Introducción a la resolución numérica de problemas para ecuaciones en derivadas parciales (III)

Dpto. EDAN, Universidad de Sevilla

Planteamiento del problema

V: Hilbert, $a(\cdot\,,\cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ bilineal, continua, coerciva, $\ell \in V'$
$V_h \subset V$, $dim\, V_h = I(h) < +\infty$, $h \in (0,1]$

$$(P) \begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u,v) = \langle \ell, v \rangle \quad v \in V \end{cases} \qquad (P_h) \begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h,v_h) = \langle \ell, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Objetivo: estimación del error

Determinar m tal que $\|u - u_h\|_V \leq Ch^m$

Sabemos: $\|u - u_h\|_V \leq C\|u - v_h\|_V \; \forall v_h \in V_h$

Dada u, ¿ es posible construir $\pi_h u \in V_h$ con $\|u - \pi_h u\|_V = O(h^m)$?
(el V_h-interpolante de u)

Así, tendríamos: $\|u - u_h\|_V \leq C\|u - \pi_h u\|_V \leq Ch^m$

El operador de P_K-interpolación

(K, P_K, Σ_K): elemento finito de tipo Lagrange, i.e.
$\Sigma_K = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_M\} \sim \{a_1, \ldots, a_M\}, \;\; \Phi_i(v) = v(a_i) \;\; \forall v \in P_K$
$p_1, \ldots, p_M$: base "canónica" de P_K

Definición (Operador de P_K-interpolación)

$\pi_K : C^0(K) \mapsto P_K$, dado por

$$\pi_K(v) = \sum_{i=1}^{M} \Phi_i(v) p_i = \sum_{i=1}^{M} v(a_i) p_i \;\; \forall v \in C^0(K)$$

Se tiene: $\Phi_i(\pi_K v) = \Phi_i(v)$, $i = 1, \ldots, M$

Primer objetivo:

Estudiar el error local de interpolación $v - \pi_K v$ para $v \in C^0(K)$

Teorema de Bramble-Hilbert

$K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, conexo, $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, $\ell \geq 0$ entero

Notación: $|v|_{H^{\ell+1}(K)} = \left(\sum_{|\alpha|=\ell+1} \|\partial^\alpha v\|^2_{L^2(K)} \right)^{1/2}$

Teorema (Bramble-Hilbert)

Suponemos:

$\pi \in \mathcal{L}(H^{\ell+1}(K), H^m(K))$, $0 \leq m \leq \ell + 1$, $\pi p = p$ *for all* $p \in P_\ell(K)$

Entonces:

$\exists C_{BH}(\ell, \pi, K)$ *con* $\|v - \pi v\|_{H^m(K)} \leq C_{BH} |v|_{H^{\ell+1}(K)}$ $\forall v \in H^{\ell+1}(K)$

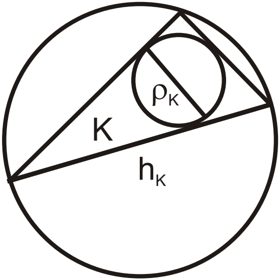
En particular: si $(K, P_K, \Sigma_K) \equiv$ elemento finito P_ℓ-Lagrange, el resultado se aplica a π_K

Interesa conocer cómo depende C_{BH} de la geometría de K

Características geométricas de K y consecuencias (I)

1. $h_K = \max_{x,y \in K} |x - y|$: diámetro de K
2. $\rho_K = \max\{\eta > 0 : \exists B_\eta \subset K\}$: grosor de K

Ilustración para $N = 2$, K triangular:



Características geométricas de K y consecuencias (II)

$\widehat{K} \subset \mathbb{R}^N$: elemento de referencia (compacto, conexo, $\overset{\circ}{\widehat{K}} \neq \emptyset$)

Suponemos:

$\exists F_K : \widehat{K} \mapsto K$ con $F_K(\widehat{x}) \equiv B_K \widehat{x} + b_K$, $B_K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, $\det B_K \neq 0$, $b_K \in \mathbb{R}^N$

Teorema (Error local de interpolación)

Suponemos:

$$\widehat{\pi} \in \mathcal{L}(H^{\ell+1}(\widehat{K}), H^m(\widehat{K})),\ 0 \leq m \leq \ell + 1,\ \widehat{\pi}\,\widehat{p} = \widehat{p} \quad \forall \widehat{p} \in P_\ell(\widehat{K})$$

Si $K = F_K(\widehat{K})$ *y* $\pi_K \in \mathcal{L}(H^{\ell+1}(K), H^m(K))$ *está definida por*

$$\widehat{\pi_K v} = \widehat{\pi}\widehat{v}, \quad \forall v \in H^{\ell+1}(K),$$

entonces: $\exists C_1(N, m, \ell, \widehat{\pi}, \widehat{K})$ *con*

$$|v - \pi_K v|_{H^m(K)} \leq C_1 \frac{h_K^{\ell+1}}{\rho_K^m} |v|_{H^{\ell+1}(K)} \ \ \forall v \in H^{\ell+1}(K)$$

Características geométricas de K y consecuencias (III)

Idea de la demostración:

