Introducción a la resolución numérica de problemas para ecuaciones en derivadas parciales (II)

Dpto. EDAN, Universidad de Sevilla

Teorema de Lax-Milgram

Datos:

- V: Hilbert
- $a(\cdot\,,\cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$: forma bilineal, continua y coerciva:
  - $\exists M > 0 : \ |a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \ \ \forall u, v \in V$
  - $\exists \alpha > 0 : \ a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \ \forall v \in V$
- $\ell \in V'$

Teorema (Lax-Milgram)

$\exists!$*u que verifica*

$$a(u,v) = \langle \ell, v\rangle \quad \forall v \in V, \quad u \in V$$

Además: si $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica, u es la única solución de

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \ell, u\rangle = \min_{v\in V}\left(\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \ell, v\rangle\right)$$

El espacio de Sobolev H^1

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto no vacío ($N \geq 1$)

Definición (Derivada generalizada)

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *posee* *derivada generalizada respecto de* x_i *si*

$$\exists v_i \in L^1_{loc}(\Omega) \ \textit{tal que} \ \int_\Omega v_i \varphi \, dx = -\int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) := \{ v \in L^2(\Omega) : \exists \partial_i v \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq N \}$$

- $\nabla v = (\partial_1, \ldots, \partial_N)$ es el gradiente de v
- $(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$ (producto escalar)
- $H^1(\Omega)$ Hilbert separable

Los espacios de Sobolev H^m y $W^{m,p}$

$m \geq 1$ entero, $1 \leq p \leq +\infty$

$$H^m(\Omega) := \{ v \in L^2(\Omega) : \exists \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq m \}$$
$$W^{m,p}(\Omega) := \{ v \in L^p(\Omega) : \exists \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq m \}$$

Tenemos:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$, $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots x_N^{\alpha_N}}$
- $(u, v)_{H^m} := \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}$ (producto escalar)
- $\|v\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$ si $1 \leq p < +\infty$ (norma)
  $\|v\|_{W^{m,\infty}} = \text{máx}_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty}$ (norma)
- $H^m(\Omega)$: Hilbert separable
  $W^{m,p}(\Omega)$: Banach (separable si $p < +\infty$)

Inyecciones de Sobolev

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto conexo, $\partial\Omega$ Lipschitz, $m \geq 0$ entero, $1 \leq p \leq +\infty$

Inyecciones continuas

$$
\begin{array}{lll}
W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), & \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} & \text{si } m < \frac{N}{p} \\
W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), & \forall q \in [1, +\infty) & \text{si } m = \frac{N}{p} \\
W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,m-N/p}(\overline{\Omega}), & & \text{si } \frac{N}{p} < m < \frac{N}{p} + 1 \\
W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), & \forall 0 < \alpha < 1 & \text{si } m = \frac{N}{p} + 1 \\
W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega}), & & \text{si } \frac{N}{p} + 1 < m
\end{array}
$$

Inyecciones compactas (Kondrachov); Ω acotado

$$
\begin{array}{lll}
W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega) & \forall 1 \leq q < p * \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} & m < \frac{N}{p} \\
W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega) & \forall q \in [1, +\infty) & m = \frac{N}{p} \\
W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0}(\overline{\Omega}) & & \frac{N}{p} < m
\end{array}
$$

El espacio de Sobolev H_0^1 — Trazas

$H_0^1(\Omega) :=$ adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$
Subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ (nuevo espacio de Hilbert)

Teorema (Trazas)

Suponemos: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto conexo acotado no vacío,* $\partial\Omega \in C^{0,1}$
Entonces: $\exists! \gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); L^2(\partial\Omega))$ *con*

$$\gamma(v) = v|_{\partial\Omega} \quad \forall v \in C_c^1(\overline{\Omega})$$

$Im(\gamma) \subset L^2(\partial\Omega)$ *(inclusión estricta),* $N(\gamma) = H_0^1(\Omega)$ *y*

$$\int_\Omega u \partial_i v \, dx = -\int_\Omega \partial_i u v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\gamma(v) n_i \, d\Gamma \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

El espacio H_0^1 — Desigualdad de Poincaré

Teorema (desigualdad de Poincaré)

Suponemos: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto no vacío, acotado al menos en una dirección*
Entonces: $\exists C > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \le C \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Un nuevo producto escalar en $H_0^1(\Omega)$, equivalente al usual:

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

El problema de Dirichlet para $-\Delta$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado no vacío, $f \in L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Problema variacional - Poisson-Dirichlet - solución débil

