Introducción a la resolución numérica de problemas para ecuaciones diferenciales ordinarias (I)

Dpto. EDAN, Universidad de Sevilla

Problema de Cauchy para un SDO

Los datos:

$$I_0 = [t_0, t_0 + T],\ f \in C^0(I_0 \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m),\ y_0 \in \mathbb{R}^m$$

El problema:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in I_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Definición

$\varphi : I_0 \mapsto \mathbb{R}$ *es solución de* (1) *(a derecha de* t_0*) si*

$$\varphi \in C^1(I_0; \mathbb{R}^m),\ \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))\ \forall t \in I_0,\ \varphi(t_0) = y_0$$

Recordatorio (1)

- f continua, loc. Lipschitz. respecto de $y \Rightarrow \exists!$ solución local (definida en $[t_0, t_0+\varepsilon]$), $\exists!$ solución maximal $\varphi : [t_0, T_*) \mapsto \mathbb{R}^m$

Además, o bien $T_* = t_0 + T$, o bien $\limsup_{t\to T_*^-} |\varphi(t)| = +\infty$

- f continua, C^1 en $y \Rightarrow$ dependencia continua de φ respecto de datos $((t_0, y_0)$ y $f)$

- $f \in C^1(I_0 \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m) \Rightarrow \varphi \in C^2([t_0, T_*); \mathbb{R}^m)$
Además, $\varphi''(t) \equiv f^{(1)}(t, \varphi(t))$, con $f_i^{(1)} := \partial_t f_i + f_j \partial_{y_j} f_i$

- Más generalmente: $f \in C^k(I_0 \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m) \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}([t_0, T_*); \mathbb{R}^m)$
Además, $\varphi^{(k+1)}(t) \equiv f^{(k)}(t, \varphi(t))$, con

$$f^{(0)} := f, \quad f_i^{(k)} := \partial_t f_i^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{m} f_j \partial_{y_j} f_i^{(k-1)} \quad (k \geq 1)$$

Recordatorio (2)

- f continua, loc. Lipschitz. respecto de y, $|f| \leq K \Rightarrow \varphi$ está definida en todo I_0 y

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq K|t - s| \quad \forall t, s \in I_0$$

- f continua, glob. Lipschitz. respecto de y (cte. L) $\Rightarrow \varphi$ está definida en todo I_0 y

$$|\varphi(t) - y_0| \leq (t - t_0)\left(\max_{s \in I_0} |f(s, y_0)|\right) e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in I_0$$

En lo que sigue:

- f continua, global. Lipschitz. respecto de y (cte. L)
- Por tanto: I_0 está contenido en el intervalo de definición de φ

Descripción de los métodos de un paso

Por simplicidad, $m = 1$ (EDO). Formulación general:

$$(M1P) \qquad \begin{cases} y_0 \ \text{dado} \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \quad y_{n+1} = y_n + h_n\,\Phi(t_n, y_n, h_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

con $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, h^*] \to \mathbb{R}$ continua, $0 < h_n \leq h \leq h^*$

Ejemplos

$h_n = h = T/N$ *(paso uniforme)*

1 - Euler: $y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n)$
2 - Euler mejorado: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))\right)$
3 - Heun: $y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n))$

Consistencia

Definición (Consistencia)

Error de consistencia: $\varepsilon = (\varepsilon_n(\varphi))_{n=0}^{N-1}$ *con*

$$\varepsilon_n(\varphi) := \frac{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)}{h_n} - \Phi(t_n, \varphi(t_n), h_n).$$

$(M1P)$ *es consistente si* $\lim_{h\to 0} (\max_n |\varepsilon_n(\varphi)|) = 0$

Teorema (Condición suficiente de consistencia)

$\Phi(t, y, 0) \equiv f(t, y) \Rightarrow$ *(M1P) es consistente*

Recíproco cierto. Se usa: $\forall(\bar{t}, \bar{y})$ existe solución única en $[t_0, t_0 + T]$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(\bar{t}) = \bar{y} \end{array} \right.$$

