omega)$. En otras palabras, se supone aquí que

$$\begin{cases} L\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, & x \in \Omega, \\ \varphi_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$(\varphi_n,\varphi_m)_{L^2} = \delta_{nm} \quad \forall n,m \geq 1.$$

Cada uno de los términos de (3.56) es solución de la EDP de (3.52) y verifica además la condición de contorno sobre $\partial\Omega \times (0,T)$. Por tanto, parece razonable tratar de determinar coeficientes $a_n$ tales que la serie de (3.56) posea buenas propiedades de convergencia y, además, la correspondiente función $u$ verifique la condición inicial en (3.52).

Dado que $\{\,\varphi_n : n \geq 1\,\}$ es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$, tenemos

$$u_0 = \sum_{n\geq 1}(u_0,\varphi_n)_{L^2}\,\varphi_n$$

(con convergencia en $L^2(\Omega)$). En consecuencia, si existen unos $a_n$ tales que la solución de (3.52) puede escribirse como en (3.56), ha de tenerse $a_n = (u_0,\varphi_n)_{L^2}$ para cada $n \geq 1$ y la candidata natural a solución es

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}(u_0,\varphi_n)_{L^2}\, e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x). \tag{3.57}$$

Veamos a continuación que las igualdades (3.57) proporcionan la solución débil de (3.52):

**Teorema 3.13** *Sea* $u : [0,T] \mapsto L^2(\Omega)$ *la función dada por* (3.57)*, es decir,*

$$u(\cdot\,,t) := \sum_{n\geq 1}(u_0,\varphi_n)_{L^2}\, e^{-\lambda_n t}\varphi_n \quad \forall t \in [0,T].$$

*Entonces $u$ está bien definida y es la única solución débil de* (3.52)*.*

**Demostración:** En primer lugar, probaremos que $u$ está bien definida y verifica las relaciones (3.53)–(3.53).

Para todo $t \in [0,T]$, la serie que hay en (3.57) converge (al menos) en $L^2(\Omega)$. Por tanto, $u : [0,T] \mapsto L^2(\Omega)$ está bien definida.

Veamos que $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. En efecto, dados $t \in (0,T)$ y $h \in \mathbb{R}$ con $h > t/2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|u(\cdot\,,t+h) - u(\cdot\,,t)\|_{L^2}^2 &= \sum_{n\geq 1} |e^{-\lambda_n(t+h)} - e^{-\lambda_n t}|^2 |(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{p} |e^{-\lambda_n h} - 1|^2 e^{-2\lambda_n t} |(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2 + 4 \sum_{n\geq p+1} |(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2\end{aligned}$$

para cada $p \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $p$ tal que la última suma es (por ejemplo) $\leq \varepsilon^2/8$. Por otra parte, fijado este $p$, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} |e^{-\lambda_n h} - 1|^2 e^{-2\lambda_n t} |(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2 &\leq \max_{1\leq n\leq p} |e^{-\lambda_n h} - 1|^2 \sum_{n\geq 1} |(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2 \\ &\leq \max_{1\leq n\leq p} |e^{-\lambda_n h} - 1|^2 \|u_0\|^2\end{aligned}$$

y existe $h_0$ tal que, para $0 < |h| \leq h_0$,

$$\left( \max_{1\leq n\leq p} |e^{-\lambda_n h} - 1| \right)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2\|u_0\|^2}.$$

La consecuencia es que, cuando $h$ está en estas condiciones,

$$\|u(\cdot\,,t+h) - u(\cdot\,,t)\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $u$ es continua en todo $t \in (0,T)$. De modo totalmente análogo se prueba que $u$ es continua en $t = 0$ y $t = T$. En particular, obtenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} \|u(\cdot\,,t) - u_0\|_{L^2} = 0. \tag{3.58}$$

Veamos ahora que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. En primer lugar, notamos que para todo $t \in (0,T]$ tenemos que $u(\cdot\,,t) \in H_0^1(\Omega)$. Esto es consecuencia de que, para estos valores de $t$, la serie de (3.57) se puede escribir en la forma

$$u(\cdot\,,t) = \sum_{n\geq 1} \left[ \lambda_n^{1/2} (u_0,\varphi_n)_{L^2}\, e^{-\lambda_n t} \right] (\lambda_n^{-1/2}\varphi_n)$$

y, por tanto, es una serie de Fourier en $H_0^1(\Omega)$ asociada al producto escalar $a(\cdot\,,\cdot)$; recuérdese que los $\lambda_n^{-1/2}\varphi_n$ constituyen una base ortonormal en $H_0^1(\Omega)$ y obsérvese que

$$\sum_{n\geq 1} \lambda_n |(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2\, e^{-2\lambda_n t} < +\infty.$$

Además, la igualdad de Parseval nos dice que

$$a(u(\cdot\,,t),u(\cdot\,,t)) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n |(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2\, e^{-2\lambda_n t},$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_0^T a(u(\cdot,,t),u(\cdot,,t))\,dt &= \sum_{n\geq 1}\lambda_n|(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2\left(\int_0^T e^{-2\lambda_n t}\,dt\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}|(u_0,\varphi_n)_{L^2}|^2\left(1-e^{-2\lambda_n T}\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2\end{aligned}$$

y se deduce que, efectivamente, $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Así, vemos que $u$ verifica (3.55).

