ANÁLISIS FUNCIONAL Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
HOJA 1: GENERALIDADES

E 1. Se considera la *EDP del transporte*

$$u_t + Mu_x = 0.$$

Probar que u es solución clásica de esta EDP en el abierto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2$ si y sólo si existe $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$u(x,t) = f(x - Mt) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Como aplicación, dada $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + Mu_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

E 2. Efectuar el cambio de variables $\xi = x + 2t$, $\eta = x + 3t$ en la ecuación

$$2w_{\xi\xi} + 8w_{\xi\eta} + 7w_{\eta\eta} = 0.$$

E 3. Se considera el problema de la cuerda vibrante

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & a < x < b,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & a \le x \le b, \\ u(a,t) = p(t),\ u(b,t) = q(t). \end{cases}$$

Efectuar el cambio de variable

$$\xi = \frac{x-a}{b-a}, \quad \eta = \frac{c}{b-a} t$$

y re-escribir el problema en las nuevas variables ξ y η.

E 4. Demostrar que la EDP

$$u_{tt} - a u_t - k u_{xx} = 0,$$

donde a y k son constantes, puede reducirse a una ecuación análoga con $a = k = 1$.

Indicación: Intentar un cambio de variable de la forma $\xi = Ax$, $\eta = Bt$, siendo A y A constantes adecuadas.

E 5. Demostrar que la EDP

$$u_t - au - c^2 u_{xx} = 0,$$

donde a y c son constantes, puede reducirse a otra ecuación análoga con $a = 0$.

Indicación: Intentar un cambio de variable de la forma $v = \alpha(t)\, u$, siendo α una función adecuada.

E 6. Demostrar que la función $u(x,y) = f(x)g(y)$ es solución de

$$u u_{xy} = u_x u_y$$

para todo par de funciones dos veces continuamente diferenciables f y g.

E 7. Hallar la solución general, esto es, una familia de soluciones dependientes de dos funciones arbitrarias, de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } u_{xx} = 0; \quad \text{b) } u_{xy} = 0; \quad \text{c) } u_{xy} + u_y = 0; \quad \text{d) } u_{xx} + u = 0,$$

con $u = u(x,y)$.

E 8 (*). Se consideran las EDPs

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad u_{xt} = 0, \quad u_t - u_{xx} = 0, \quad u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Denominaremos *Problema* i al constituido por la i-ésima EDP en $\mathbb{R}^2$, complementada con las condiciones

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi \in C^1(\mathbb{R})).$$

En cada caso, diremos que u es solución si $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y verifica la EDP en D y las condiciones adicionales en todo $(x,0)$. Probar lo siguiente:

1. El Problema 1 sólo posee solución si φ es analítica.
2. El Problema 2 sólo posee solución si φ es constante.
3. El Problema 3 sólo posee solución si $\varphi \equiv 0$.
4. El Problema 4 posee solución única para toda $\varphi \in C^1([-1,1])$. Hallar la solución en este caso.
   Indicación: Realizar el cambio de variables $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ y resolver la EDP resultante.

E 9. Sea $\xi \in \mathbb{R}^N$. Probar que, para cada $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, la función

$$v(x) := \begin{cases} C_1 \log \dfrac{1}{|x-\xi|} + C_2 & \text{si } N = 2 \\ C_1 \dfrac{1}{|x-\xi|^{N-2}} + C_2 & \text{si } N \geq 3 \end{cases} \tag{1}$$

es solución clásica en $\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}$ de la EDP de Laplace. Deducir que también lo son las funciones siguientes:

$$\frac{x_1 - \xi_1}{|x-\xi|^2}, \quad \frac{x_1 - x_2 - \xi_1 + \xi_2}{|x-\xi|^2}, \quad \frac{|x-\xi|^2 - 2(x_2-\xi_2)^2}{|x-\xi|^4} \quad \text{para} \quad N = 2,$$

$$\frac{x_1 - \xi_1}{|x-\xi|^3}, \quad \frac{x_1 - 4x_3 - \xi_1 + 4\xi_3}{|x-\xi|^3}, \quad -\frac{3(x_2-\xi_2)(x_3-\xi_3)}{|x-\xi|^5} \quad \text{para} \quad N = 3.$$

E 10. Probar que, fijado $\xi \in \mathbb{R}^N$, las únicas soluciones de la EDP de Laplace en $\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}$ que sólo dependen de $|x-\xi|$ son las funciones que aparecen en (1).

E 11. Se considera la EDP lineal de coeficienes constantes

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto no vacío, la matriz $A = \{a_{ij}\}$ es simétrica y definida positiva y $f \in C^0(\Omega)$. Probar que existe un cambio de variables $y = Px$ que permite re-escribir esta EDP de forma equivalente como una EDP de Poisson en $\Omega^* := \{\, Px : x \in \Omega \,\}$. Deducir que, para cada $\zeta \in \mathbb{R}^N$, la función

$$u(x) := |Px - \zeta|^{-N} \left(\sum_{j=1}^{N} p_{1j} x_j - \zeta_1 \right)$$

es solución clásica en $\mathbb{R}^N \setminus \{P^{-1}\zeta\}$ de la EDP (2) para $f \equiv 0$.

E 12 (*)**.** Sea $\eta \in \mathbb{R}^3$. Probar que las funciones $z(x) := \dfrac{1}{|x-\eta|}\left(a_1 \cosh|x-\eta| + a_2 \sinh|x-\eta|\right)$ son soluciones clásicas en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\eta\}$ de la EDP

$$-\Delta u + u = 0.$$

¿ Son éstas las únicas que sólo dependen de $|x-\eta|$?

E 13 (*)**.** Sean $R_0 > 0$ y $\overline{u} \in \mathbb{R}$. Se considera el problema siguiente: Hallar $u = u(x,t)$ y $R = R(t)$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, \quad x \in B(0; R(t)), \quad t > 0, \\ u(x,t) = \overline{u}, \quad |x| = R(t), \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = -\dot{R}(t) \quad |x| = R(t), \quad t > 0 \\ R(0) = R_0 \end{cases}$$

Probar que la única solución de este problema es:

$$u = \overline{u} \frac{\sinh|x|/|x|}{\sinh R(t)/R(t)}, \quad R(t) = H^{-1}(H(R_0) + \overline{u}t), \quad \text{para} \quad x \in \overline{B}(0; R(t)), \quad t \geq 0,$$

donde H es una primitiva de la función

$$s \mapsto \frac{1}{\coth s - \frac{1}{s}}.$$