Orden de consistencia

$$(M1P) \qquad \begin{cases} y_0 \ \text{dado} \\ y_{n+1} = y_n + h_n \, \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

con $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, h^*] \to \mathbb{R}$ continua, $h^* > 0$, $0 < h_n \leq h \leq h^*$

Definición

Recordemos: $\varepsilon_n(\varphi) := \dfrac{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)}{h_n} - \Phi(t_n, \varphi(t_n), h_n)$

$(M1P)$ es de orden de consistencia p si $\exists C$ (indep. de h) tal que

$$\max_n |\varepsilon_n(\varphi)| \leq C\, h^p$$

Condición suficiente para orden de consistencia p

Teorema

Suponemos: $f \in C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R})$, $\exists \frac{\partial \Phi}{\partial h}, \dots, \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}$ *y son continuas. Si*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Phi(t, y, 0) & \equiv & f(t, y) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) & \equiv & \dfrac{1}{2} f^{(1)}(t, y) \\ & \dots & \\ \dfrac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial h^{p-1}}(t, y, 0) & \equiv & \dfrac{1}{p} f^{(p-1)}(t, y) \\ \dfrac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y, 0) & \not\equiv & \dfrac{1}{p+1} f^{(p)}(t, y) \end{array} \right.$$

$(M1P)$ es de orden de consistencia exactamente igual a p

Recíproco cierto. Se usa: $\forall(\bar{t}, \bar{y})$ existe solución única en $[t_0, t_0 + T]$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(\bar{t}) = \bar{y} \end{array} \right.$$

Idea de la demostración:

Taylor $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(\varphi) &= \frac{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)}{h_n} - \Phi(h_n, \varphi(t_n), h_n) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} h_n^k \Psi_k(t_n, \varphi(t_n)) + O(h^p)\end{aligned}$$

con

$$\Psi_k(t,y) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k)}(t,y) - \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t,y,0)$$

Convergencia

Definición

Error de discretización: $e = (e_n(\varphi))_{n=0}^{N-1}$, *con* $e_n(\varphi) := \varphi(t_n) - y_n$
$(M1P)$ *es convergente si* $\lim_{h\to 0} \left(\max_n |e_n(\varphi)|\right) = 0$

Teorema

Suponemos: Φ *loc. Lipschitz,* $|y_n| \leq C \; \forall n$, *orden de consist.* $p \geq 1$
Entonces: esquema convergente, con orden de convergencia p, i.e.

$$\max_n |e_n(\varphi)| \leq \frac{\exp(T\Lambda_K) - 1}{\Lambda_K} Ch^p$$

Aquí: Λ_K *es una cte. de Lipschitz de* Φ *en un compacto* K *adecuado*

Idea de la demostración:

Por simplicidad: $h_n = h \, \forall n$

$$\begin{aligned} \varphi(t_{n+1}) &= \varphi(t_n) + h\Phi(t_n, \varphi(t_n), h) + h\varepsilon_n(\varphi) \\ y_{n+1} &= y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad e_{n+1}(\varphi) = e_n(\varphi) + h\left(\Phi(t_n, \varphi(t_n), h) - \Phi(t_n, y_n, h)\right) + h\varepsilon_n(\varphi) \\ &\Rightarrow \quad |e_{n+1}(\varphi)| \leq (1 + \Lambda_K h)\,|e_n(\varphi)| + Ch^{p+1} \\ &\Rightarrow \quad |e_n(\varphi)| \leq Ch^{p+1}\, \frac{e^{\Lambda_K T} - 1}{\Lambda_K h} \end{aligned}$$

K: compacto de $\mathbb{R}^3$ que contiene todos los $(t_n, \varphi(t_n), h)$ y (t_n, y_n, h)

Hemos usado:

$$a_0 = 0,\ a_{n+1} \leq (1 + Ah)a_n + B, \ \ a_n \geq 0 \ \ \forall n \ \Rightarrow \ a_n \leq \frac{e^{AT} - 1}{Ah}\ B \ \ \forall n$$

