ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y ANÁLISIS FUNCIONAL

Problemas complementarios, Tema 2

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ dos abiertos disjuntos no vacíos que verifican $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$ y $\alpha, \beta > 0$. Pongamos $m(x) = \alpha$ si $x \in \Omega_1$ y $m(x) = \beta$ si $x \in \Omega_2$.

   (a) Sea
   $$a(u,v) = \int_\Omega m(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$
   Probar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es una forma bilineal continua y coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$.

   (b) Deducir que, para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe una única u que verifica
   $$a(u,v) = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega).$$
   Obtener una estimación de $\|u\|_{H_0^1}$ en función de los datos Ω, f y α.

   (c) Interpretar u como solución débil de un problema de contorno. Hallar u en el caso particular en que $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, $\Omega_1 = (-1, 0)$, $\Omega_2 = (0, 1)$ y $f(x) = 1 + x$ para cada $x \in \Omega$.

2. Sea $\Omega = B(0; R) \subset \mathbb{R}^3$. Hallar las soluciones radiales no triviales del problema
   $$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$
   para los distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío de frontera regular, $f \in L^2(\Omega)$ y $m, b \in L^\infty(\Omega)$, con $m(x) \geq m_0 > 0$ y $|b(x)| \leq b_0$ y supongamos que $b_0^2 < 4m_0$.

   Para $u, v \in H^1(\Omega)$, pongamos
   $$a(u,v) = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v + b(x)\partial_1 u \, v + m(x) u \, v\right) \, dx, \quad \ell(v) = \int_\Omega f \, v \, dx$$

   (a) Probar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es una forma bilineal continua y coerciva sobre $H^1(\Omega)$.

   (b) Deducir que existe una única $u \in H^1(\Omega)$ que verfica $a(u,v) = \ell(v)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$ e interpretar u como solución de un problema de contorno.

4. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $m, c \in L^\infty(\Omega)$ con $m(x) \geq m_0 > 0$ y $c(x) \geq c_0 > 0$ c.p.d. y $f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$. Pongamos
   $$a(u,v) = \int_\Omega m(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(x) uv \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$
   y
   $$F(v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N f_i(x) \partial_i v \right) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

   (a) Probar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es una forma bilineal continua y coerciva sobre $H^1(\Omega)$. Deducir que existe una única u que verifica
   $$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega).$$
   Deducir también que existe una única u_0 que verifica
   $$a(u_0,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u_0 \in H_0^1(\Omega).$$

(b) ¿ De qué problemas de contorno son soluciones débiles u y u_0 ?

(c) Determinar u y u_0 en el caso particular en que $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $m \equiv c \equiv 1$, $f_0 \equiv 0$ y $f_1 \equiv -x$.

5. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$ con $\gamma\psi \leq 0$ y $K = \{ v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ c.p.d. en } \Omega \}$.

(a) Probar que K es un convexo cerrado no vacío de $H_0^1(\Omega)$.

(b) Supongamos que los $a_{ij} = a_{ji}, c \in L^\infty(\Omega)$, que se tiene la condición habitual de elipticidad uniforme para los a_{ij}, que $c \geq 0$ c.p.d. en Ω y que $f \in L^2(\Omega)$. Sean $a(\cdot\,,\cdot)$ y ℓ las formas bilineal y lineal asociadas a los coeficientes a_{ij} y c y a la función f, respectivamente. Probar que el siguiente problema posee solución única:

$$a(u, v - u) \geq \ell(v - u) \quad \forall v \in K, \quad u \in K.$$

(c) Determinar u en el caso particular siguiente: $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, $\psi(x) \equiv 1 - 2x^2$, $f(x) \equiv 0$,

$$a(u, v) = \int_{-1}^{1} (u'v' + 4uv)\, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

6. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $M > 0$ y $K = \{ v \in H_0^1(\Omega) : |\nabla v| \leq M \text{ c.p.d. en } \Omega \}$.

(a) Probar que K es un convexo cerrado no vacío de $H_0^1(\Omega)$.

(b) Supongamos que los $a_{ij} = a_{ji}, c \in L^\infty(\Omega)$, que se tiene la condición habitual de elipticidad uniforme para los a_{ij}, que $c \geq 0$ c.p.d. en Ω y que $f \in L^2(\Omega)$. Sean $a(\cdot\,,\cdot)$ y ℓ las formas bilineal y lineal asociadas a los coeficientes a_{ij} y c y a la función f, respectivamente. Probar que el siguiente problema posee solución única:

$$a(u, v - u) \geq \ell(v - u) \quad \forall v \in K, \quad u \in K.$$

(c) Determinar u cuando $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, $a(u, v) \equiv \int_{-1}^{1} u'v'\, dx$, $f(x) \equiv 2$ y $M = 2$, $M = 1$ ó $M = 1/2$.

7. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}$, con $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, siendo Γ_0 un abierto no vacío. Sea $V = \{ v \in H^1(\Omega) : \gamma v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \}$.

(a) Probar que V es un subsepacio cerrado no trivial de $H^1(\Omega)$ (y por tanto un nuevo espacio de Hilbert).

(b) Sean

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \alpha(x \cdot \nabla u)\, v + c(x)\, uv)\, dx \quad \forall u, v \in V,$$

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v\, dx \quad \forall v \in V,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $c \in L^\infty(\Omega)$ con $c \geq c_0 \geq 0$ c.p.d. y $f \in L^2(\Omega)$. Hallar condiciones sobre α y c_0 suficientes para que $a(\cdot\,,\cdot)$ sea coerciva en V.

Deducir que, en tales condiciones, existe una única solución del problema

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \quad u \in V$$

e interpretar la solución en términos de un problema de contorno para una EDP.

