Introducción a la resolución numérica de problemas para ecuaciones diferenciales ordinarias (II)

Dpto. EDAN, Universidad de Sevilla

Deducción de los métodos de Adams

$f \in C^0(I_0 \times \mathbb{R})$ glob. Lipschitz respecto de y, constante L

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in I_0 = [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$t_0 < t_1 \cdots < t_N = t_0 + T$: partición de I_0, $h_n = t_{n+1} - t_n$.

Métodos de Adams:

Basados en

$$\varphi(t_{n+1}) = \varphi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \varphi(t))\, dt \approx \varphi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_n(t)\, dt$$

donde P_n es un polinomio de interpolación de $f(t, \varphi(t))$

El esquema resultante:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_n(t)\, dt$$

El método de Adams-Bashford con $(r+1)$ pasos

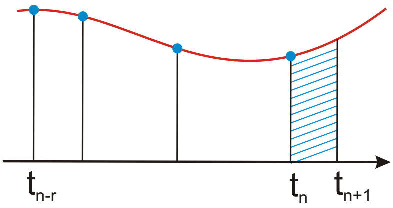
$r \geq 1$: entero dado

Suponemos dadas aproximaciones $f_{n-i} \approx f(t_{n-i}, \varphi(t_{n-i}))$, $0 \leq i \leq r$

Adams-Bashford

$P_n(t) = P_{n,r}(t)$: polinomio de interpolación de grado r de los (t_{n-i}, f_{n-i})

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_{n,r}(t)\, dt$$



El esquema:

$$P_{n,r}(t) = \sum_{i=0}^{r} f_{n-i}\, L_{n,i,r}(t), \quad \text{con} \quad L_{n,i,r}(t) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{r} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}}$$

Esquema de Adams-Bashford con $(r+1)$ pasos:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \displaystyle\sum_{i=0}^{r} B_{n,i,r}\, f_{n-i}, \quad B_{n,i,r} = \frac{1}{h_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}(t)\, dt \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

Para arrancar: cálculo previo de y_r , f_0 , f_1 , $\cdots f_r$
(por ejemplo, con un método de 1 paso)

El caso de paso constante:

Suponemos: $h_n = h$, $t_{n-i} = t_n - ih$. Entonces:

$$L_{n,i,r}(t) = \ell_{i,r}\left(\frac{t - t_n}{h}\right), \quad \ell_{i,r}(s) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{r} \frac{s+j}{j-i}$$

El esquema de Adams-Bashford con $(r+1)$ pasos queda así:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{r} b_{i,r}\, f_{n-i}, \quad b_{i,r} = \int_0^1 \ell_{i,r}(s)\, ds \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

El método de Adams-Moulton con $(r+1)$ pasos

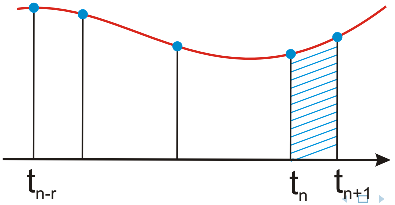
Ahora: aproximaciones $f_{n-i} \approx f(t_{n-i}, \varphi(t_{n-i}))$ $(0 \leq i \leq r)$
y $f_{n+1} \approx f(t_{n+1}, \varphi(t_{n+1}))$ (desconocido)

Adams-Moulton

$P_n(t) = Q_{n,r}(t)$: polinomio de interpolación de grado $r+1$ asociado a los (t_{n-i}, f_{n-i}) y a (t_{n+1}, f_{n+1}) (método implícito)

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} Q_{n,r}(t)\, dt$$

De nuevo, para arrancar, cálculo previo de y_r , f_0 , f_1 , $\cdots$ f_r



El esquema:

Tenemos:

$$Q_{n,r}(t) = \sum_{i=-1}^{r} f_{n-i} L_{n+1,i+1,r+1}(t) \ \ \forall\, i = -1, 0, \ldots, r$$

$$L_{n+1,i+1,r+1}(t) = \prod_{j=0,\, j\neq i+1}^{r+1} \frac{t - t_{n+1-j}}{t_{n-i} - t_{n+1-j}}$$

Esquema de Adams-Moulton con $(r+1)$ pasos:

$$\begin{cases} y_{n+1} - h_n B^* f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h_n \sum_{i=0}^{r} B^*_{n,i,r}\, f_{n-i} \\ (B^*_{n,i,r} = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n+1,i+1,r+1}(t)\, dt, \quad B^* = B^*_{n,-1,r}) \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

Para $hB^* L < 1$, bien definido

El caso de paso constante:

Suponemos: $h_n = h$, $t_{n-i} = t_n - ih$. Entonces:

$$L_{n+1,i+1,r}(t) = \ell_{i+1,r}\left(\frac{t - t_n + 1}{h}\right), \quad \ell_{i+1,r}(s) = \prod_{j=0,\, j\neq i+1}^{r+1} \frac{s+j}{j-i-1}$$

El esquema de Adams-Moulton con $(r+1)$ pasos queda así:

$$\begin{cases} y_{n+1} - hb^* f_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=0}^{r} b^*_{i,r}\, f_{n-i} \\ b^*_{i,r} &= \int_0^1 \ell_{i+1,r+1}(s)\, ds, \quad b^* = b^*_{-1,r} \\ f_{n+1} &= f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

La estrategia predictor-corrector

Formulación general de un método de Adams:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=-1}^{r_n} B_{n,i} f_{n-i} \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

con $0 \leq r_n \leq r$.

- Adams-Bashford (AB): $r_n = r$, $B_{n,-1} = 0, \quad B_{n,i} = B_{n,i,r}$
- Adams-Moulton (AM): $r_n = r$, $B_{n,i} = B^*_{n,i,r}$

Para cada r: (AM) es más estable y de mayor orden que (AB), pero más costoso (implícito)

La estrategia predictor-corrector

Suponemos dados y_n y f_{n-i}, $i = 0, 1, \ldots, r$; por comodidad: suprimimos el subíndice n

y_{n+1} es sol de

$$y = y_n + hB^*_{-1,r} f(t_{n+1}, y) + h \sum_{i=0}^{r} B^*_{i,r} f_{n-i} \quad \text{(AM)}$$

Una manera de calcular y_{n+1}: aproximaciones sucesivas

- Inicializar con $y^{(0)}_{n+1}$, $f^{(0)}_{n+1} = f(t_{n+1}, y^{(0)}_{n+1})$ (AB)
- Dados $k \geq 0$, $y^{(k)}_{n+1}$, $f^{(k)}_{n+1}$, calcular

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y^{(k)}_{n+1} & = & y_n + hB^*_{-1,r} f^{(k)}_{n+1} + h \sum_{i=0}^{r} B^*_{i,r} f_{n-i} \\ f^{(k+1)}_{n+1} & = & f(t_{n+1}, y^{(k+1)}_{n+1}) \end{array} \right.$$

Para los $y^{(k)}_{n+1}$ se tiene:

$$|y_{n+1} - y^{(k)}_{n+1}| \leq (h|B^*_{-1,r}|L)^k |y_{n+1} - y^{(0)}_{n+1}|$$

También posible: acelerar convergencia (Aitken, Steffensen, . . .)