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Lax-Milgram $\Rightarrow \exists!$ solución (débil)

Si $f \in L^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$
u es solución clásica $\Leftrightarrow$ u es solución débil

Generalización: problema de Dirichlet, EDP elíptica

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu = f_0 - \sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i, & x \in \Omega \\ u = \widetilde{g}(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega),$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ c.p.d. en } \Omega,\ \alpha_0 > 0$$

$$c \in L^\infty(\Omega), c \geq 0 \quad \text{c.p.d. en } \Omega \quad f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega), \quad \widetilde{g} \in H^1(\Omega)$$

Problema variacional

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + cuv \Big)\, dx = \int_\Omega \Big(f_0 v + \sum_{i=1}^{N} f_i \partial_i v \Big)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Problema de Neumann para $-\Delta + 1$

$f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x), & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Problema variacional - Poisson-Neumann - solución débil

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx = \int_\Omega fv\, dx + \int_{\partial\Omega} hv\, d\Gamma \\ \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Lax-Milgram $\Rightarrow \exists!$ solución (débil)

Si $f \in L^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, $h \in C^1(\partial\Omega)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$
u es solución clásica $\Leftrightarrow$ u es solución débil

Problema mixto de Dirichlet-Neumann para $-\Delta$

$f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^2(\Gamma_1)$

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = k(x), & x \in \Gamma_1 \end{cases}$$

Problema variacional - Poisson-Dirichlet-Neumann - solución débil

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\Gamma_1} kv \, d\Gamma \\ \forall v \in V \end{cases}$$

$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}$

Lax-Milgram + generalización de Poincaré ($v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2}$ es una norma en V equivalente a la habitual) $\Rightarrow \exists!$ solución (débil)

Teoría abstracta de aproximación variacional

V: Hilbert, $a(\cdot\,,\cdot)$ bilineal, continua, coerciva, $\ell \in V'$

Problema (abstracto)

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Hallar } u \in V \textit{ tal que} \\ a(u,v) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

$V_h \subset V$, $dim\, V_h = I(h) < +\infty$, $h \in (0,1]$

Problema (aproximado)

$$(P_h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Hallar } u_h \in V_h \textit{ tal que} \\ a(u_h,v_h) = \langle \ell, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

Cuestiones:

- $\exists!$ solución de (P_h)? SI, Lax-Milgram
- Convergencia de u_h hacia u? SI, si $\bigcup_h V_h$ es denso en V

Resultados generales de convergencia

Teorema (Cea)

$$\|u - u_h\|_V \leq C\|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h$$

Corolario

Suponemos: $\exists$ *subespacio* $\mathcal{V} \subset V$*, denso en* V*, tal que* $\forall h\ \exists r_h : \mathcal{V} \mapsto V_h$ *con* $\lim_{h\to 0} \|v - r_h v\|_V = 0\ \forall v \in \mathcal{V}$
Entonces:

$$\lim_{h\to 0} ||u - u_h||_V = 0$$

Generalidades sobre los MEFs

Los espacios V_h deben cumplir buenas propiedades:

- Funciones de base $\varphi_i \in V_h$ sencillas (coeficientes $a(\varphi_i, \varphi_j)$ fácilmente calculables)
- Soportes de los φ_i pequeños (muchos $a(\varphi_i, \varphi_j)$ nulos, matriz hueca)
- Los $a(\varphi_i, \varphi_j) \neq 0$ cerca de la diagonal principal (numeración adecuada de los nodos; bajo coste computacional; matriz banda)
- Los V_h elegidos tales que $u_h \to u$, con buenas estimaciones del error

MEF es un procedimiento de construcción de familias de espacios V_h

Construcción de subespacios de dimensión finita (I)

Descomposición de Ω:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{r=1}^{R} \overline{\Omega_r}$$

con $\partial\Omega_r$ "regular", $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$, $\forall r \neq s$

Teorema

Suponemos: $u \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$, $u|_{\Omega_r} \in H^m(\Omega_r)$, $\forall r$
Entonces: $u \in H^m(\Omega)$

Construcción de subespacios de dimensión finita (I)

Definición (Triangulación)

Familia finita $\mathcal{T}_h = \{K_r\}_{r=1}^R$*, con los* K_r *cerrados no vacíos,* $\overline{\Omega} = \cup_r K_r$*,*
$K_i \neq K_j \Rightarrow \overset{\circ}{K_i} \cap \overset{\circ}{K_j} = \emptyset$