Por construcción, $u$ verifica (3.54). Finalmente, comprobemos que, para cada $v\in H_0^1(\Omega)$, se tiene (3.55). Esto es fácil: para cada $\psi\in\mathcal{D}(0,T)$, se dan las igualdades

$$\begin{aligned}\langle\frac{d}{dt}(u,v)_{L^2},\psi\rangle &= -\int_0^T (u(\cdot\,,t),v)_{L^2}\frac{d\psi}{dt}(t)\,dt\\ &= -\sum_{n\geq 1}(u_0,\varphi_n)_{L^2}(\varphi_n,v)_{L^2}\left(\int_0^T e^{-\lambda_n t}\frac{d\psi}{dt}(t)\,dt\right)\\ &= -\sum_{n\geq 1}\lambda_n(u_0,\varphi_n)_{L^2}(\varphi_n,v)_{L^2}\left(\int_0^T e^{-\lambda_n t}\psi(t)\,dt\right)\\ &= -\sum_{n\geq 1}(u_0,\varphi_n)_{L^2}\,a(\varphi_n,v)\left(\int_0^T e^{-\lambda_n t}\psi(t)\,dt\right)\\ &= -\int_0^T a(u(\cdot\,,t),v)\,\psi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Para terminar la demostración, veamos que toda solución débil de (3.52) debe coincidir con $u$.

En efecto, sea $w:[0,T]\mapsto L^2(\Omega)$ una función que cumple (3.53)–(3.55). Existen unas funciones $w_1,w_2,\dots\in C^0([0,T])$ tales que

$$w(\cdot\,,t)=\sum_{n\geq 1}w_n(t)\varphi_n\quad\forall t\in[0,T].$$

Dado que $(w(\cdot\,,t),\varphi_n)_{L^2}=w_n(t)$ y $a(w(\cdot\,,t),\varphi_n)=\lambda_n w_n(t)$ en $[0,T]$ para todo $n$ y $w(\cdot\,,0)=u_0$, deducimos que las funciones $w_n$ verifican

$$\begin{cases}\dfrac{dw_n}{dt}+\lambda_n w_n=0, & t\in(0,T),\\ w_n(0)=(u_0,\varphi_n)_{L^2}.\end{cases}$$

Por tanto, necesariamente,

$$w_n(t)=(u_0,\varphi_n)_{L^2}\,e^{-\lambda_n t}\quad\forall t\in[0,T],\quad\forall n\geq 1$$

y tenemos que $w=u$.

Esto termina la demostración. □

En muchos casos particulares, conociendo con detalle el comportamiento de los $\lambda_n$, se pueden deducir propiedades adicionales de $u$. Comprobaremos esto a continuación en un caso particularmente sencillo.

**Ejemplo 3.3** Veamos qué ocurre en la situación más sencilla posible, con $N = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $u_0 \in L^2(0, \pi)$ y

$$Lu = -\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{3.59}$$

El problema es el siguiente:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,\pi). \end{cases} \tag{3.60}$$

Los pares autofunciones-autovalores son los

$$(\varphi_n, \lambda_n), \quad \text{con} \quad \varphi_n \equiv \sqrt{2/\pi}\, \sin(nx), \quad \lambda_n = n^2. \tag{3.61}$$

Por tanto, la solución débil de (3.60) es la función

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \Big( \int_0^\pi u_0(\xi) \sin(n\xi)\, d\xi \Big)\, e^{-n^2 t} \sin(nx). \tag{3.62}$$

No es difícil comprobar que la serie que aparece en (3.62) posee muy buenas propiedades de convergencia. Más precisamente, la función definida por (3.62) posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes en el conjunto $[0, \pi] \times (0, T]$ que pueden conseguirse derivando la serie término a término y, en consecuencia, es solución de la EDP de (3.60) en $(0, \pi) \times (0, T)$ y verifica las condiciones de contorno de (3.60) para $x = 0$ y $x = \pi$ en un sentido clásico:

$$\begin{gathered} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + c\, u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T). \end{gathered} \tag{3.63}$$

Por otra parte, sabemos que $u$ verifica la condición inicial de (3.60) en el sentido de (3.58).

