Introducción a la resolución numérica de problemas para ecuaciones en derivadas parciales (I)

Dpto. EDAN, Universidad de Sevilla

Recordatorio (I)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado no vacío, $\partial\Omega \in C^{0,1}$
$a_{ij}, b_i, c \in C^0(\overline{\Omega})$, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $g \in C^0(\partial\Omega)$

El problema de Dirichlet para una EDP elíptica:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Se dice que $\mathcal{L}$ es uniformemente elíptico si

$$\exists \alpha^* > 0 \text{ con } \sum_{ij=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha^*|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega$$

Teorema (Existencia y unicidad)

Suponemos: $f \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ *y acotada,* $\alpha \in (0,1]$, $g \in C^0(\partial\Omega)$,
$a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\mathcal{L}$ *uniformemente elíptico,* $c \geq 0$
Entonces: $\exists!$ *solución* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

Recordatorio (II)

En lo que sigue: los a_{ij}, b_i, c y $\mathcal{L}$ como antes

Teorema (Principio del máximo débil)

Suponemos: $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\mathcal{L}u \leq 0$ *en* Ω

Entonces: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

Corolario

Suponemos: $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\mathcal{L}u \leq 0$ en Ω, $u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$

Entonces: $u \leq 0$ en Ω

Si Ω es conexo, algo más:

Teorema (Principio del máximo fuerte)

Suponemos: mismas condiciones para u, Ω *conexo*

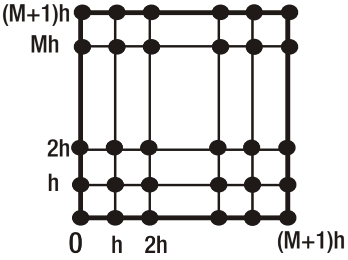
Entonces: o bien u es constante, o bien $u(x) < \max_{\partial\Omega} u \;\; \forall x \in \Omega$

El problema de Poisson-Dirichlet en un cuadrado

Suponemos: $N=2$, $\Omega=(0,1)\times(0,1)$, $f\in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ y acotada, $\alpha\in(0,1]$, $g\in C^0(\partial\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x\in\Omega \\ u=g(x), & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Fijamos $M\geq 1$ entero, $h=1/(M+1)$, $x_{ij}=(ih,jh)$, $ij=0,1,\dots,M+1$
$(M+2)^2$ nodos en la malla, M^2 de ellos internos

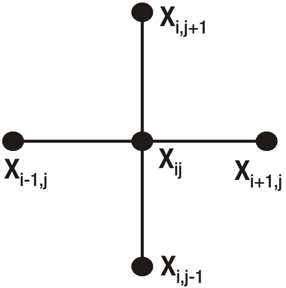


Resolución del problema de Dirichlet

El método habitual de diferencias finitas:

- Escribimos la EDP y la condición de contorno en los x_{ij}:
  $-\Delta u(x_{ij}) = f(x_{ij}),\ i, j = 1, 2, \dots, M$
  $u(x_{ij}) = g(x_{ij})$ para $i = 0, M+1$ y para $j = 0, M+1$
- Buscamos $u_{ij} \approx u(x_{ij})$ imponiendo igualdades aproximadas:
  "Aproximación de $-\Delta u(x_{ij})$" $= f(x_{ij}),\ i, j = 1, 2, \dots, M$
  $u_{ij} = g(x_{ij})$ para $i = 0, M+1$ y para $j = 0, M+1$

La aproximación en x_{ij} usa el valor en x_{ij} y puntos adyacentes



Aproximación del operador de Laplace

Si u es regular, Taylor:

$$
\begin{aligned}
u(x_{i+1,j}) &= u(x_{ij}) + h\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_{ij}) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{ij}) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^3}(x_{ij}) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(x_{ij}) + \dots \\
u(x_{i-1,j}) &= u(x_{ij}) - h\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_{ij}) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{ij}) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^3}(x_{ij}) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(x_{ij}) - \dots \\
u(x_{i,j+1}) &= u(x_{ij}) + h\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_{ij}) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{ij}) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x_2^3}(x_{ij}) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_{ij}) + \dots \\
u(x_{i,j-1}) &= u(x_{ij}) - h\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_{ij}) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{ij}) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x_2^3}(x_{ij}) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_{ij}) - \dots
\end{aligned}
$$

$$
-\Delta u(x_{ij}) \approx \frac{1}{h^2}\left[-u(x_{i-1,j}) - u(x_{i,j-1}) + 4u(x_{i,j}) - u(x_{i+1,j}) - u(x_{i,j+1})\right]
$$

$$
\frac{1}{h^2}\left[-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}\right] = f(x_{ij}), \quad i,j = 1,2\dots M
$$

Las incógnitas: u_{ij} con $i,j = 1,2\dots M$

$u_{ij} = g(x_{ij})$ para $i = 0, M+1$ y para $j = 0, M+1$ (conocidos)

