ANÁLISIS FUNCIONAL Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

HOJA 2: FORMULACIÓN DÉBIL DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

E 1. Sean X e Y dos espacios normados y sea $T : X \mapsto Y$ una aplicación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es acotada.
2. $T : X \mapsto Y$ es continua en 0.
3. $T : X \mapsto Y$ es continua en todo punto.

E 2. Sean X e Y dos espacios de Banach.

1. Probar que, si $T : X \mapsto Y$ es una aplicación lineal, continua y sobreyectiva, T es *abierta,* esto es, la imagen mediante T de todo abierto de X es un abierto de Y (teorema de la aplicación abierta).
2. Deducir que, si $T : X \mapsto Y$ es una aplicación lineal, continua y biyectiva, su inversa $T^{-1} : Y \mapsto X$ es también lineal y continua (teorema de Banach de la aplicación inversa).
3. Deducir también que, si $T : X \mapsto Y$ es una aplicación lineal y para cada sucesión $\{x_n\}$ en X con $x_n \to 0$ y $Ax_n \to y$ se tiene $y = 0$, entonces $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ (teorema del grafo cerrado).

Indicación: Daremos por válido el *teorema de Baire* y, más concretamente, que un espacio de Banach no puede escribirse como la unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío.

Pruébese en primer lugar que, si $T : X \mapsto Y$ es una aplicación lineal, continua y sobreyectiva, el conjunto $\overline{T(B)}$ (donde B es la bola unidad de X), es un entorno de 0 en Y. A continuación, demuéstrese que $T(B)$ es también un entorno de 0 y que, en consecuencia, T es abierta.

E 3. Sean X e Y dos espacios normados y sea $\mathcal{L}(X; Y)$ el espacio normado de las aplicaciones lineales continuas $T : X \mapsto Y$. Probar que, si Y es completo, entonces también lo es $\mathcal{L}(X; Y)$.

Indicación: Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X; Y)$. Probar que, para cada $x \in X$, $\{T_n x\}$ una sucesión de Cauchy en Y. Deducir que existe $T : X \mapsto Y$ tal que $T_n x \to Tx$ en Y para todo $x \in X$ y probar a continuación que $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ y $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(X; Y)$.

E 4. Sean H un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal. Probar que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $a(\cdot\,,\cdot)$ es acotada.
2. $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $(0, 0)$.
3. $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo punto.

E 5. Sean H un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal continua. Probar que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. Para cada $f \in H'$, existe un único u que verifica
$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H, \quad u \in H.$$
2. $a(\cdot\,,\cdot)$ verifica la propiedad siguiente, conocida como *condición inf-sup:*
$$\inf_{u \in H} \sup_{v \in H} \frac{a(u, v)}{\|u\|\,\|v\|} > 0.$$

Dar un ejemplo de forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ no coerciva que verifique la condición inf-sup precedente.

E 6. Sea $K \in L^2((a,b)\times(a,b))$ una función dada. Por definición, el *operador integral de Fredholm en* $L^2(a,b)$ *de núcleo* K es la aplicación T_K, dada por

$$(T_K\phi)(t) = \int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \quad \forall \phi \in L^2(a,b).$$

Probar que $T_K \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$ y que $(T_K)^* = T_{K^*}$, donde el núcleo K^* está dado por

$$K^*(t,s) = K(s,t) \quad \text{c.p.d. en } (a,b).$$

E 7. Sea $K \in L^2((a,b)\times(a,b))$. Se denomina *operador integral de Volterra en* $L^2(a,b)$ *de núcleo* K a la aplicación V_K, dada por

$$(V_K\phi)(t) = \int_a^t K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \quad \forall \phi \in L^2(a,b).$$

Probar que $V_K \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$. ¿ Qué operador es V_K^* ?

En los ejercicios que siguen, I (resp. Ω) denota un intervalo abierto (resp. un abierto conexo no vacío de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$).