Para más detalles, véase [8]; véase también el ejercicio 3.28. □

### 3.6.2. Soluciones débiles de EDPs de tipo hiperbólico

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - Lu = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.64}$$

donde de nuevo $L$ está en las condiciones del teorema 3.11, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$. Se suele decir que la EDP de (3.64) es de tipo *hiperbólico.*

**Definición 3.9** *Diremos que $u$ es solución débil de* (3.64) *si*

$$u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)), \tag{3.65}$$

$$u(\cdot\,,0) = u_0, \quad u_t(\cdot\,,0) = u_t \quad \textit{(igualdades en } H_0^1(\Omega) \textit{ y } L^2(\Omega)\textit{, resp.)} \tag{3.66}$$

*y, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, la función $t \mapsto (u(\cdot\,,t),v)_{L^2}$ verifica*

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(\cdot\,,t),v)_{L^2} + a(u(\cdot\,,t),v) = 0, \tag{3.67}$$

*donde la derivada segunda en tiempo se debe entender en el sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.*

Esta vez, es natural buscar la solución de (3.52) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(\sqrt{\lambda_n}t) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n}t))\,\varphi_n(x), \tag{3.68}$$

donde hemos conservado la notación considerada más arriba.

La explicación es que cada uno de los sumandos que aparecen en (3.68) verifica la EDP y la condición de contorno de (3.64).

Tenemos que

$$u_0 = \sum_{n\geq 1}(u_0,\varphi_n)_{L^2}\,\varphi_n, \quad u_1 = \sum_{n\geq 1}(u_1,\varphi_n)_{L^2}\,\varphi_n$$

(con convergencia en $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$, respectivamente). En consecuencia, si existen unos $a_n$ y unos $b_n$ tales que la solución de (3.64) puede escribirse como en (3.68), ha de tenerse

$$a_n = (u_0,\varphi_n)_{L^2} \text{ y } b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(u_1,\varphi_n)_{L^2} \quad \forall n \geq 1.$$

La correspondiente candidata a solución es por tanto

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}\Big((u_0,\varphi_n)_{L^2}\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(u_1,\varphi_n)_{L^2}\,\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\Big)\varphi_n(x). \tag{3.69}$$

**Teorema 3.14** *Sea $u : [0,T] \mapsto H_0^1(\Omega)$ la función dada por* (3.69)*, es decir,*

$$u(\cdot\,,t) := \sum_{n\geq 1}\Big((u_0,\varphi_n)_{L^2}\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(u_1,\varphi_n)_{L^2}\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\Big)\varphi_n \;\; \forall t \in [0,T]. \tag{3.70}$$

*Entonces $u$ está bien definida y es la única solución débil de* (3.52)*.*

**Demostración:** Probaremos en primer lugar que $u$ está bien definida y verifica (3.65)–(3.67).

Para todo $t \in [0,T]$, la serie que hay en (3.70) converge al menos en $H_0^1(\Omega)$. En efecto, podemos escribir el $n$-ésimo término en la forma $U_n(t)\lambda_n^{-1/2}\varphi_n$, donde

$$U_n(t) := a(u_0, \lambda_n^{-1/2}\varphi_n)\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + (u_1,\varphi_n)_{L^2}\,\sin(\sqrt{\lambda_n}t)).$$

Teniendo en cuenta que $\{\lambda_n^{-1/2}\varphi_n\}$ es una base ortonormal en $H_0^1(\Omega)$, que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y que $u_1 \in L^2(\Omega)$, obtenemos la convergencia deseada.

Por tanto, $u$ está bien definida. Además, $u \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Esto se puede demostrar fijando $t \in [0,T]$ y $h \in \mathbb{R}$ y escribiendo que

$$a(u(\cdot\,,t+h)-u(\cdot\,,t), u(\cdot\,,t+h)-u(\cdot\,,t)) = \sum_{n\geq 1} |U_n(t+h)-U_n(t)|^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{p} |U_n(t+h)-U_n(t)|^2 + 4\sum_{n\geq p+1} \Big( |a(u_0, \lambda_n^{-1/2}\varphi_n)|^2 + |(u_1,\varphi_n)_{L^2}|^2 \Big)$$

para cada $p \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe siempre $p \geq 1$ tal que la última suma es $\leq \varepsilon^2/8$. También, existe $h_0$ (dependiente de $p$) tal que, para $0 < |h| \leq h_0$,

$$\max_{1\leq n\leq p} |\cos(\sqrt{\lambda_n}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda_n}t)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4a(u_0,u_0)}$$

y

$$\max_{1\leq n\leq p} |\sin(\sqrt{\lambda_n}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda_n}t)|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4\|u_1\|_{L^2}^2}.$$