Estabilidad y expresión asintótica del error

Definición

$(M1P)$ es estable si $z_0 = y_0 + h_0\,\rho_0$,

$$y_{n+1} = y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n), \quad z_{n+1} = z_n + h_n\Phi(t_n, z_n, h_n) + h_n\,\rho_n$$

implican $\max_n |z_n - y_n| \leq C \max_n |\rho_n|$

Suponemos: $h_n = \theta(t_n)h + O(h^2)$ con $\theta : [t_0, t_0 + T] \mapsto (0, 1]$ Lipschitz

Teorema (Expresión asintótica del error)

Suponemos: $f, \Phi \in C^{p+1}$, $(M1P)$ estable, orden de consistencia p

Entonces: $e_n(\varphi) = \varphi(t_n) - y_n = h^p z_p(t_n) + O(h^{p+1})$, *con*

$$\begin{cases} z_p'(t) = \partial_y f(t, \varphi(t))z_p(t) + \Psi_p(t, \varphi(t))\theta(t)^p, & t \in [t_0, t_0 + T] \\ z_p(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Psi_p(t, y) := \frac{1}{(p+1)!} f^{(p)}(t, y) - \frac{1}{p!}\frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y, 0)$$

Idea de la demostración-1

Queremos probar: $\varphi(t_n) - h^p z_p(t_n) - y_n = O(h^{p+1})$

Pongamos $w_n = \varphi(t_n) - h^p z_p(t_n)$. Cuestión: ¿ $w_n - y_n = O(h^{p+1})$?

Para $\rho_n := \dfrac{w_{n+1} - w_n}{h_n} - \Phi(t_n, w_n, h_n)$, tenemos

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ w_{n+1} = w_n + h_n \Phi(t_n, w_n, h_n) + h_n\,\rho_n \end{cases}$$

Estabilidad $\Rightarrow$

$$\max_n |w_n - y_n| \leq C \max_n |\rho_n|$$

Todo se reduce a demostrar que

$$\max_n |\rho_n| = O(h^{p+1})$$

Idea de la demostración-2

Tenemos:

- Orden $p \Rightarrow \varepsilon_n(\varphi) = h_n^p \Psi_p(t_n, \varphi(t_n)) + O(h_h^{p+1})$ (Taylor)
- Además:

  a) $z_p(t+h) = z_p(t) + h z_p'(t) + hO(h)$

  b) $\varphi(t_n) - w_n = O(h^p) \;\Rightarrow\; \Phi(t_n, \varphi(t_n), h_n) - \Phi(t_n, w_n, h_n)$
  $= \partial_y f(t_n, \varphi(t_n))(\varphi(t_n) - w_n) + h_n O(h^p)$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
h_n\,\rho_n & = & w_{n+1} - w_n - h_n\,\Phi(t_n, w_n, h_n) \\
 & = & h_n\,\varepsilon_n(\varphi) - h^p[z_p(t_{n+1}) - z(t_n)] \\
 & & +h_n[\Phi(t_n, \varphi(t_n), h_n) - \Phi(t_n, w_n, h_n)] \\
 & = & h_n^{p+1}\psi_p(t_n, \varphi(t_n)) \\
 & & -h^p h_n\left(z_p'(t_n) - \partial_y f(t_n, \varphi(t_n)) z_p(t_n)\right) + h_n O(h^{p+1}) \\
 & = & h_n\,O(h^{p+1})
\end{array}
\right.
$$

Se ha usado: la definición de z_p y que $h_n = \theta(t_n)h + O(h^2)$

Casos particulares

- Método de Euler: consistente con orden 1 y estable.
- Método mejorado de Euler: consistente con orden 2 y estable.
- Método de Heun: consistente con orden 2 y estable.

Luego ...