E 8. Sea $p \in [1,+\infty)$ y sea p' el exponente conjugado de p. Probar la desigualdad de Hölder en los $\mathcal{L}^p(\Omega)$:

$$\int_\Omega |uv|\,dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |v|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \qquad \forall u \in \mathcal{L}^p(\Omega),\ \forall v \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega).$$

E 9. Sea $p \in [1,+\infty)$. Probar la desigualdad de Minkowski en $\mathcal{L}^p(\Omega)$:

$$\left(\int_\Omega |u+v|^p\,dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |v|^p\,dx\right)^{1/p} \qquad \forall u,v \in \mathcal{L}^p(\Omega).$$

E 10. Probar que el espacio de Banach $L^\infty(\Omega)$ no es separable.

Indicación: Sea $\{E_n : n \geq 1\}$ una familia numerable de abiertos no vacíos $E_n \subset \Omega$, disjuntos dos a dos. Sea $\mathcal{F}$ la famila de funciones de $L^\infty(\Omega)$ que toman el valor 0 ó 1 en cada E_n y 0 en $\Omega \setminus \cup_n E_n$. Pruébese que $\mathcal{F}$ es no numerable y que la distancia en $L^\infty(\Omega)$ de dos funciones de $\mathcal{F}$ distintas es siempre 1.

E 11. Sea Ω acotado, supongamos que $K \in L^\infty(\Omega\times\Omega)$ y pongamos $\hat{K} := \|K\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)}$. Utilizando el teorema de Lax-Milgram y suponiendo que $\hat{K}|\Omega| < 1$, probar que para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $u \in L^2(\Omega)$ de la ecuación integral

$$u(x) - \int_\Omega K(x,y)\,u(y)\,dy = f(x), \qquad x \in \Omega \;\; \text{c.p.d.}$$

E 12. Calcular las derivadas primeras y segundas en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de las funciones siguientes:

1. Función de Heaviside: $H(x) = 0$ si $x < 0$ y $H(x) = 1$ si $x > 0$.
2. Función valor absoluto.

E 13. Sean $\Omega = (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$ y g la función definida en Ω por

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1x_2 & \text{si } x_1 > 0, \\ x_1 & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de g en el sentido de las distribuciones en Ω.

E 14. Sea Q el interior del cuadrado de vértices $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,1)$ y $(2,2)$ (un abierto de $\mathbb{R}^2$). Denotemos T la función característica de Q, i.e. $T(x) = 1_Q(x) = 1$ si $x \in Q$ y $T(x) = 0$ en caso contrario. Se pide calcular las siguientes derivadas en el sentido de las distribuciones en $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 x_2}.$$

E 15. Sea $B = B(0;1) \subset \mathbb{R}^N$ con $N \geq 3$ y sea $u(x) = |x|^{-\alpha}$, con $\alpha < N/2 - 1$. Probar que $u \in H^1(B)$ y que, por tanto, cuando $N \geq 3$, las funciones de $H^1(\Omega)$ no pertenecen necesariamente a $L^\infty(\Omega)$.

E 16. Sea $\Omega = B(0;\rho) \subset \mathbb{R}^2$ con $\rho < 1$. Probar que la función $u(x) = (-\log|x|)^k$, definida para $x \in \Omega \setminus \{0\}$, pertenece a $H^1(\Omega)$ si $0 < k < 1$. En consecuencia, tampoco para $N = 2$ las funciones de $H^1(\Omega)$ pertenecen necesariamente a $L^\infty(\Omega)$.

E 17. Sea $u \in L^2(\Omega)$. Demostrar que $u \in H^1(\Omega)$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega u\, \partial_i \varphi\, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega),\ 1 \leq i \leq N.$$

E 18. Probar que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Indicación: Sea $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Construir en primer lugar una sucesión $\{v_n\}$ de funciones de $H^1(\mathbb{R}^N)$ tales que los $\operatorname{sop} v_n$ son compactos y $v_n \to v$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ cuando $n \to +\infty$. A continuación, con ayuda de una sucesión regularizante, fijado n, construir una sucesión $\{v_{nm}\}$ de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ que verifican $v_{nm} \to v_n$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ cuando $m \to +\infty$.