Para cada $K \in \mathcal{T}_h$: P_K es un espacio vectorial de funciones $p : K \mapsto \mathbb{R}$, con dim $P_K < +\infty$

1. Si los $P_K \subset H^1(\overset{\circ}{K})$, entonces

$$\begin{aligned} X_h &= \{v \in C^0(\overline{\Omega}), v|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega) \\ X_{0h} &= \{v \in X_h, v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega\} \subset H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

2. Si los $P_K \subset H^2(\overset{\circ}{K})$, entonces

$$\begin{aligned} X_h &:= \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^2(\Omega) \\ X_{0h} &:= \{v \in X_h : v = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ X_{00h} &:= \{v \in X_h : v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega\} \subset H_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

Grados de libertad. Unisolvencia

- P_K: espacio vectorial de funciones $p : K \mapsto \mathbb{R}$, con $\dim P_K < \infty$
- Σ_K: familia de formas lineales sobre P_K (grados de libertad):

$$\Sigma_K = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_M\}, \; \Phi_i \in P_K', \; i = 1, \ldots, M$$

Definición (Unisolvencia)

Σ_K es P_K-unisolvente si

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_M \in \mathbb{R} \;\; \exists! p \in P_K : \Phi_i(p) = \alpha_i \; \forall i$$

Definición (Elemento finito)

Terna (K, P_K, Σ_K) con Σ_K P_K-unisolvente

Grados de libertad. Unisolvencia

- Σ_K P_K-unisolvente $\Rightarrow$ $\dim P_K = M = \text{Card}\,\Sigma_K$
- Funciones de base (o de forma) de (K, P_K, Σ_K): las $p_1, \ldots, p_M$, definidas por $\Phi_i(p_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \ldots M$

Reformulación de la unisolvencia

$K \subset \mathbb{R}^N$: compacto con $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$; P_K: espacio de funciones $p : K \mapsto \mathbb{R}$
Suponemos: $dim\, P_K = M = Card(\Sigma_K)$
Entonces: Σ_K es P_K- unisolvente $\Leftrightarrow$ $T : p \in P_K \mapsto \{\Phi_i(p)\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M$ es biyectiva

N-símplex. Elementos finitos triangulares (Lagrange)

El elemento: $(K, P_\ell(K), \Sigma_\ell(K))$

- K es un $N-$ símplex de $\mathbb{R}^N$ de vértices $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jN}) \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \ldots, N+1$:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N : x = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1\}$$

Suponemos

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{N1} & a_{N+1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1N} & \ldots & a_{NN} & a_{N+1,N} \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\lambda_i(x)$: coordenadas baricéntricas de x $(\lambda_i(a_j) = \delta_{ij})$

N-símplex. Elementos finitos triangulares (Lagrange)

- $P_\ell(K)$: espacio vectorial de dimensión $\begin{pmatrix} N+\ell \\ \ell \end{pmatrix}$ de las funciones polinómicas de grado $\leq \ell$
- $\Sigma_\ell(K) = \{\Phi_1, \dots, \Phi_M\}$, con $\Phi_i(p) = p(c_i)$ $\forall i$,

$$\{c_1, \dots, c_M\} = \{x : \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{\ell}, \dots \frac{\ell - 1}{\ell}, 1\} \ \forall j\}$$

$$\sigma_0(K) := \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} a_i$$ es el baricentro de K

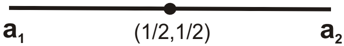
Veremos:

$\boxed{\text{Card } (\Sigma_\ell(K)) = \dim P_\ell(K)}$ y $\Sigma_\ell(K)$ es $P_\ell(K)$-unisolvente

Casos particulares: $N = 1$

K: segmento de extremos a_1 y a_2

- $\ell = 0$: $P_0(K) = \{p : p \equiv \text{cte.}\}$, $\dim P_0(K) = 1$,
  $\Sigma_0(K) = \{\frac{1}{2}(a_1 + a_2)\}$, Card $(\Sigma_0(K)) = 1$, $\quad p_1(x) \equiv 1$