Por tanto, cuando $h$ está en estas condiciones,

$$a(u(\cdot\,,t+h)-u(\cdot\,,t), u(\cdot\,,t+h)-u(\cdot\,,t)) \leq \varepsilon^2.$$

Esto prueba que $u$ es continua. En particular, obtenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} \|u(\cdot\,,t)-u_0\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Veamos ahora que $u \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$. Para ello, pongamos

$$Z_n(t) := \lambda_n^{-1/2}\Big(-a(u_0,\varphi_n)\,\sin(\sqrt{\lambda_n}t) + (u_1,\varphi_n)_{L^2}\cos(\sqrt{\lambda_n}t)\Big)$$

y

$$z(\cdot\,,t) := \sum_{n\geq 1} Z_n(t)\varphi_n \quad \forall t \in [0,T].$$

Bastará demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \|\frac{1}{h}(u(\cdot\,,t+h)-u(\cdot\,,t)) - z(\cdot\,,t)\|_{L^2} = 0. \tag{3.71}$$

Pero $\frac{1}{h}(u(\cdot\,,t+h)-u(\cdot\,,t)) - z(\cdot\,,t)$ es la suma de una serie que converge en $L^2(\Omega)$, de término general $X_n(t)\varphi_n$, donde

$$X_n(t) = -\frac{h}{2}a(u_0,\varphi_n)\cos(\sqrt{\lambda_n}(t+\theta_n h)) - \frac{h}{2}(u_1,\varphi_n)_{L^2}\,\sin(\sqrt{\lambda_n}(t+\theta_n h))$$

con $0 \leq \theta_n \leq 1$, de donde

$$\|\frac{1}{h}(u(\cdot\,,t+h)-u(\cdot\,,t)) - z(\cdot\,,t)\|_{L^2}^2 \leq Ch^2$$

y, en consecuencia, (3.71) es cierto. En particular, tenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} \|u_t(\cdot\,,t)-u_1\|_{L^2} = 0.$$

Así, vemos que $u$ verifica (3.65).

Por construcción, $u$ verifica (3.54). Finalmente, comprobemos que, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, se tiene (3.67): para cada $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d^2}{dt^2}(u,v)_{L^2}, \psi\rangle &= \int_0^T (u(\cdot\,,t),v)_{L^2} \frac{d^2\psi}{dt^2}(t)\,dt \\
&= \sum_{n\geq 1} (\varphi_n, v)_{L^2} \left( \int_0^T U_n(t) \frac{d^2\psi}{dt^2}(t)\,dt \right) \\
&= -\sum_{n\geq 1} \lambda_n (\varphi_n, v)_{L^2} \left( \int_0^T U_n(t)\psi(t)\,dt \right) \\
&= -\sum_{n\geq 1} a(\varphi_n, v) \left( \int_0^T U_n(t)\psi(t)\,dt \right) \\
&= -\int_0^T a(u(\cdot\,,t),v)\,\psi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Para terminar la demostración, comprobemos que toda solución débil debe coincidir con $u$.

En efecto, sea $w : [0,T] \mapsto L^2(\Omega)$ una función que cumple (3.65)–(3.67). Por hypótesis, existen unas funciones $W_1, W_2, \dots \in C^1([0,T])$ tales que

$$w(\cdot\,,t) = \sum_{n\geq 1} W_n(t)\varphi_n \quad \forall t \in [0,T].$$

Dado que $(w(\cdot\,,t),\varphi_n)_{L^2} = W_n(t)$ y $a(w(\cdot\,,t),\varphi_n) = \lambda_n W_n(t)$ en $[0,T]$ para todo $n$, $w(\cdot\,,0) = u_0$ y $w_t(\cdot\,,0) = u_1$, deducimos que las $W_n$ verifican

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 W_n}{dt^2} + \lambda_n W_n = 0, & t \in (0,T), \\ W_n(0) = (u_0,\varphi_n)_{L^2}, \quad \frac{dW_n}{dt}(0) = (u_1,\varphi_n)_{L^2} & \end{cases}$$

Por tanto, necesariamente, $W_n(t) = U_n(t)$ para todo $t \in [0,T]$ y para todo $n \geq 1$ y tenemos que $w = u$.