E 19. Supongamos que $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

1. Probar que existe una aplicación lineal continua $E : H^1(\Omega) \mapsto H^1(\mathbb{R}^N)$ que permite "extender" las funciones de $H^1(\Omega)$, esto es, verifica
$$Ev = v \text{ en } \Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$
2. Probar que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$.

E 20. Probar el *teorema de trazas* cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{0,1}$.

Indicación: Con ayuda de cartas locales, descomponer la construcción de γ en un número finito de construcciones análogas a las que corresponden al caso en que $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

E 21. Probar que, cuando $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ y $f \in R(\gamma)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} |\hat{f}(\xi')|^2\, d\xi' < +\infty$$

Indicación: Pruébese previamente que toda función $v \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$ verifica

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[(1 + |\xi'|^2) |\hat{v}(\xi', x_N)|^2 + |\partial_N \hat{v}(\xi', x_N)|^2 \right] d\xi'\, dx_N < +\infty,$$

donde $\hat{v} = \hat{v}(\xi', x_N)$ denota la transformada de Fourier de v respecto de la variable ξ'.

E 22. Probar que si $v \in H^1(\Omega)$ y existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $v = 0$ en $\Omega \setminus K$, entonces $v \in H^1_0(\Omega)$. Probar también que si $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y $v(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, entonces $v \in H^1_0(\Omega)$.

E 23. Sean $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$ y sea $F : H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma lineal definida como sigue:

$$F(v) = \int_\Omega (f_0\, v + \sum_{i=1}^N f_i\, \partial_i v)\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1}$$

Probar que $F \in (H^1(\Omega))'$ y que

$$\|F\|_{(H^1)'} \leq \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|^2_{L^2} \right)^{1/2},$$

donde $\|\cdot\|_{(H^1)'}$ es la norma en $(H^1(\Omega))'$ inducida por la norma de $H^1(\Omega)$. Probar también que, recíprocamente, si $F \in (H^1(\Omega))'$, existen $N + 1$ funciones $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$ tales que se tiene (1) y

$$\|F\|_{(H^1)'} = \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|^2_{L^2} \right)^{1/2}.$$

E 24. Supongamos que Ω es acotado al menos en una dirección. Sea $f_i \in L^2(\Omega)$ para $i = 1, \dots, N$ y sea $F : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma lineal definida como sigue:

$$F(v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N f_i \, \partial_i v \right) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

Probar que $F \in H^{-1}(\Omega)$ y que

$$\|F\|_* \leq \left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

donde $\|\cdot\|_*$ es la norma en $H^{-1}(\Omega)$ inducida por la norma de $H_0^1(\Omega)$. Probar también que, recíprocamente, si $F \in H^{-1}(\Omega)$, existen N funciones $f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega)$ tales que se tiene (2) y

$$\|F\|_* = \left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

E 25. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío y $f \in C^0(\overline{\Omega})$ una función dada. Supongamos que u es solución débil del problema de Dirichlet para la EDP de Poisson con segundo miembro f y dato nulo sobre la frontera y que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Probar que u es solución clásica.

E 26. Demostrar las afirmaciones siguientes:

1. Existe una función $\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ tal que

$$\int_I \varphi_0(x)\, dx = 1.$$

2. Para cada $f \in \mathcal{D}(I)$, existe $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ tal que

$$f(x) = \varphi'(x) + \left(\int_I f(y)\, dy \right) \varphi_0(x) \quad \forall x \in I,$$

siendo φ_0 la función que aparece en el apartdo precedente.

3. Si $v \in \mathcal{L}^1_{loc}(I)$ es tal que

$$\int_I v(x)\, \varphi'(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) = C$ c.p.d. en I.

4. Si $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(I)$, $x_0 \in I$ y ponemos $G(x) := \displaystyle\int_{x_0}^x g(y)\, dy$, entonces $G \in C^0(I)$ y

$$\int_I G(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_I g(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Indicación: Pruébese el resultado en primer lugar cuando $g \in C^0(I)$ y razónese a continuación por densidad.