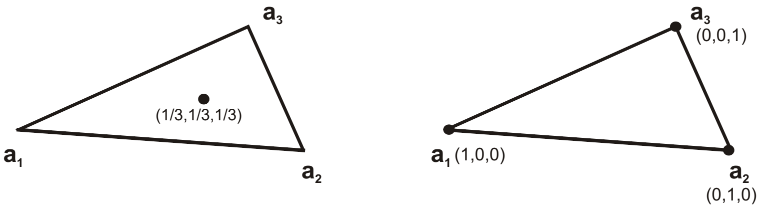


- $\ell = 1$: $P_1(K) = \{p : p \equiv C_1 x + C_2\}$, $\dim P_1(K) = 2$
  $\Sigma_1(K) = \{a_1, a_2\}$, Card $(\Sigma_1(K)) = 2$
  $p_1(x) \equiv \lambda_1(x)$, $p_2(x) \equiv \lambda_2(x)$

Casos particulares: $N = 2$

K: triángulo de vértices a_1 , a_2 y a_3

- $\ell = 0$: $P_0(K) = \{p : p \equiv \text{cte.}\}$, dim $P_0(K) = 1$,
  $\Sigma_0(K) = \{\frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)\}$, Card $(\Sigma_0(K)) = 1$, $\quad p_1(x) \equiv 1$

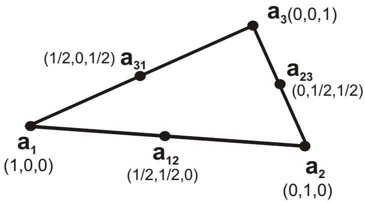


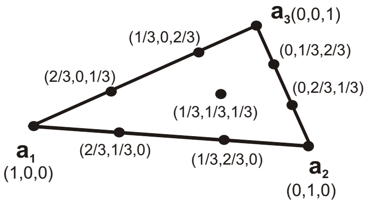
- $\ell = 1$: $P_1(K) = \{p : p \equiv C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3\}$, dim $P_1(K) = 3$
  $\Sigma_1(K) = \{a_1, a_2, a_3\}$, Card $(\Sigma_1(K)) = 3$
  $p_i(x) \equiv \lambda_i(x)$, i = 1,2,3

Casos particulares: $N = 2$

K: triángulo de vértices a_1, a_2 y a_3

- $\ell = 2$: $P_3(K) = \{p : K \mapsto \mathbb{R}, p \equiv$ función polinómica, grado $\leq 2\}$,
  dim $P_2(K) = 6$, $\Sigma_2(K) = \{a_i, \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \frac{1}{2}(a_1 + a_3), \frac{1}{2}(a_2 + a_3)\}$,
  Card $(\Sigma_2(K)) = 6$
  $p_i(x) \equiv \lambda_i(x)(2\lambda_i(x) - 1), i = 1, 2, 3,\ \ p_{jk}(x) \equiv 4\lambda_j(x)\lambda_k(x), j < k$



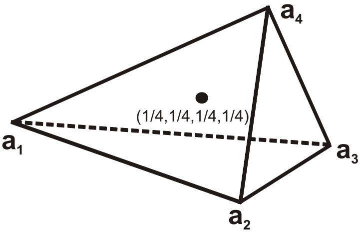


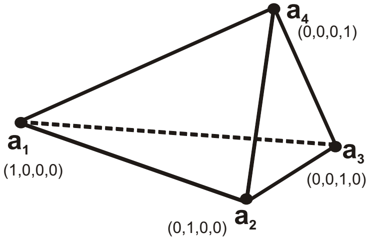
- $\ell = 3$: $P_3(K) = \{p : K \mapsto \mathbb{R}, p \equiv$ función polinómica, grado $\leq 3\}$,
  dim $P_3(K) = 10$, $\Sigma_3(K) = \{x : \lambda_j \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}, j = 1, 2, 3\}$,
  Card $(\Sigma_3(K)) = 10$

Casos particulares: $N = 3$

K: tetraedro de vértices a_1, a_2 ,a_3 y a_4

- $\ell = 0$: $P_0(K) = \{p : p \equiv \text{cte.}\}$, dim $P_0(K) = 1$,
  $\Sigma_0(K) = \{\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\}$, Card $(\Sigma_0(K)) = 1$, $p_1(x) \equiv 1$





- $\ell = 1$: $P_1(K) = \{p : p \equiv C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4\}$, dim $P_1(K) = 4$
  $\Sigma_1(K) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, Card $(\Sigma_1(K)) = 4$
  $p_i(x) \equiv \lambda_i(x)$, i = 1,2,3,4

Elemento finito P_ℓ-Lagrange

Teorema

$\Sigma_\ell(K)$ *es* $P_\ell(K)$*-unisolvente,* $\ell \geq 0$*.*
Consecuencia: $(K, P_\ell(K), \Sigma_\ell(K))$ *es un elemento finito* *(*P_ℓ*-Lagrange)*

