ANÁLISIS FUNCIONAL Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

HOJA 3: TEORÍA ESPECTRAL Y APLICACIONES A LAS EDPs

E 1. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto no vacío.

1. Probar que K es compacto si y sólo si es *precompacto* (i.e. para todo $\varepsilon > 0$ exist un recubrimiento finito de K formado por bolas de radio ε) y completo.
2. Deducir que en todo espacio métrico completo un conjunto es relativamente compacto si y sólo si es precompacto.

E 2. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto no vacío. Pobar que K es relativamente compacto si y sólo si de toda sucesión en K se puede siempre extraer una subsucesión convergente.

E 3. Sea X un espacio de Banach. Probar que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. X es de dimensión finita.
2. La bola unidad B_X es relativamente compacta.
3. Todo acotado de X es relativamente compacto.

E 4. Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\{ u_n : n \geq 1 \}$ un sistema ortonormal de H, i.e. un conjunto numerable con la propiedad siguiente:

$$(u_n, u_m)_H = \delta_{nm} \quad \forall n, m \geq 1.$$

Probar lo siguiente:

1. Para cada $v \in H$, la serie $\sum_{n \geq 1} (v, u_n)_H \, u_n$ converge en H hacia un punto $\hat{v}$ que verifica
$$(\hat{v}, u_n)_H = (v, u_n)_H \quad \forall n \geq 1.$$
2. Para cada $v \in H$, la serie de términos positivos $\sum_{n \geq 1} |(v, u_n)_H|^2$ converge en $\mathbb{R}$ y además
$$\sum_{n \geq 1} |(v, u_n)_H|^2 \leq \|v\|_H^2$$
(desigualdad de Bessel).

E 5. Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\{ u_n : n \geq 1 \}$ un sistema ortonormal de H. Probar que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $\{ u_n : n \geq 1 \}$ es completo, i.e. el subespacio de H generado por los u_n es denso en H (se dice también que $\{ u_n : n \geq 1 \}$ es una *base ortonormal*).
2. Para cada $v \in H$, se tiene que
$$v = \sum_{n \geq 1} (v, u_n)_H u_n.$$
3. Para cada $v \in H$, se tiene que
$$\|v\|_H^2 = \sum_{n \geq 1} |(v, u_n)_H|^2$$
(identidad de Parseval).

E 6. Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\{ u_n : n \geq 1 \}$ un conjunto de H denso y numerable.

1. Construir un nuevo conjunto $\{ v_n : n \geq 1 \}$ denso y numerable con los v_n linealmente independientes.
2. Supongamos que los z_n y los w_n están dados como sigue:

(a) $z_1 = v_1$ y $w_1 = \|z_1\|_H^{-1} z_1$.

(b) Dados $n \geq 1$ y los $w_1, \dots, w_n$,

$$z_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (v_{n+1}, w_i)_H w_i, \quad w_{n+1} = \frac{1}{\|z_{n+1}\|_H} z_{n+1}.$$

Probar que $\{ w_n : n \geq 1 \}$ es una base ortonormal de H. El método de construcción de esta base se conoce como *procedimiento de Gram-Schmidt.*

E 7. Sean H y G dos espacios de Hilbert, con G separable y sea $T \in \mathcal{K}(H; G)$, Probar que existe una sucesión $\{T_n\}$ de operadores $T_n : H \mapsto G$ de rango finito que verifican

$$T_n \to T \text{ en } \mathcal{L}(H; G) \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Indicación: Téngase en cuenta que G posee una base ortonormal.

E 8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $1 < p < 2$ y $K \in L^{p'}((a,b) \times (a,b))$ (p' es el exponente conjugado de p). Se considera la aplicación $F_K : L^p(a,b) \mapsto L^p(a,b)$, definida por

$$F_K(\phi)(t) := \int_a^b K(t,s)\phi(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \quad \forall \phi \in L^p(a,b).$$

1. Probar que se trata de una aplicación bien definida, lineal y continua de $L^p(a,b)$ en sí mismo, con

$$\|F_K\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b))} \leq \|K\|_{L^{p'}((a,b)\times(a,b))}.$$

2. Probar que F_K es un operado lineal compacto.

E 9. Se considera el operador integral de Volterra $V_K \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$, donde (a,b) es un intervalo acotado y $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$. Probar que $V_K \in \mathcal{K}(L^2(a,b))$.

E 10. Hallar el operador adjunto del operador de inyección Id. : $H_0^1(0,1) \mapsto L^2(0,1)$.

