Sobre el operador de Volterra

1 El operador V_K. Primeras propiedades

Suponemos: $K \in L^2((a,b)\times(a,b))$.

Definición de V_K: Para cada $\phi \in L^2(a,b)$, ponemos

$$(V_K\phi)(t) = \int_a^t K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en} \quad (a,b) \quad \forall \phi \in L^2(a,b).$$

Por el teorema de Fubini, $s \mapsto K(t,s)\phi(s)$ es integrable para casi todo t (luego tiene sentido la integral) y la función $t \mapsto (V_K\phi)(t)$ es medible. Además,

$$|(V_K\phi)(t)|^2 \leq \left(\int_a^t |K(t,s)||\phi(s)|\,ds\right)^2 \leq \left(\int_a^t |K(t,s)|^2\,ds\right)\|\phi\|_{L^2}^2$$

y por tanto $V_K\phi \in L^2(a,b)$, con

$$\|V_K\phi\|_{L^2} \leq \|K\|_{L^2((a,b)\times(a,b))}\|\phi\|_{L^2} \quad \forall \phi \in L^2(a,b).$$

Esto prueba que el operador es lineal continuo de $L^2(a,b)$ en sí mismo.

2 Contractividad de V_K^m

Suponemos ahora: (a,b) es un intervalo acotado, $K \in L^\infty((a,b)\times(a,b))$. Pondremos $M := \|K\|_{L^\infty((a,b)\times(a,b))}$.

Veamos lo siguiente:

1. Para todo $m \geq 1$

$$V_K^m = V_{K_m}. \tag{1}$$

   Aquí,

$$K_1 = K \quad \text{y} \quad K_{m+1}(t,s) = \int_s^t K(t,\sigma)K_m(\sigma,s)\,ds \quad \forall s,t \in (a,b) \quad \forall m \geq 1.$$

2. Para cada $m \geq 1$,

$$|K_m(t,s)| \leq M\frac{(M\,|t-s|)^{m-1}}{(m-1)!} \qquad \forall s,t \in (a,b). \tag{2}$$

Una vez probado esto, tendremos

$$\|K_m\|_{L^\infty((a,b)\times(a,b))} \le M \frac{(M\,(b-a))^{m-1}}{(m-1)!}\,,$$

de donde

$$\begin{aligned}\|V_K^m\|_{\mathcal{L}(L^2(a,b))} &\le \|K_m\|_{L^2((a,b)\times(a,b))}\\ &\le (b-a)\|K_m\|_{L^\infty((a,b)\times(a,b))} \le \frac{(M\,(b-a))^m}{(m-1)!}\,.\end{aligned}$$

En particular, para m suficientemente grande, V_K^m será contractiva.
Probaremos (1)–(2) por inducción:

- Para $m=1$, (1)–(2) es evidente.
- Supongamos que (1) es cierto para $m=1,\dots,\ell-1$. Entonces

$$\begin{aligned}(V_K^\ell\phi)(t) = (V_K(V_K^{\ell-1}\phi))(t) &= \int_a^t K(t,s)(V_K^{\ell-1}\phi)(s)\,ds\\ &= \int_a^t K(t,s)\left(\int_a^s K_{\ell-1}(s,\sigma)\phi)(\sigma)\,d\sigma\right)ds\\ &= \int_a^t \left(\int_\sigma^t K(t,s)K_{\ell-1}(s,\sigma)\,ds\right)\phi)(\sigma)\,d\sigma\end{aligned}$$

  para casi todo t, de donde obtenemos (1) para $m=\ell$.
- Supongamos ahora que (2) es verdad para $m=1,\dots,\ell-1$. Entonces

$$\begin{aligned}|K_{\ell+1}(t,s)| &\le \left|\int_s^t |K(t,\sigma)|\,|K_\ell(\sigma,s)|\,d\sigma\right|\\ &\le M^\ell\left|\int_s^t \frac{(\sigma-s)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\,d\sigma\right|\\ &\le M\frac{(M(t-s))^\ell}{\ell!}\end{aligned}$$

  y también obtenemos (2) para $m=\ell$.

3 Consecuencia

Sea $f\in L^2(a,b)$ y consideremos la ecuación integral (llamada ecuación de Volterra de segunda especie)

$$\phi(t) - \int_a^t K(t,s)\phi(s)\,ds = f(t), \quad t\in(a,b) \quad \text{c.p.d.}, \quad \phi\in L^2(a,b).$$

Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\phi = \Lambda(\phi) := V_K\phi + f, \quad \phi\in L^2(a,b). \tag{3}$$

La aplicación $\Lambda : L^2(a,b)\mapsto L^2(a,b)$ está bien definida y es tal que Λ^m es contractiva para m suficientemente grande. En efecto,

$$\Lambda^m(\phi) = V_K^m\phi + f_m,$$

donde $f_m = V_K^{m-1}f + \cdots + V_Kf + f$. Luego (3) posee soución única.