Demostración:
Construimos las funciones de base $p_\mu \in P\ell(K)$, con $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{N+1})$, $0 \leq \mu_j \leq \ell$, $\sum_{j=1}^{N+1} \mu_j = \ell$:

$$p_\mu(x) = \left(\prod_{j=1}^{N+1} \mu_j! \right)^{-1} \prod_{j=1}^{N+1} \prod_{i=0}^{\mu_j - 1} (\ell\lambda(x) - i)$$

Aproximación interna de H^1 por P_ℓ-Lagrange

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado de frontera poliédrica,
$\mathcal{T}_h = \{K_r\}_{r=1}^R$ $(h \in (0,1])$ una triangulación de Ω:

- Todo $K \in \mathcal{T}_h$ es un $N-$ símplex con $\delta(K) \leq h$
- Si $K, K' \in \mathcal{T}_h$, $K \neq K'$, $\partial K \cap \partial K'$ es $m-$ símplex $(m < N)$ ó $\emptyset$

$X_h^\ell := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}, v_h|_K \in P_\ell(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega)$, dim $X_h^\ell < +\infty$
$\Sigma_h^\ell := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_\ell(K)$

Teorema

Entonces: dim X_h^ℓ = Card Σ_h^ℓ y toda $v_h \in X_h^\ell$ está unívocamente determinada por los $v_h(a)$, $a \in \Sigma_h^\ell$

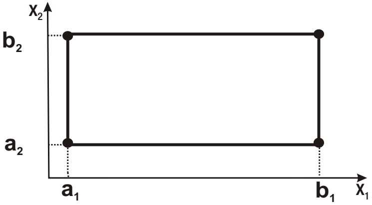
Elementos finitos rectangulares de Lagrange

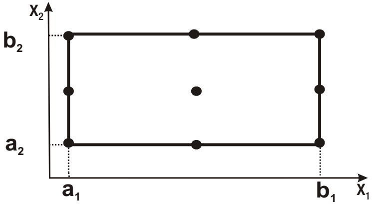
El elemento: $(K, Q_\ell(K), M_\ell(K))$

1. K: N-rectángulo de $\mathbb{R}^N$, $K = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$
   (rectángulo para $N = 2$, hexaedro recto para $N = 3$)
2. $Q_\ell(K) := \{p : K \mapsto \mathbb{R}, p \equiv$
   función polinómica, grado $\leq \ell$, en cada variable$\}$,
   dim $Q_\ell = (\ell + 1)^N$
3. $M_\ell(K) := \{x : x_i = a_i + k_i \frac{b_i - a_i}{\ell},\ i = 1, \ldots, N,\ k_i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}\}$,
   Card $M_\ell = (\ell + 1)^N$

Casos particulares: $N = 2$

- $\ell = 1$: $Q_1(K) = \{p : p \equiv c_{00} + c_{10}x_1 + c_{01}x_2 + c_{11}x_1x_2\}$
  dim $Q_1(K) = 4$, $M_1(K) = \{x : x_i = a_i + k_i(b_i - a_i),\ k_i \in \{0,1\}\}$,
  Card $(M_1(K)) = 4$





- $\ell = 2$: $Q_2(K) = \{p : p \equiv c_{00} + c_{01}x_2 + \cdots + c_{20}x_1^2 + c_{21}x_1^2x_2\}$
  $M_2(K) = \{x : x_i = a_i + k_i\frac{b_i - a_i}{2}, k_i \in \{0,1,2\}\}$
  dim $Q_1(K) =$ Card $M_1(K) = 9$

Elemento finito Q_ℓ-Lagrange

Teorema

$M_\ell(K)$ es $Q_\ell(K)$-unisolvente, $\ell \geq 0$.
Consecuencia: $(K, Q_\ell(K), M_\ell(K))$ es un elemento finito (Q_ℓ-Lagrange)

Demostración: Por simplicidad, $N = 2$
Construimos las funciones de base $p_j \in Q_\ell(K)$, con $m_1 \neq k_1^j, m_2 \neq k_2^j$:

$$p_j(x) = \frac{1}{\mu_j} \prod_{m_1, m_2} \left(x_1 - (a_1 + m_1 \frac{b_1 - a_1}{\ell}) \right) \left(x_2 - (a_2 + m_2 \frac{b_2 - a_2}{\ell}) \right)$$