E 11. Hallar el operador adjunto del operador *derivada* de $H_0^1(0,1)$ en $L^2(0,1)$. Hallar el núcleo y el rango del operador de derivación y de su adjunto. Comprobar las relaciones de ortogonalidad que se tienen entre estos subespacios.

E 12. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ y $\mu \in \sigma_c(T)$. Probar que

$$\inf_{v \in H, v \neq 0} \frac{\|(T - \mu \mathrm{Id.})v\|_H}{\|v\|_H} = \inf_{\|v\|_H = 1} \|(T - \mu \mathrm{Id.})v\|_H = 0.$$

E 13. Se considera el espacio de Hilbert ℓ^2 y el operador $T : \ell^2 \mapsto \ell^2$, con

$$T(\{x_1, x_2, \dots\}) = \{0, \varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \dots\} \quad \forall \{x_1, x_2, \dots\} \in \ell^2,$$

donde $\varepsilon_n := n^{-2}$. Probar que T está bien definido y es un operador lineal compacto. Probar también que $0 \in \sigma_r(T)$.

E 14. Sea $T : L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$ el operador definido por

$$Tf = u \iff u \in H_0^1(0,1), \int_0^1 u'v'\, dx = \int_0^1 fv\, dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Probar que T está bien definido y es un operador lineal compacto. Determinar $\sigma(T)$, $VP(T)$ y los espacios propios asociados. Probar también que $0 \in \sigma_c(T)$.

E 15. Se define el operador $T : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$ como sigue:

$$(Tv)(t) = v(0) + tv(1) \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall v \in C^0([0,1]).$$

Probar que $T \in \mathcal{K}(C^0([0,1]))$. Hallar su espectro, sus valores propios y los espacios propios asociados. En particular, compruébese que $0 \in VP(T)$.

E 16. Sea $T : L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(T\phi)(t) = t\phi(t) \quad t \in (0,1)\text{c.p.d.}, \quad \forall \phi \in L^2(0,1).$$

Probar que $T \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ es autoadjunto y no tiene valores propios. Hallar su espectro.

E 17. Se considera el operador $T : L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(T\phi)(t) = \int_0^1 (1 + \cos(\pi t)\sin(\pi s))\phi(s)ds \quad \text{c.p.d. } t \in [0,1], \quad \forall \phi \in L^2(0,1).$$

Probar que las ecuaciones $(\text{Id.} - T)\phi = 0$ y $(\text{Id.} - T^*)\phi = 0$ tienen soluciones no triviales en $L^2(0,1)$. ¿ Qué condiciones debe verificar $f \in L^2(0,1)$ para que la ecuación $(I - T)\phi = f$ tenga solución en $L^2(0,1)$?

E 18. Se considera el operador $T : C^0([-1,1]) \mapsto C^0([-1,1])$, definido como

$$(Tv)(t) = \int_{-1}^1 v(s)\,ds + v(1)t^3 \quad \forall t \in [-1,1], \quad \forall v \in C^0([-1,1]).$$

Demostrar que $T \in \mathcal{L}(C^0([-1,1]))$ y es compacto. Hallar el espectro y los autovalores de T, así como los espacios propios asociados y las dimensiones de éstos.

E 19. Se considera el operador $T : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$, definido como

$$(Tv)(t) = \int_0^1 v(s)\,ds \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall v \in C^0([0,1]).$$

Probar que $T \in \mathcal{K}(C^0([0,1]))$. Hallar su espectro, sus autovalores y los espacios propios asociados.

E 20. Se considera el operador $T : L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(T\phi)(t) = \int_0^1 K(t,s)\phi(s)\,ds \quad t \in (0,1)\text{c.p.d.}, \quad \forall \phi \in L^2(0,1),$$

donde

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t) & \text{si } 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}$$

Hallar los valores propios de T y los autoespacios asociados.