Esto termina la demostración. □

**Ejemplo 3.4** El caso más sencillo corresponde de nuevo a $N = 1$, $\Omega = (0,\pi)$ y $L$ como en (3.59). El problema es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in (0,\pi), \end{cases} \tag{3.72}$$

donde $u_0 \in H_0^1(0,\pi)$ y $u_1 \in L^2(0,\pi)$. Teniendo en cuenta (3.61), obtenemos la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 1} \Bigg[ &\Big( \int_0^1 u_0(\xi)\sin(n\xi)\,d\xi \Big) \cos(nt) \\
&+ \frac{1}{n\pi} \Big( \int_0^1 u_0(\xi)\sin(n\xi)\,d\xi \Big) \sin(nt) \Bigg] \sin(nx).
\end{aligned}$$

Usando los desarrollos en serie de Fourier de $u_0$ y $u_1$, no es difícil sumar explícitamente la serie precedente en los conjuntos

$$Q_{r,s} = \{ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) : x+t \in (r\pi,(r+1)\pi),\ x-t \in (s\pi,(s+1)\pi) \}$$

para $r = 0, 1, \dots$ y $s = 0, -1, -2, \dots$. □

## 3.7. Ejercicios

**E 3.1** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto no vacío.

1. Probar que $K$ es compacto si y sólo si es *precompacto* (i.e. para todo $\varepsilon > 0$ exist un recubrimiento finito de $K$ formado por bolas de radio $\varepsilon$) y completo.

2. Deducir que en todo espacio métrico completo un conjunto es relativamente compacto si y sólo si es precompacto.

**E 3.2** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto no vacío. Pobar que $K$ es relativamente compacto si y sólo si de toda sucesión en $K$ se puede siempre extraer una subsucesión convergente.

**E 3.3** Sea $X$ un espacio de Banach. Probar que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $X$ es de dimensión finita.

2. La bola unidad $B_X$ es relativamente compacta.

3. Todo acotado de $X$ es relativamente compacto.

**E 3.4** Sea $H$ un espacio de Hilbert separable y sea $\{ u_n : n \geq 1 \}$ un sistema ortonormal de $H$, i.e. un conjunto numerable con la propiedad siguiente:

$$(u_n, u_m)_H = \delta_{nm} \quad \forall n, m \geq 1.$$

Probar lo siguiente:

1. Para cada $v \in H$, la serie $\sum_{n\geq 1} (v, u_n)_H u_n$ converge en $H$ hacia un punto $\hat{v}$ que verifica
$$(\hat{v}, u_n)_H = (v, u_n)_H \quad \forall n \geq 1.$$

2. Para cada $v \in H$, la serie de términos positivos $\sum_{n\geq 1} |(v, u_n)_H|^2$ converge en $\mathbb{R}$ y además
$$\sum_{n\geq 1} |(v, u_n)_H|^2 \leq \|v\|_H^2$$
(desigualdad de Bessel).

**E 3.5** Sea $H$ un espacio de Hilbert separable y sea $\{ u_n : n \geq 1 \}$ un sistema ortonormal de $H$. Probar que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $\{ u_n : n \geq 1 \}$ es completo, i.e. el subespacio de $H$ generado por los $u_n$ es denso en $H$ (se dice también que $\{ u_n : n \geq 1 \}$ es una *base ortonormal*).

2. Para cada $v \in H$, se tiene que

$$v = \sum_{n \geq 1} (v, u_n)_H \, u_n.$$

3. Para cada $v \in H$, se tiene que

$$\|v\|_H^2 = \sum_{n \geq 1} |(v, u_n)_H|^2$$

(identidad de Parseval).

**E 3.6** Sea $H$ un espacio de Hilbert separable y sea $\{ u_n : n \geq 1 \}$ un conjunto de $H$ denso y numerable.

1. Construir un nuevo conjunto $\{ v_n : n \geq 1 \}$ denso y numerable con los $v_n$ linealmente independientes.

2. Supongamos que los $z_n$ y los $w_n$ están dados como sigue:

   *a*) $z_1 = v_1$ y $w_1 = \|z_1\|_H^{-1} z_1$.
   
   *b*) Dados $n \geq 1$ y los $w_1, \ldots, w_n$,

$$z_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (v_{n+1}, w_i)_H w_i, \quad w_{n+1} = \frac{1}{\|z_{n+1}\|_H} z_{n+1}.$$

   Probar que $\{ w_n : n \geq 1 \}$ es una base ortonormal de $H$. El método de construcción de esta base se conoce como *procedimiento de Gram-Schmidt.*

**E 3.7** Sean $H$ y $G$ dos espacios de Hilbert, con $G$ separable y sea $T \in \mathcal{K}(H; G)$, Probar que existe una sucesión $\{T_n\}$ de operadores $T_n : H \mapsto G$ de rango finito que verifican

$$T_n \to T \ \text{ en } \ \mathcal{L}(H; G) \ \text{ cuando } \ n \to +\infty.$$

*Indicación:* Téngase en cuenta que $G$ posee una base ortonormal.