Aproximación interna de H^1 por Q_ℓ-Lagrange

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado
$\partial\Omega$: unión finita de "caras" de N-rectángulos
$\mathcal{T}_h = \{K_r\}_{r=1}^R$ ($h \in (0,1]$) una triangulación de Ω:

- Todo $K \in \mathcal{T}_h$ es un N-rectángulo con $\delta(K) \leq h$
- Si $K, K' \in \mathcal{T}_h$, $K \neq K'$, $\partial K \cap \partial K'$: m-rectángulo ($m < N$) ó $\emptyset$

$Y_h^\ell := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}, v_h|_K \in Q_\ell(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega)$, dim $Y_h^\ell < +\infty$
$M_h^\ell := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} M_\ell(K)$

Teorema

Entonces: dim Y_h^ℓ = Card M_h^ℓ y toda $v_h \in Y_h^\ell$ está unívocamente determinada por los $v_h(a)$, $a \in M_h^\ell$

Elementos finitos para problemas de cuarto orden

Permiten construir aproximaciones de $H^2(\Omega)$

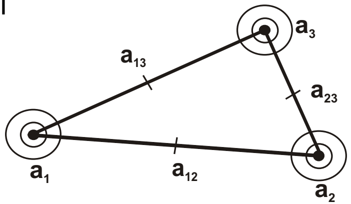
- Triángulo de Argyris
- Triángulo de Bell
- Rectángulo de Bogner-Fox-Schmit

Triángulo de Argyris

1. K: triángulo de vértices a_1, a_2, a_3
2. $P_5(K) = \{p : p \equiv$ función polinómica, grado $\leq 5\}$, dim $P_5(K) = 21$
3. $\Sigma_A(K) := \{\Phi_i^\beta,\ \Phi^1_{k,\ell},\ \ 1 \leq i \leq 3,\ \ 1 \leq k < \ell \leq 3,\ \ |\beta| \leq 2\}$, con

$$\Phi_i^\beta(p) = (\partial^\beta p)(a_i),\ \ \Phi^1_{k,\ell}(p) = \frac{\partial p}{\partial n}(a_{k,\ell})$$

Card $\Sigma_A(K) = 21$

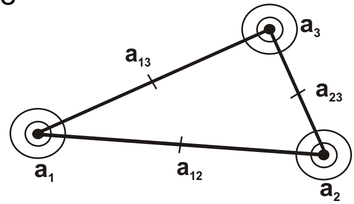


Teorema

$\Sigma_A(K)$ es $P_5(K)$-unisolvente. Luego: $(K, P_5(K), \Sigma_A(K))$ es un elemento finito (Triángulo de Argyris)

Triángulo de Bell

1. K: triángulo de vértices a_1, a_2, a_3
2. $P_5^*(K) := \{p \in P_5(K) : \frac{\partial p}{\partial n} \in P_3(K')\}$, dim $P_5^*(K) = 18$
3. $\Sigma_B(K) := \{\Phi_i^\beta(p) = \partial^\beta p(a_i),\ \ 1 \leq i \leq 3,\ \ |\beta| \leq 2\}$, Card $\Sigma_B(K) = 18$

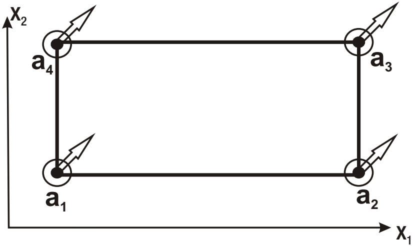


Teorema

$\Sigma_B(K)$ es $P_5^*(K)$-unisolvente. Luego: $(K, P_5^*(K), \Sigma_B(K))$ es un elemento finito (Triángulo de Bell)

Rectángulo de Bogner-Fox-Schmit

1. K: rectángulo de vértices a_i, $i = 1, 2, 3, 4$
2. $Q_3(K)$, dim $Q_3(K) = 16$
3. $\Sigma_{BFS}(K) = \{p(a_i),\ \partial_1 p(a_i),\ \partial_2 p(a_i),\ \partial_{12} p(a_i),\ \ 1 \leq i \leq 3\}$,
   Card $(\Sigma_{BFS}(K)) = 16$



Teorema

$\Sigma_{BFS}(K)$ es $Q_3(K)$-unisolvente. Luego: $(K, Q_3(K), \Sigma_{BFS}(K))$ es un elemento finito (Rectángulo de Bogner-Fox-Schmit)