Análisis de los errores de redondeo-1

Por simplicidad: Euler explícito con paso constante

Los verdaderos cálculos:

$$\begin{cases} y_0^* = \eta_h \\ y_{n+1}^* = y_n^* + h\, f(t_n, y_n^*) + h\, \mu_n + \rho_n \end{cases}$$

donde:

$|\mu_n| \leq \mu$ errores producidos en el cálculo de f

$|\rho_n| \leq \rho$ errores de redondeo

Pondremos: $e_n^* := \varphi(t_n) - y_n^*$

Se comprueba que

$$|e_n^*| = e^{LT} |e_0^*| + (Ch + \mu) \frac{e^{LT} - 1}{L} + \frac{\rho\, e^{LT}}{h} + O(h)$$

Cuando $h \to 0$:

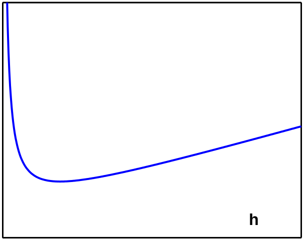
$$|e_n^*| \to e^{LT} |e_0^*| + \mu \frac{e^{LT} - 1}{L} + \lim_{h \to 0} \frac{\rho\, e^{LT}}{h}$$

Análisis de los errores de redondeo-2

Aceptamos: $|e_n^*| \leq \psi(h) := C_1 + C_2\, h + \rho \dfrac{C_3}{h}$

C_1: y_0 & f ($\approx 10^{-9}$); $C_2 h$: método ($\approx h$); $\rho C_3/h$: redondeo ($\approx 10^{-9}/h$)

Ponemos: $\bar{h} := \sqrt{\dfrac{\rho\, C_3}{C_2}}$ (mínimo de ψ)



Para $h = \bar{h}$: error del método $(C_2\, h) \approx$ error de redondeo $(\frac{\rho\, C_3}{h})$
No conviene $h < \bar{h}$!

Extrapolación de Richardson

Una aplicación de la expresión asintótica de e_n:
Suponemos $h_n = h$ $(\theta(t) \equiv 1)$
Ponemos $y(t; h)$: aprox. de $\varphi(t)$ con $(M1P)$ y paso h
Para τ en las particiones correspondientes a h y qh:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) - y(\tau; h) = h^p z_p(\tau) + O(h^{p+1}) \\ \varphi(\tau) - y(\tau; qh) = q^p\, h^p z_p(\tau) + O(q^{p+1}\, h^{p+1}) \end{cases}$$

Consecuencia: una aproximación de $\varphi(\tau)$ de orden $O(h^{p+1})$ es

$$y_R(\tau; h, qh) := \frac{q^p y(\tau; h) - y(\tau; qh)}{q^p - 1} = \varphi(\tau) + O(h^{p+1})$$

Casos particulares:

- Euler, $p = 1$: $y_R(\tau; h, qh) := \frac{q y(\tau;h) - y(\tau;qh)}{q-1} = \varphi(\tau) + O(h^2)$
- Euler mejorado, $p = 2$: $y_R(\tau; h, qh) := \frac{q^p y(\tau;h) - y(\tau;qh)}{q^2-1} = \varphi(\tau) + O(h^3)$

Control del paso-1

Para llegar de t_0 a $t_0 + T$, N pasos:

$$N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h_i}{h_i} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h_i}{h\theta(t_i)} + O(1) \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h_i}{\theta(t_i)} \to \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dt}{\theta(t)}$$

Tenemos $e_n(\varphi) = h^p z_p(t_n) + (\eta - \eta_h) z_0(t_n) + O(h^{p+1})$

Problema

Con N dado, elegir $\theta = \theta(t)$ (que determina la partición) tal que los valores $h^p z_p(t_n)$ se hagan mínimos

Se tiene

$$h^p z_p(t) \equiv z_0(t) \int_{t_0}^{t} \frac{\Psi_p(s, \varphi(s))(h\theta(s))^p}{z_0(s)} \, ds$$

Control del paso-2

Con $\xi = h\theta$, llegamos a un problema extremal:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \left| \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\Psi_p(s,\varphi(s))\xi^p}{z_0(s)}\, ds \right| \\ \text{Sujeto a} \;\; \xi \in C^0(I_0),\; \xi > 0,\; \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{ds}{\xi(s)} = M \in \mathbb{R} \text{ dado} \end{cases}$$