**E 3.8** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $1 < p < 2$ y $K \in L^{p'}((a,b) \times (a,b))$ ($p'$ es el exponente conjugado de $p$). Se considera la aplicación $F_K : L^p(a,b) \mapsto L^p(a,b)$, definida por

$$F_K(\phi)(t) := \int_a^b K(t,s)\phi(s) \, ds \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \quad \forall \phi \in L^p(a,b).$$

1. Probar que se trata de una aplicación bien definida, lineal y continua de $L^p(a,b)$ en sí mismo, con

$$\|F_K\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b))} \leq \|K\|_{L^{p'}((a,b)\times(a,b))}.$$

2. Probar que $F_K$ es un operado lineal compacto.

**E 3.9** Se considera el operador integral de Volterra $V_K \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$, donde $(a,b)$ es un intervalo acotado y $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$. Probar que $V_K \in \mathcal{K}(L^2(a,b))$.

**E 3.10** Hallar el operador adjunto del operador de inyección Id : $H_0^1(0,1) \mapsto L^2(0,1)$.

**E 3.11** Hallar el adjunto del operador *derivada* de $H_0^1(0,1)$ en $L^2(0,1)$. Hallar el núcleo y el rango del operador de derivación y de su adjunto. Comprobar las relaciones de ortogonalidad que se tienen entre estos subespacios.

**E 3.12** Sean $H$ un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ y $\mu \in \sigma_c(T)$. Probar que se tiene (3.20).

**E 3.13** Se considera el espacio de Hilbert $\ell^2$ y el operador $T : \ell^2 \mapsto \ell^2$, con

$$T(\{x_1, x_2, \dots\}) = \{0, \varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \dots\} \quad \forall \{x_1, x_2, \dots\} \in \ell^2,$$

donde $\varepsilon_n := n^{-2}$. Probar que $T$ está bien definido y es un operador lineal compacto. Probar también que $0 \in \sigma_r(T)$.

**E 3.14** Sea $T : L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$ el operador definido por

$$Tf = u \;\Leftrightarrow\; u \in H_0^1(0,1), \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Probar que $T$ está bien definido y es un operador lineal compacto. Determinar $\sigma(T)$, $VP(T)$ y los espacios propios asociados. Probar también que $0 \in \sigma_c(T)$.

**E 3.15** Se define el operador $T : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$ como sigue:

$$(Tv)(t) = v(0) + tv(1) \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall v \in C^0([0,1]).$$

Probar que $T \in \mathcal{K}(C^0([0,1]))$. Hallar su espectro, sus valores propios y los espacios propios asociados. En particular, compruébese que $0 \in VP(T)$.

**E 3.16** Sea $T :\, L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(T\phi)(t) = t\phi(t) \quad t \in (0,1)\text{c.p.d.}, \quad \forall \phi \in L^2(0,1).$$

Probar que $T \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ es autoadjunto y no tiene valores propios. Hallar su espectro.

**E 3.17** Se considera el operador $T :\, L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(T\phi)(t) = \int_0^1 (1 + \cos(\pi t)\sin(\pi s))\phi(s)ds \quad \text{c.p.d. } t \in [0,1], \quad \forall \phi \in L^2(0,1).$$

1. Probar que las ecuaciones $(\mathrm{Id} - T)\phi = 0$ y $(\mathrm{Id} - T^*)\phi = 0$ tienen soluciones no triviales en $L^2(0,1)$.
2. ¿ Qué condiciones debe verificar $f \in L^2(0,1)$ para que la ecuación $(I - T)\phi = f$ tenga solución en $L^2(0,1)$ ?

**E 3.18** Se considera el operador $T :\, C^0([-1,1]) \mapsto C^0([-1,1])$, definido como

$$(Tv)(t) = \int_{-1}^1 v(s)\,ds + v(1)t^3 \quad \forall t \in [-1,1], \quad \forall v \in C^0([-1,1]).$$

1. Demostrar que $T \in \mathcal{L}(C^0([-1,1]))$ y es compacto.
2. Hallar el espectro y los autovalores de $T$, así como los espacios propios asociados y las dimensiones de éstos.

**E 3.19** Se considera el operador $T: \ C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$, definido como

$$(Tv)(t) = \int_0^1 v(s)\, ds \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall v \in C^0([0,1]).$$

Probar que $T \in \mathcal{K}(C^0([0,1]))$. Hallar su espectro, sus autovalores y los espacios propios asociados.

**E 3.20** Se considera el operador $T: \ L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(T\phi)(t) = \int_0^1 K(t,s)\phi(s)\, ds \quad t \in (0,1)\text{c.p.d.}, \quad \forall \phi \in L^2(0,1),$$

donde

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } \ 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t) & \text{si } \ 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}$$

Hallar los valores propios de $T$ y los autoespacios asociados.

