Generalidades. Motivación del análisis numérico de ecuaciones diferenciales

Dpto. EDAN, Universidad de Sevilla

Introducción y motivación

Objetivo

Análisis numérico de problemas de Cauchy y de contorno para EDOs

Estudio de EDOs (y EDPs): importante rama del Análisis Matemático
Origen "extra-matemático":

- Fenómeno de la vida real (físico, químico, económico, biológico, etc.) que se desea comprender y describir
- Modelado con herramientas matemáticas a partir de principios físicos, químicos, etc. y resultados experimentales

Resulta: sistema con EDOs (o EDPs) + condiciones complementarias
Tareas a realizar:

- Análisis cualitativo: existencia (y/o unicidad), propiedades, etc.
- Cálculo de la(s) solución(es). Desgraciadamente, aproximado, objetivo perseguido por el Análisis Numérico

Introducción y motivación

Ejemplo

Evolución de una población en $[0, T]$ conocidos:
ritmo de reproducción, población máxima admisible, acción desde el exterior y población inicial

$$\begin{cases} y' = ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right) + u(t), \quad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Se puede:

- Probar la $\exists!$
- Analizar la regularidad y otras propiedades (a partir de las propiedades de u)
- Calcular aproximadamente y

Problema tipo

X, Y espacios de funciones (Banach o Hilbert, dimensión ∞)
$A : X \mapsto Y$ operador diferencial
$f \in Y$

(P) Hallar $u \in X$ tal que $Au = f$

Supongamos: $\exists$ solución de (P)
Para analizar numéricamente (P):

1. Formular los problemas aproximados - Para cada $h \in \mathcal{H}$, fijar X_h, Y_h (espacios de dimensión finita), $f_h \in Y_h$, $A_h : X_h \mapsto Y_h$

   (P_h) Hallar $u_h \in X_h$ tal que $A_h u_h = f_h$

   Aquí: $\mathcal{H} \to 0$, podemos tener $X_h \subset X$, $Y_h \subset Y$, o no!
2. Analizar los (P_h) - $\exists$, !, propiedades, caracterización, convergencia, estabilidad, ...
3. Resolver los (P_h) - Cálculo efectivo de u_h

Un ejemplo: método de Euler

Datos: $T > 0$, $f \in C^0([0,T] \times \mathbb{R})$ acotada, $y_0 \in \mathbb{R}$
$X = Y = C^0([0,T])$, espacio de Banach, $f = 0$, $A : X \mapsto X$, con

$$A(\varphi)(t) = \varphi(t) - \left(y_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))\, ds \right) \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \varphi \in X$$

Problemas aproximados - $h = T/N$ con $N = 1, 2, \dots$
Con N dado, ponemos:
$t_n = nh$, $n = 1, 2, \dots, N$;
$X_h = Y_h = \{$ funciones $\varphi_h \in X$ afines a trozos $\}$;
$f_h = 0$, $A_h : X_h \mapsto X_h$, con

$$\begin{cases} A_h(\varphi_h)(t_0) = 0 \\ A_h(\varphi_h)(t_{n+1}) = \varphi_h(t_{n+1}) - (\varphi_h(t_n) + hf(t_n, \varphi_h(t_n))), \quad 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

Para el estudio teórico del problema aproximado

Tres conceptos importantes, presentados con ambigüedad:

Definición (Convergencia)

$(P_h)_{h\geq 0}$ *es convergente a* (P) *si* $f_h \to f \Rightarrow u_h \to u$

Definición (Estabilidad)

$(P_h)_{h\geq 0}$ *es estable si pequeñas perturbaciones de* f_h *implican pequeñas perturbaciones de* u_h *uniformemente en* h

Definición (Consistencia)

$(P_h)_{h\geq 0}$ *es consistente si la solución exacta de* (P) *es solución aproximada de* (P_h)

Un resultado de carácter general (Lax):

Convergencia $\Leftrightarrow$ Consistencia + Estabilidad

Los problemas y métodos que estudiaremos:

- Problemas de Cauchy para SDOs, métodos de 1 paso, métodos de Runge-Kutta y otros
- Problemas de contorno SDOs, métodos de diferencias finitas
- Problemas de contorno para EDPs, métodos de diferencias finitas
- Problemas de contorno para EDPs, métodos de elementos finitos
- Problemas de Cauchy-contorno para EDPs de evolución, métodos compuestos de diferencias y elementos finitos