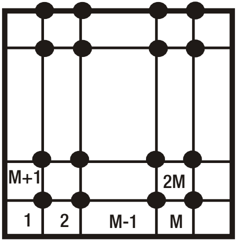
El sistema lineal resultante

$$\left\{\begin{array}{l}
4u_{11}-u_{21}-u_{12}=h^2f_{11}+g_{01}+g_{10}\\
-u_{i-1,1}+4u_{i1}-u_{i+1,1}-u_{i2}=h^2f_{i1}+g_{i0}, \quad i=2,3,\ldots,M-1\\
-u_{M-1,1}+4u_{M1}-u_{M2}=h^2f_{M1}+g_{M0}+g_{M+1,1}\\
\ldots\ldots\ldots\\
-u_{1,j-1}+4u_{1j}-u_{2j}-u_{1,j+1}=h^2f_{1j}+g_{0j}\\
-u_{i-1,j}-u_{i,j-1}+4u_{ij}-u_{i+1,j}-u_{i,j+1}=h^2f_{ij}, \quad i=2,3,\ldots,M-1\\
-u_{M-1,j}-u_{M,j-1}+4u_{Mj}-u_{M,j+1}=h^2f_{Mj}+g_{M+1,j}\\
\ldots\ldots\ldots\\
-u_{1,M-1}+4u_{1M}-u_{2M}=h^2f_{1j}+g_{0M}+g_{1,M+1}\\
-u_{i-1,M}-u_{i,M-1}+4u_{iM}-u_{i+1,M}=h^2f_{iM}, \quad i=2,3,\ldots,M-1\\
-u_{M-1,M}-u_{M,M-1}+4u_{MM}=h^2f_{MM}+g_{M+1,M}+g_{M,M+1}
\end{array}\right.$$

(atención: $2\leq j\leq M-1$)

Orden natural y escritura matricial

$$(u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{M1}, u_{12}, u_{22}, \ldots, u_{M2}, \ldots, u_{1M}, u_{2M}, \ldots, u_{MM})^t$$



Para $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{M^2})^t$ tenemos $Au = b$ con $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{M^2})$ simétrica, tridiagonal por bloques (bloques tridiagonales), def. positiva, $b \in \mathbb{R}^{M^2}$

Consecuencia: $\exists!$ sol. del problema aproximado

Otras condiciones de contorno: Neumann

De nuevo: $N = 2$, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $f \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ y acotada, $\alpha \in (0,1]$, $g \in C^0(\partial\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x), & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Se puede demostrar: $\exists!$ solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

Como antes: malla uniforme con paso $h = 1/(M+1)$, i.e. $(M+2)^2$ incógnitas $u_{ij} \approx u(x_{ij})$, $i, j = 0, 1, \ldots, M+1$

$$\frac{1}{h^2}\left[-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}\right] + u_{ij} = f(x_{ij}),\ \ i, j = 0, 1 \ldots M+1$$

Aparecen incógnitas “extra”

Se eliminan usando las condiciones de contorno

Eliminación de incógnitas "extra" para Neumann

- Por ejemplo, sobre $x_1 = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) \approx \frac{u(h, x_2) - u(-h, x_2)}{2h}$$

Las igualdades $\frac{\partial u}{\partial n}(x_{0j}) = g(x_{0j})$ se aproximan como sigue:

$$\frac{u_{-1,j} - u_{1,j}}{2h} = g_{0j}, \quad j = 1, \dots, M$$

$$\boxed{u_{-1,j} = u_{1j} + 2hg_{0j}, \forall j = 1, 2, \dots, M}$$

Procedimiento análogo sobre los otros lados ...

Neumann: el problema finito-dimensional

El orden natural:

$$(u_{01}, u_{11}, \dots, u_{M+1,1}, \dots, u_{0,M+1}, u_{1,M+1}, \dots, u_{M+1,M+1})^t$$

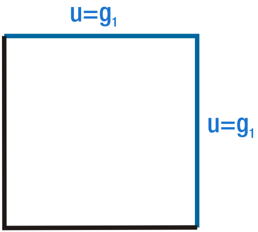
Para $u = (u_0, u_2, \dots, u_{(M+2)^2})^t$ tenemos de nuevo:
$Au = b$ con $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{(M+2)^2})$ simétrica, tridiagonal por bloques (bloques tridiagonales), def. positiva, $b \in \mathbb{R}^{(M+2)^2}$

Consecuencia: $\exists!$ sol. del problema aproximado

Otras condiciones de contorno: Dirichlet-Fourier

Procedimiento también válido (por ejemplo) para el problema de Dirichlet-Fourier

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u = g_1(x), & x \in \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u = g_2(x), & x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

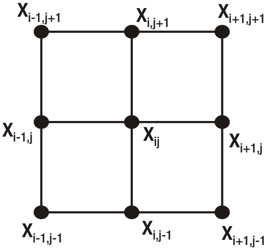


Otro operador de segundo orden

Suponemos: $N = 2$, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $a, b, c \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\mathcal{L}u \equiv -a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 2b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - c(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

(uniformemente elíptico)



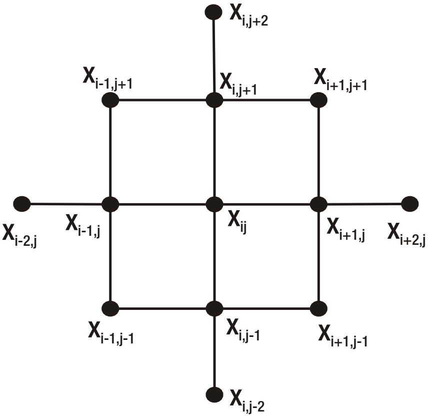
Aprox. de $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{ij})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_{ij})$: habitual

Aprox. de $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x_{ij})$: combinación lineal de 9 nodos, error $O(h^2)$

Un operador de cuarto orden

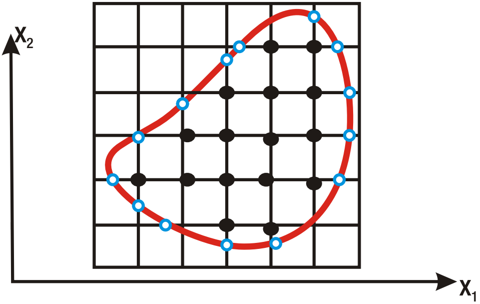
Suponemos: $N = 2$, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$$



El problema de Dirichlet en un dominio general

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$



Tratamiento especial en puntos “vecinos” de la frontera...