**E 3.21** Se considera el operador $T: \ L^2(0,\pi) \mapsto L^2(0,\pi)$ definido por

$$(Tv)(t) = \int_0^\pi K(t,s)\, v(s)\, ds, \quad t \in (0,\pi) \text{ c.p.d.}, \quad \forall v \in L^2(0,\pi),$$

donde

$$K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s & \text{si } \ 0 \le s \le t \le \pi \\ \sin s \cos t & \text{si } \ 0 \le t \le s \le \pi \end{cases}$$

1. Probar que $T$ es un operador compacto y autoadjunto en $L^2(0,\pi)$.
2. Hallar los valores propios de $T$ y los subespacios asociados.
3. Sea $f(t) \equiv \sin(t/2)$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, discutir la existencia y unicidad de solución de
$$v - \lambda T v = f, \quad v \in L^2(0,\pi), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**E 3.22** Se considera el operador $T: \ L^2(-\pi,\pi) \mapsto L^2(-\pi,\pi)$, definido por

$$(Tv)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin s + \sin t)\, v(s)\, ds \quad t \in (-\pi,\pi) \text{ c.p.d.}, \quad \forall v \in L^2(-\pi,\pi).$$

1. Demostrar que $T$ satisface las hipótesis del teorema de Hilbert-Schmidt.
2. Hallar el espectro y los autovalores del operador $T$ definido en el apartado anterior. Determinar los espacios $H_n$ que se obtienen al aplicar el teorema de Hilbert-Schmidt.

**E 3.23** Probar que $(L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, donde $L^2(\Omega)$ queda identificado con un espacio de formas lineales continuas sobre $H_0^1(\Omega)$ del modo habitual, es un par de Lions.

**E 3.24** Probar el lema 3.2.

*Indicación:* Considerar el operador de extensión análogo $E_0$, definido sólo en $\mathcal{D}(\Omega)$ y razonar por densidad.

**E 3.25** Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$ y sea $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ un conjunto acotado que verifica (3.44).

1. Probar que, para cada $f \in B$ y cada $n \geq 1$,

$$\|f * \rho_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{|a| \leq 1/n} \|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

   Deducir que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \geq 1$ tal que

$$\|f * \rho_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \quad \forall f \in B.$$

2. Sean $n \geq 1$ y $R > 0$ y consideremos el conjunto de las funciones

$$\hat{f} = f * \rho_n\Big|_{\overline{B}(0;R)}$$

   donde $f \in B$. Probar que $\hat{B}$ es relativamente compacto en el espacio de Banach $C^0(\overline{B}(0;R))$.

   *Indicación:* Aplíquese a $\hat{B}$ el teorema de Ascoli-Arzellà.

**E 3.26** Probar el lema 3.26.

*Indicación:* Suponer en primer lugar que $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ es relativamente compacto, fijar $\varepsilon > 0$, deducir que $\overline{B}$ está contenido en una unión finita de bolas de radio $\varepsilon$ y, de aquí, que existen $R_0 > 0$ y $\delta_0 > 0$ tales que, si $R \geq R_0$ y $|a| \leq \delta_0$,

$$\int_{|x|>R} |f|^2\, dx \leq 2\varepsilon^2 \quad \text{y} \quad \|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 3\varepsilon \quad \forall f \in B.$$

Recíprocamente, suponer que se verifican las propiedades del lema y fijar $\varepsilon > 0$, $R > 0$ y $k \geq 1$ tales que

$$\int_{|x|>R} |f|^2\, dx \leq \varepsilon^2 \quad \text{y} \quad \|\rho_k * f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \quad \forall f \in B.$$

Aplicando el resultado del ejercicio 3.25, deducir que existe una familia finita de bolas de radio $\sqrt{5}\varepsilon$ que recubre $\overline{B}$.

**E 3.27** Sea $\Omega$ acotado y supongamos que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, con inyección continua, donde $q > 1$. Probar que, para cada $p \in [1, q)$, la inyección $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacta.

**E 3.28** Probar que, la función $u$ definida por (3.62) posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes en el conjunto $[0, \pi] \times (0, T]$ y es solución de la EDP y las condiciones de contorno de (3.60) en el sentido (clásico) indicado en (3.63).

**E 3.29** Supongamos que $N = 2$, $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$. Se considera el siguiente problema para la EDP del calor bidimensional:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & (x, y, t) \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \partial\Omega \times (0, \pi). \end{cases}$$

Se pide:

1. Obtener la solución débil como suma de una serie de funciones que converge en $L^2(\Omega)$ para cada $t$.
2. Probar que esta función verifica la EDP y las condiciones de contorno precedentes en un sentido clásico.