5. Se supone a partir de ahora que I es acotado. Si $u \in H^1(I)$, entonces existe un único representante $\tilde{u}$ de u que verifica $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ y

$$\tilde{u}(t_2) - \tilde{u}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u'(s) ds \quad \forall t_1,\, t_2 \in \overline{I}.$$

En consecuencia, identificando cada elemento de $H^1(I)$ con su representante continuo, podemos escribir que $H^1(I) \subset C^0(\overline{I})$.

Indicación: Sean $\bar{u}$ un representante de u, $\bar{v}$ un representante de u' y pongamos

$$u_0(x) := \int_{x_0}^x \bar{v}(s)\, ds.$$

Entonces $u_0 \in C^0(\overline{I})$ y $u_0 - \bar{u}$ es c.p.d. igual a una constante C. uego basta tomar $\tilde{u} = \bar{u} = u_0 - C$.

6. Existe una constante C_I tal que

$$|\tilde{u}(t)| \leq C_I \|u\|_{H^1(I)} \quad \forall t \in \overline{I}.$$

Por tanto, $u \mapsto \tilde{u}$ es una aplicación lineal continua e inyectiva de $H^1(I)$ en $C^0(\overline{I})$.

Indicación: Usar el aptdo. precedente con $t_2 = t \in \overline{I}$ fijo y t_1 en un intervalo contenido en I e intégrese respecto de t_1.

7. De hecho, la inyección precedente es *compacta,* es decir: la imagen mediante ella de todo acotado de $H^1(I)$ es relativamente compacto en $C^0(\overline{I})$.

Indicación: Úsese el teorema de Ascoli-Arzelà.

8. Se tiene la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_I u'(x)\, v(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_I u(x)\, v'(x)\, dx \quad \forall u,\, v \in H^1(I).$$

E 27. Compruébese que $C^0(\overline{I}) \not\subset H^1(I)$, esto es, que existen funciones continuas que no poseen derivada generalizada en $L^2(I)$.

En los siguientes ejercicios se suponen conocidos los resultados del ejercicio E26. También se supone conocido el resultado siguiente, que es consecuencia inmediata del apartado 5:

Si $u,\, v \in C^0(\overline{I})$ y

$$\int_I v\, \varphi\, dx = -\int_I u\, \varphi'\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

entonces $u \in C^1(\overline{I})$ y su derivada clásica coincide con v en $\overline{I}$.

Usaremos que, cuando I es acotado, $C^1(\overline{I})$ es denso en $H^1(I)$ y, más generalmente, que $C^1(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

E 28. Sean $I = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ y $f : H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$, con $f(v) = v(0)$ para todo $v \in H^1(I)$.

1. Demostrar que $f \in (H^1(I))'$.

2. Probar que existe una única función u que verifica

$$(u,v)_{H^1(I)} = f(v) \quad \forall v \in H^1(I), \quad u \in H^1(I).$$

Determinar u.

3. Probar que $f \in H^{-1}(I)$ y hallar w tal que

$$(w,v)_{H_0^1(I)} = f(v) \quad \forall v \in H_0^1(I), \quad w \in H_0^1(I).$$

E 29. Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Sea $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$a(u,v) := \int_0^1 (u'v' + 2xu'v + 3uv)\, dx$$

1. Demostrar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es continua y coerciva en $H^1(I)$.

2. Probar que existe una única función u que verifica

$$a(u,v) = v(0) + v(1) \quad \forall v \in H^1(I), \quad u \in H^1(I).$$

3. Concluir de manera razonada que $u \in C^\infty([0,1])$ y es solución clásica de un problema de contorno que se determinará.

E 30. Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Sea $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) := \int_I (u'v' + uv)\,dx + ku(0)v(0),$$

con $k > -1$ fijado. Se considera el siguiente subespacio cerrado de $H^1(I)$: $V := \{\, v \in H^1(I) : v(1) = 0 \,\}$.