Se puede demostrar: si $\Psi_p(s,\varphi(s)) \neq 0$ en I_0, la única solución es

$\xi(t) = \lambda \left(\frac{z_0(t)}{|\Psi_p(t,\varphi(t))|} \right)^{1/p+1}$ con $\lambda = \frac{1}{M} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\frac{|\Psi_p(s,\varphi(s))|}{z_0(s)} \right)^{1/p+1} ds$

Algoritmos modernos: usan paso variable. Dos objetivos:

1. Minimizar coste de resolución
2. Detectar eventuales singularidades

$\exists$ varios procedimientos, todos basados en un estimación $\widetilde{\varepsilon}_n$ de ε_n, error de consistencia.

Métodos de Runge-Kutta

Fijamos c_i, a_{ij}, b_j para $1 \leq i, j \leq q$
Esquema general del método de Runge-Kutta de orden q:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{a) } y_0 \ \text{ dado} \\[2ex]
\text{b) } y_{n+1} = y_n + h_n \displaystyle\sum_{j=1}^{q} b_j f(t_{n,j}, y_{n,j}), \ \ \text{con} \\[2ex]
\qquad t_{n,j} = t_n + c_i h_n \quad i = 1, \ldots, q \\[2ex]
\qquad \{y_{n,j}\}_{i=1}^{q} \ \ \text{solución del sistema de } q \text{ equaciones} \\[2ex]
\qquad\qquad y_{n,i} = y_n + h_n \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad i = 1, \ldots, q
\end{array}
\right.
$$

Formulación matricial

Re-escritura:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n; h_n) \text{ con} \\ \Phi(t, y; h) \equiv \sum_{j=1}^{q} b_j f(t + c_j h, z_j), \quad z_i = y + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t + c_j h, z_j) \end{cases}$$

Se asocia la tabla

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_q & a_{q1} & \dots & a_{qq} \\ \hline & b_1 & \dots & b_q \end{array}$$

Casos particulares: Euler ($q = 1$), Euler mejorado y Heun ($q = 2$)

Métodos de Runge-Kutta explícitos e implícitos-1

Suponemos: $f \in C^0(I_0 \times \mathbb{R})$, glob. Lipschitz respecto de y, constante de Lipschitz $L > 0$, $h_n = h \; \forall n$ (por simplicidad)

Consideramos: Runge-Kutta de orden q

Definición (R-K explícito)

Método explícito: si $A = \{a_{ij}\}$ triangular inferior estricta ($a_{ij} = 0$ si $i \leq j$)

En tal caso: cálculo "inmediato" de los $y_{n,i}$

$$\begin{cases} y_{n,1} & = & y_n \\ y_{n,2} & = & y_n + h a_{21} f(t_{n,1}, y_{n,1}) \\ & \dots & \\ y_{n,i} & = & y_n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad \text{con } y_{n,j} \text{ ya conocidos} \\ & \dots & \end{cases}$$

Métodos de Runge-Kutta explícitos e implícitos-2

Definición (R-K semi-implícito)

Método semi-implícito: si $A = \{a_{ij}\}$ triangular inferior no estricta ($a_{ij} = 0$ si $i < j$)

Cálculo de los $y_{n,i}$ algo más complicado:

$$\begin{cases} y_{n,1} = y_n + h a_{11} f(t_{n,1}, y_{n,1}) & \text{ecuación en } y_{n,1} \\ y_{n,2} = y_n + h a_{21} f(t_{n,1}, y_{n,1}) + h a_{22} f(t_{n,2}, y_{n,2}) & \text{ecuación en } y_{n,2} \\ \quad\ldots \end{cases}$$

(sólo ecuaciones separadas para los $y_{n,i}$)

Definición (R-K implícito)

Si R-K no es explícito ni semi-implícito, se dice implícito

Orden de consistencia de los métodos de Runge-Kutta

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n; h_n) \ \text{ con} \\ \Phi(t, y; h) \equiv \sum_{j=1}^{q} b_j f(t + c_j h, z_j), \quad z_i = y + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t + c_j h, z_j) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_q \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorema (Caracterización de un orden ≤ 3)