**E 3.30** Se considera el problema (3.52), donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado y $L$ es como en el teorema (3.11). Se supone que, para todo $A > 0$, existen $n_0 \geq 1$ y $C > 0$ tales que $\lambda_n \geq A \log n - C$ para todo $n \geq n_0$. Probar que la solución débil verifica la EDP y las condiciones de contorno en un sentido clásico.

**E 3.31** Se considera el problema (3.72), donde $u_0 \in H_0^1(0, \pi)$ y $u_1 \in L^2(0, \pi)$. Razonando como en el ejemplo 3.4, obtener explícitamente la candidata a solución en los conjuntos $Q_{0,0}$, $Q_{0,-1}$ y $Q_{1,0}$.

**E 3.32** Se considera de nuevo el problema (3.72). Probar que, si los datos $u_0$ y $u_1$ verifican

$$u_0 \in C^2([0, \pi]), u_0(0) = u_0''(0) = u_0(\pi) = u_0''(\pi) = 0,$$
$$u_1 \in C^1([0, \pi]), u_1(0) = u_1(\pi) = 0,$$

entonces la candidata a solución es de hecho una solución clásica de (3.72). Más precisamente, $u \in C^2([0, \pi] \times [0, +\infty))$ y

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T),$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in (0, T),$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_x(x, 0) = u_1(x) \quad \forall x \in [0, \pi].$$

# Bibliografía


[1] ADAMS, R.A. *Sobolev spaces,* Academic Press, 1975.

[2] BARBU, V. *Partial differential equations and boundary value problems,* Kluwer Academic Publishers, 1998.

[3] BARROS-NETO, J. *An introduction to the theory of distributions,* Pure and Applied Mathematics, 14, Marcel Dekker, Inc. New York, 1973.

[4] BREZIS, H. *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones,* Alianza Editorial, 1984.

[5] CAÑADA, A. *Series y tranformada de Fourier y aplicaciones,* Publicaciones de la Universidad de Granada, 1994.

[6] CASAS, E. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales,* Publicaciones de la Universidad de Cantabria (Santander), 1992.

[7] CORDUNEANU, C. *Principles of differential and integral equations,* Chelsea Publishing Company, 1977.

[8] DAUTRAY, R.; LIONS, J.L. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques,* Masson, Paris, 1985.

[9] EKELAND, I.; TÉMAM, R. *Analyse convexe et inéquations varationnelles,* Dunod, Gauthiers-Villars, 1970.

[10] GILBARG, D.; TRUDINGER, N.S.. *Elliptic partial differential equations of second order, 2nd Ed.,* Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] HACKBUSH, W. *Elliptic differential equations. Theory and numerical treatment,* Springer Series in Computational Mathematics, 18, Reprint of the 1992 English edition, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[12] HIRSCH, F.; LACOMBE, G. *Elements of functional analysis,* Graduate Texts in Mathematics,192, Springer-Verlag, New York, 1999.

[13] HOCHSTADT, H. *Integral equations.* John Wiley & Sons, 1973.

[14] JOHN, F. *Partial differential equations, 4th Ed.,* Springer-Verlag, New York, 1991.

[15] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications,* John Wiley & Sons, New York, 1989.

[16] KUFNER, A. Y OTROS. *Function spaces,* Noordhoff International Publishing, Leyden, Academia, Prague, 1977.

[17] LANG, S. *Real and functional analysis,* Third edition, Graduate Texts in Mathematics 142, Springer-Verlag, New York, 1993.

[18] NEČAS, J. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson, Paris, 1967.

[19] PERAL, I. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales,* Addison-Wesley (Universidad Autónoma de Madrid), 1995.

[20] SNEDDON, I.N. *Elements of partial differential equations,* MacGraw & Hill Book Co. Inc., 1957.

[21] SCHWARTZ, L: *Théorie des distributions, Tome I,* Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9, Hermann & Cie., Paris, 1950.

[22] SCHWARTZ, L: *Théorie élémentaire des distributions,* Les cours de Sorbonne, Méthodes mathématiques de la physique, II, Paris, 1955.

[23] TRENOGIN, V.A. Y OTROS. *Problemas y ejercicios de Análisis Funcional,* Mir, Moscú, 1987.

[24] VO KHAC KOAN, *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales,* Reverté, Barcelona, 1970.

[25] WEINBERGER, H.F. *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales,* Reverté, Barcelon, 1970.

[26] VLADIMIROV, V.S. *Recueil de problémes d'equations de physique mathématique,* Mir, Moscú, 1976.