¿ Ocurre esto si $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_0 = \{0\}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $c_0 = 0$?

(c) Aalizar el caso particular en que $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_0 = \{0\}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $c \equiv 0$ y $f(x) \equiv 1$. Si es posible, hallar u.

8. Denotemos I el intervalo abierto $(1,2)$ y $a(\cdot\,,\cdot)$ la forma bilineal sobre $H^1(I)\times H^1(I)$ definida como

$$a(u,v) = \int_1^2 \left(u'(s)v'(s) + su'(s)v(s) + 2u(s)v(s)\right)\, ds.$$

Se pide:

(a) Demostrar que la forma $a(u,v)$ es continua y coerciva sobre $H^1(I)$.

(b) Demostrar que el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u \in H^1(I) \\ a(u,v) = \int_1^2 (2s^2-1)v(s)\, ds + 2v(2) - v(1) \quad \forall\, v \in H^1(I) \end{cases}$$

posee una y sólo una solución.

(c) Demostrar que la solución u de (P) pertenece a $C^2(\bar{I})$, y hallar el problema de contorno del que es solución clásica.

9. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo y acotado no vacío de frontera regular, $f \in L^2(\Omega)$ y $k \in \mathbb{R}$ y pongamos $a(u,v) = \int_\Omega \big((1+|x|^2)\nabla u \cdot \nabla v + kuv\big)\, dx$ y $\ell(v) = \int_\Omega fv\, dx$ para $u,v \in H^1(\Omega)$.

(a) Determinar para qué valores de k la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ es continua y coerciva sobre $H^1(\Omega)$ y para qué valores de k es continua y coerciva sobre $H^1_0(\Omega)$.

(b) Deducir cuando sea posible resultados de existencia y unicidad para los problemas

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega)$$

y

$$a(w,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad w \in H^1_0(\Omega)$$

e interpretar razonadamente u y w como soluciones de problemas de contorno para EDP elípticas de segundo orden.

(c) Calcular razonadamente u y w cuando $N=1$, $\Omega=(0,1)$, $k=0$ y $f(x)\equiv 1$.

10. Sean $\Omega = (-1,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $a(\cdot,\cdot)$ la forma definida sobre $H^1(\Omega)$ por

$$a(u,v) = \int_\Omega (5\,\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v + 2x_1 v \partial_1 u - uv)\, dx,$$

y g la función definida sobre Ω por $g(x_1,x_2) = x_1 + |x_2|$. Se pide:

(a) Probar que $g \in H^1(\Omega)$.

(b) Probar que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \le 2\|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}$ y que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|\partial_2 v\|_{L^2(\Omega)}$ $\forall v \in H^1_0(\Omega)$.

(c) Probar que $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva sobre $H^1_0(\Omega)$.

(d) Probar, de manera razonada, que existe una y sólo una solución u del problema

$$(PV) \qquad \text{Hallar } u \in g + H^1_0(\Omega) \text{ tal que } a(u,v) = \int_\Omega x_1^2 v\, dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

(e) Caracterizar u como solución débil de un problema de contorno.

11. Sean $I=(1,3)$, $V = \{v \in H^1(I) :\ v(3)=0\}$ y $a(\cdot,\cdot)$ la forma definida por

$$a(u,v) = \int_I (t+1)^2 u'(t)v'(t)\, dt - \frac{3}{2}u(1)v(1) \quad \forall u,v \in H^1(I).$$

Se pide:

(a) Probar que $|v(1)| \le \sqrt{2}\ \|v'\|_{L^2(I)}$ y $\|v\|_{L^2(I)} \le \sqrt{2}\ \|v'\|_{L^2(I)}$ para todo $v \in V$.

(b) Sea $g(t) = |t|$. Probar que $g \in H^1(I)$.

(c) Probar que el problema

$$(PV) \qquad \begin{cases} u \in V, \\ a(u,v) = \displaystyle\int_I g(t)v'(t)\,dt \quad \forall\, v \in V, \end{cases}$$

posee una y sólo una solución.

(d) Probar que la solución u de (PV) pertenece a $C^1(\bar{I})$ y caracterizarla como solución de un problema de contorno.

12. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo acotado no vacío de frontera regular, $f \in L^2(\Omega)$, $A \in \mathbb{R}$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v + (A\partial_1 u + 2\partial_2 u)v + 2uv\}\; dx$$

y

$$\ell(v) = \int_\Omega fv\,dx$$

para $u, v \in H^1(\Omega)$.

(a) Probar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$ para todo $A \in \mathbb{R}$.

(b) Probar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H^1(\Omega)$ para $A = 1$; de hecho, se puede probar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H^1(\Omega)$ para todo $A \in (-2, 2)$.

(c) Deducir resultados de existencia y unicidad para los problemas

$$(1) \qquad a(w,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad w \in H_0^1(\Omega)$$

y

$$(2) \qquad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega)$$

e interpretar razonadamente w y u como soluciones de apropiados problemas de contorno para una EDP elíptica de segundo orden.

13. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo acotado no vacío de frontera regular, $f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^2(\partial\Omega)$, $A \in \mathbb{R}$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v + A(\partial_1 u)v + uv\}\; dx \quad \text{y} \quad \ell(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} kv\,d\Gamma$$

para $u, v \in H^1(\Omega)$. Se pide:

(a) Probar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es una forma bilineal continua y ℓ es una forma lineal continua sobre $H^1(\Omega)$.

(b) Probar que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H^1(\Omega)$ para $A \in (-2, 2)$. ¿Es coerciva para $A = 2$? ¿Y para $A = -2$?

(c) Sea $A \in (-2, 2)$; deducir la existencia y unicidad de solución del problema

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega)$$

e interpretar razonadamente u como la solución de un problema de contorno para una EDP elíptica de segundo orden.