E 21. Se considera el operador $T : L^2(0,\pi) \mapsto L^2(0,\pi)$ definido por

$$(Tv)(t) = \int_0^\pi K(t,s)\,v(s)\,ds, \quad t \in (0,\pi) \text{ c.p.d.}, \quad \forall v \in L^2(0,\pi),$$

donde

$$K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s & \text{si } 0 \le s \le t \le \pi \\ \sin s \cos t & \text{si } 0 \le t \le s \le \pi \end{cases}$$

1. Probar que T es un operador compacto y autoadjunto en $L^2(0,\pi)$.
2. Hallar los valores propios de T y los subespacios asociados.
3. Sea $f(t) \equiv \sin(t/2)$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, discutir la existencia y unicidad de solución de

$$v - \lambda T v = f, \quad v \in L^2(0,\pi), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

E 22. Se considera el operador $T : L^2(-\pi,\pi) \mapsto L^2(-\pi,\pi)$, definido por

$$(Tv)(t) = \int_{-\pi}^\pi (\sin s + \sin t)\,v(s)\,ds \quad t \in (-\pi,\pi) \text{ c.p.d.}, \quad \forall v \in L^2(-\pi,\pi).$$

Demostrar que T satisface las hipótesis del teorema de Hilbert-Schmidt. Hallar el espectro y los autovalores del operador T definido en el apartado anterior. Determinar los espacios H_n que se obtienen al aplicar el teorema de Hilbert-Schmidt.

E 23. Probar que $(L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, donde $L^2(\Omega)$ queda identificado con un espacio de formas lineales continuas sobre $H_0^1(\Omega)$ del modo habitual, es un par de Lions.

E 24. Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$ y sea $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ un conjunto acotado que verifica4

$$\lim_{a\to 0}\left(\sup_{f\in B}\|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) = 0.$$

Probar que, para cada $f \in B$ y cada $n \geq 1$, $\|f * \rho_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{|a|\leq 1/n}\|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. Deducir que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \geq 1$ tal que $\|f * \rho_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$ para todo $f \in B$.

Sean $n \geq 1$ y $R > 0$ y consideremos el conjunto de las funciones

$$\hat{f} = f * \rho_n\Big|_{\overline{B}(0;R)}$$

donde $f \in B$. Probar que $\hat{B}$ es relativamente compacto en el espacio de Banach $C^0(\overline{B}(0;R))$.

E 25. Probar que $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ es relativamente compacto en $L^2(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si B es acotado,

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{f\in B}\int_{\{|x|>R\}}|f|^2\,dx\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{a\to 0}\left(\sup_{f\in B}\|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) = 0.$$

Indicación: Suponer en primer lugar que $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ es relativamente compacto, fijar $\varepsilon > 0$, deducir que $\overline{B}$ está contenido en una unión finita de bolas de radio ε y, de aquí, que existen $R_0 > 0$ y $\delta_0 > 0$ tales que, si $R \geq R_0$ y $|a| \leq \delta_0$,

$$\int_{|x|>R}|f|^2\,dx \leq 2\varepsilon^2 \quad \text{y} \quad \|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 3\varepsilon \quad \forall f \in B.$$

Recíprocamente, fijar $\varepsilon > 0$, $R > 0$ y $k \geq 1$ tales que

$$\int_{|x|>R}|f|^2\,dx \leq \varepsilon^2 \quad \text{y} \quad \|\rho_k * f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon \quad \forall f \in B.$$

Deducir que existe una familia finita de bolas de radio $\sqrt{5}\varepsilon$ que recubre $\overline{B}$.

E 26. Sea Ω acotado y supongamos que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, con inyección continua, donde $q > 1$. Probar que, para cada $p \in [1, q)$, la inyección $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacta.

E 27. Supongamos que $N = 2$, $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$. Se considera el siguiente problema para la EDP del calor bidimensional:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0, & (x,y,t) \in \Omega\times(0,T), \\ u = 0, & (x,y,t) \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \partial\Omega\times(0,\pi). \end{cases}$$

Obtener la solución débil como suma de una serie de funciones que converge en $L^2(\Omega)$ para cada t. Probar que esta función verifica la EDP y las condiciones de contorno precedentes en un sentido clásico.

E 28. Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in (0,\pi), \end{cases} \tag{1}$$

donde $u_0 \in H_0^1(0,\pi)$ y $u_1 \in L^2(0,\pi)$. Obtener explícitamente la candidata a solución en los conjuntos $Q_{0,0}$, $Q_{0,-1}$ y $Q_{1,0}$.

E 29. Se considera de nuevo el problema (1). Probar que, si los datos u_0 y u_1 verifican

$$u_0 \in C^2([0,\pi]), u_0(0) = u_0''(0) = u_0(\pi) = u_0''(\pi) = 0,$$
$$u_1 \in C^1([0,\pi]), u_1(0) = u_1(\pi) = 0,$$

entonces la candidata a solución es de hecho una solución clásica. Más precisamente, $u \in C^2([0,\pi]\times[0,+\infty))$ y

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in (0,\pi)\times(0,T),$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T),$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_x(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in [0,\pi].$$