1. Demostrar que la forma $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en V.
2. Dada $f \in L^2(I)$, probar que existe una y sólo una u_f tal que

   $$a(u_f, v) = \int_I f\,v\,dx \quad \forall v \in V, \quad u_f \in V.$$

   Caracterizar u_f como solución de un problema de mínimos.
3. ¿ Qué se puede decir de u_f si $f \in C^0(\overline{I})$? Caracterizar en este caso u_f como solución clásica de un problema de contorno.

E 31. Se define $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(0,1) \times H^1(0,1) \mapsto \mathbb{R}$ como

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx - \left(\int_0^1 u\,dx\right)\left(\int_0^1 v\,dx\right)$$

para $u, v \in H^1(0,1)$. Por otra parte, para una constante $k \neq 1$ fija, ponemos $V = \{\, v \in H^1(0,1) : v(0) = kv(1) \,\}$.

1. Demostrar que existe una constante $C_0 > 0$ tal que

   $$\|v\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_0 \|v'\|_{L^2(0,1)} \ \forall v \in V$$

   y que existe otra constante $C_1 > 0$ tal que

   $$\|v\|_{H^1(0,1)} \leq C_1 \|v'\|_{L^2(0,1)} \ \forall v \in V.$$

2. Probar que, cualquiera que sea $f \in L^2(0,1)$, existe una única u_f con la propiedad de que

   $$a(u_f, v) = \int_I f\,v\,dx \quad \forall v \in V, \quad u_f \in V.$$

3. Probar que, si $f \in C^0([0,1])$, entonces $u_f \in C^2([0,1])$. Caracterizar el problema de contorno que satisface u_f, así como el problema de mínimos asociado.

E 32. Sean $I = (1,3) \subset \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$ la forma bilineal continua definida por

$$a(u,v) = \int_1^3 \left[t^2 u'(t)v'(t) + tu'(t)v(t) + 4u(t)v(t)\right]\,dt \quad \forall u, v \in H^1(I).$$

Se pide:

1. Demostrar que la forma $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva sobre $H^1(I)$.
2. Demostrar que existe una única solución del problema

   $$a(u,v) = \frac{9}{2}v(3) - \frac{1}{6}v(1) + \int_1^3 v(t)\,dt \quad \forall v \in H^1(I), \quad u \in H^1(I). \tag{3}$$

3. Demostrar que la solución u de (3) pertenece a $C^\infty(\overline{I})$ y es solución clásica de un problema de contorno que se determinará.

E 33. Sea $V = \{\, v \in H^1(0,1) : v(0) = 0 \,\}$ y consideremos la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ sobre V definida por

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(t)v'(t)dt - \frac{1}{2}u(1)v(1) \quad \forall u,v \in H^1(0,1).$$

Se pide:

1. Probar que para toda $v \in V$ se tiene que $\|v\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|v'\|^2_{L^2(0,1)}$
2. Sea $f \in L^2(0,1)$. Demostrar que existe una y sólo una solución del problema

   (PV) $\qquad$ Hallar $u \in V$ tal que $a(u,v) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, v'(t)\, dt \quad \forall v \in V$

   y que, para dicha solución, se tiene $\|u\|_{C^0([0,1])} \leq 2\|f\|_{L^2(0,1)}$.
3. Caracterizar la solución u del problema (PV) como solución de un problema de mínimos.
4. Probar que, si $f \in C^1([0,1])$, entonces la solución u de (PV) pertenece a $C^2([0,1])$. Obtener el problema de contorno del cual u es solución.

E 34. Sean $I = (1,2) \subset \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) = \int_1^2 (u'(t)v'(t) + tu'(t)v(t) + 2u(t)v(t))\, dt \quad \forall u,v \in H^1(I).$$

1. Demostrar que la forma $a(\cdot\,,\cdot)$ es continua y coerciva sobre $H^1(I)$.
2. Demostrar que existe una y sólo una solución del problema

$$a(u,v) = v(1) + \int_1^2 v(t)\, dt \quad \forall v \in H^1(I) \quad u \in H^1(I). \tag{4}$$

3. Demostrar que la solución u de (4) pertenece a $C^2(\overline{I})$ y determinar el problema de contorno del que u es solución clásica.