1. R-K es de orden 1 $\Leftrightarrow b^t e = \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$
2. R-K es de orden 2 $\Leftrightarrow b^t e = 1, \quad b^t Ce = b^t Ae = 1/2$
3. R-K es de orden 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} b^t e = 1, \quad b^t Ce = b^t Ae = 1/2 \\ b^t C^2 e = b^t CAe = 1/3 \\ b^t ACe = b^t A^2 e = 1/6 \end{cases}$

Estabilidad de los métodos de Runge-Kutta-1

Notación: $A := (a_{ij})_{ij=1}^{q}$, $|A| := (|a_{ij}|)_{ij=1}^{q}$

Teorema

1. $hL\rho(|A|) < 1 \Rightarrow$ *R-K bien definido* (*$\exists!$ solución de cada sistema)*
2. *Si, además, $h^* L\rho(|A|) < 1$, R-K es estable $\forall 0 < h < h^*$*

Idea de la Demostración: Ponemos $\Lambda : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^q$, con

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}, |Y| = \begin{bmatrix} |y_1| \\ \vdots \\ |y_q| \end{bmatrix}, \Lambda(Y) = \begin{bmatrix} \vartheta_1(Y) \\ \vdots \\ \vartheta_q(Y) \end{bmatrix},$$

$$\vartheta_i(Y) = \overline{y}_i + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t + c_j h, y_j) \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, q$$

¿$\exists$! $Y \in \mathbb{R}^q$ tal que $\Lambda(Y) = Y$?

Estabilidad de los métodos de Runge-Kutta-2

$$\vartheta_i(Y) = \overline{y}_i + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t + c_j h, y_j) \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, q \quad |A| = (|a_{ij}|)_{ij=1}^{q}$$

- $$|\vartheta_i(Y) - \vartheta_i(Z)| \leq hL \sum_{i=1}^{q} |a_{ij}|\,|y_j - z_j| = hL(|A||Y - Z|)_i$$
- Notación: $Y \leq Z \Longleftrightarrow y_i \leq z_i\ \forall i = 1, \ldots, q$
  Entonces:
  $$|\Lambda(Y) - \Lambda(Z)| \leq hL|A||Y - Z|$$
- Cálculos apropiados $\Rightarrow$
  $$\begin{array}{lcl} |\Lambda^2(Y) - \Lambda^2(Z)| & \leq & h^2L^2|A|^2|Y - Z|, \ldots \\ |\Lambda^n(Y) - \Lambda^n(Z)| & \leq & h^nL^n|A|^n|Y - Z| \quad \Rightarrow \\ ||\Lambda^n(Y) - \Lambda^n(Z)||_\infty & \leq & ||h^nL^n|A|^n||_F|Y - Z| \end{array}$$
- $hL\rho(|A|) < 1$ & $\lim_{n\to\infty} ||B^k||^{1/k} = \rho(B)\ \forall\, B \Rightarrow \exists\, n_0$ tq
  $||h^nL^n|A|^n||_F = ||(hL|A|)^n||_F < 1 \Rightarrow \Lambda^n$ contractiva

Estabilidad de los métodos de Runge-Kutta-3

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n; h_n) \ \text{con} \\ \Phi(t, y; h) \equiv \sum_{j=1}^{q} b_j f(t + c_j h, z_j), \quad z_i = y + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t + c_j h, z_j) \end{cases}$$

Para estabilidad: basta comprobar que Φ es glob. Lipschitz respecto de y en $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, h^*]$

Consecuencia del Teorema (estabilidad de R-K explícitos)

Método de R-K explícito $\Rightarrow \rho(|A|) = 0$
Consecuencia: $h^* L \rho(|A|) < 1$ y método estable

Un caso particular

Por simplicidad, $h_n \equiv h$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \\ k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} k_1), \quad k_3 = f(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} k_2), \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + h\, k_3) \end{cases}$$

Explícito, consistente con orden 4, estable

Luego ...