E 35. Sea $i \in \{1, ..., N\}$. Se pide:

1. Probar que si $a \in C^1(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega a(x)\, \varphi(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_i a(x)\, \varphi^2(x)\, dx \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega).$$

2. Probar que si $a \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $\partial_i a \in L^\infty(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega a(x)\, u(x)\, \partial_i u(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_i a(x)\, u^2(x)\, dx \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

E 36. Sea $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0,1)$.

1. Demostrar que toda $u \in H^1_0(\Omega)$ verifica $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_3 u\|_{L^2(\Omega)}$.
2. Demostrar que la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot) : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega x_3\, v\, \partial_3 u\, dx$$

   es continua y coerciva en $H^1_0(\Omega)$.
3. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dada. Demostrar de manera razonada que existe una única $u \in H^1_0(\Omega)$ que verifica

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega x_3\, v\, \partial_3 u\, dx = \int_\Omega x_3\, f(x_1,x_2)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

4. Acotar la norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ en función de $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

5. Caracterizar u como solución de un problema de contorno.

E 37. Para $\Omega = (-1,1) \times \mathbb{R}^2$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se considera la forma bilineal continua $a(\cdot\,,\cdot)$ definida por

$$a(u,v) := 9 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \sqrt{2(x_1+3)}\, u\, \partial_1 v \, dx - \beta \int_\Omega u\, v\, dx$$

1. Demostrar que $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 4\|\partial_1 u\|^2_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H^1_0(\Omega)$.

2. Demostrar que si $\beta < 2$ la forma bilineal es coerciva en $H^1_0(\Omega)$ y, para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H^1_0(\Omega)$ tal que
$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

3. Caracterizar u como solución de un problema de contorno.

E 38. Sean $\Omega = (-1,1)^N \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (x \cdot \nabla u) v \, dx + \gamma \int_\Omega uv \, dx.$$

1. Usando la desigualdad de Poincaré en $H^1_0(\Omega)$, probar que, para $\gamma > N/4$, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H^1_0(\Omega)$.

2. Probar que la función $g : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \sum_{i=1}^N |x_i|$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$, pertenece a $H^1(\Omega)$.

3. Probar que, para cada $\gamma > N/4$, existe una única u que verifica
$$a(u,v) = 0 \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad u \in g + H^1_0(\Omega).$$
Hallar una estimación de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ en función de $\|g\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$.

4. Caracterizar u como solución de un problema de contorno.

E 39. Sean $\Omega = B(0;1) \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega |x|(x \cdot \nabla v) u \, dx + \gamma \int_\Omega uv \, dx.$$

1. Probar que, para $\gamma > (N+1)/2$, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H^1_0(\Omega)$.

2. Probar que la función $g : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, dada por $g(x) \equiv |x|$, pertenece a $H^1(\Omega)$.

3. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Probar que para cada $\gamma > (N+1)/2$ existe una única u que verifica
$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad u \in g + H^1_0(\Omega).$$
Con $f(x) \equiv |x|$, hallar una estimación de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

4. Caracterizar u como solución de un problema de contorno.

E 40. Sean $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$, $K > 3$, $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma bilineal continua definida por

$$a(u,v) := \int_\Omega (K^2 \partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v + x_1 v \partial_1 u - uv) \, dx.$$

y g la función definida en Ω por $g(x_1,x_2) = x_2 \sin x_1$ si $x_1 > 0$, $g(x_1,x_2) = x_1$ si $x_1 \leq 0$.

1. Demostrar que $g \in H^1(\Omega)$.

2. Demostrar que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}$ para cada $v \in H^1_0(\Omega)$ y deducir que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva sobre $H^1_0(\Omega)$.

3. Demostrar de manera razonada que existe una y sólo una función u que verifica
$$a(u,v) = \int_\Omega x_1 v \, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad u \in g + H^1_0(\Omega).$$