1. $\|B_K\| \leq \dfrac{h_K}{\widehat{\rho}}, \quad \|B_K^{-1}\| \leq \dfrac{\widehat{h}}{\rho_K}$
2. Si $v \in H^r(K)$, $\widehat{v} \in H^r(\widehat{K})$, $\widehat{v} = v \circ F_K$, entonces $\exists C(N, r)$ tal que

$$\begin{cases} (a) \quad |v|_{H^r(K)} \leq C\|B_K^{-1}\|^r |\det B_K|^{1/2} |\widehat{v}|_{H^r(\widehat{K})} \\ (b) \quad |\widehat{v}|_{H^r(\widehat{K})} \leq C\|B_K\|^r |\det B_K|^{-1/2} |v|_{H^r(K)} \end{cases}$$

3. Conclusión …

El caso del N-símplex P_ℓ-Lagrange (I)

Suponemos:

- $(K, P_K, \Sigma_K) = (K, P_\ell(K), \Sigma_\ell(K))$, $\Sigma_\ell(K) = \{a_i\}_{i=1}^M$
  $(\widehat{K}, P_\ell(\widehat{K}), \Sigma_\ell(\widehat{K}))$: elemento de referencia
- $\pi_K \in \mathcal{L}(C^0(K); P_\ell(K))$ y $\widehat{\pi} \in \mathcal{L}(C^0(\widehat{K}); P_\ell(\widehat{K}))$: operadores de $P_\ell(K)$ y $P_\ell(\widehat{K})$-interpolación

Entonces

$$\widehat{\pi_K v} = \widehat{\pi}\widehat{v} \quad \forall v \in C^0(K)$$

Teorema

Suponemos: $N \leq 3$, $\ell \geq 1$, $1 \leq k \leq \ell$, $0 \leq m \leq k+1$

Entonces: $\exists C_2(N, k) > 0$ *con*

$$|v - \pi_K v|_{H^m(K)} \leq C_2 \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{H^{k+1}(K)} \quad \forall v \in H^{k+1}(K)$$

El caso del N-símplex P_ℓ-Lagrange (II)

Observación

Con máxima regularidad, $v \in H^{\ell+1}(K)$ y

$$|v - \pi_K v|_{H^m(K)} \leq C_2 \frac{h_K^{\ell+1}}{\rho_K^m} |v|_{H^{\ell+1}(K)}$$

Demostración:

$N \leq 3 \;\Rightarrow\; H^{k+1}(\widehat{K}) \hookrightarrow C^0(\widehat{K})$ y $\widehat{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\widehat{K}); H^m(\widehat{K}))$ bien definida

Son válidos los resultados precedentes ...

El caso del triángulo de Argyris (I)

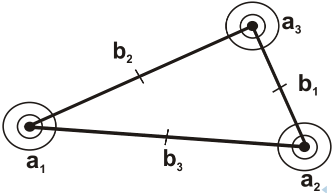
Suponemos:

- $(K, P_K, \Sigma_K) = (K, P_5(K), \Sigma_A(K))$ (Argyris), $\{p_1, \ldots, p_M\}$: funciones de base
  $(\widehat{K}, P_5(\widehat{K}), \Sigma_A(\widehat{K}))$: elemento de referencia
- $\pi_K \in \mathcal{L}(C^2(K), P_5(K))$ y $\widehat{\pi} \in \mathcal{L}(C^2(\widehat{K}), P_5(\widehat{K})))$: operadores de $P_5(K)$ y $P_5(\widehat{K})$-interpolación

Entonces

$$\widehat{\pi_K v} \neq \widehat{\pi}\widehat{v} \quad \forall v \in C^0(K)$$

(F_K no transforma derivadas normales en derivadas normales)



El caso del triángulo de Argyris (II)

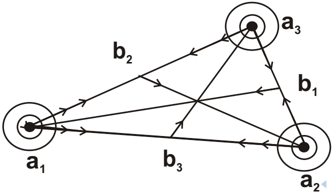
Para superar esta dificultad: triángulo de Argyris modificado $(K, P_5(K), \Sigma_A^*(K))$, con

$$\Sigma_A^*(K) = \{\Phi_i^0, \Phi_i^{1,j}, \Phi_i^{2,m,n}, \Phi_i^1\}$$

$\Phi_i^0(p) = p(a_i)$, $\Phi_i^{1,j}(p) = \nabla p(a_i)(a_j - a_i)$,
$\Phi_i^{2,m,n}(p) = D^2 p(a_i)(a_m - a_i, a_n - a_i)$, $\Phi_i^1(p) = \nabla p(b_i) \cdot (a_i - b_i)$
con $1 \leq i, j \leq 3,\ 1 \leq i, j \leq 3,\ i \neq j,\ 1 \leq m < n \leq 3,\ m, n \neq i$

Si Λ_K y $\widehat{\Lambda}$ son los operadores de interpolación asociados, ahora

$$\widehat{\Lambda_K v} = \widehat{\Lambda}\widehat{v} \quad \forall v \in C^2(K)$$



El caso del triángulo de Argyris (III)

Teorema (Error local de interpolación para Argyris modificado)

Suponemos: $N = 2$, $3 \leq k \leq 5$, $0 \leq m \leq k+1$

Entonces: $\exists C_A^*(k)$ *con*

$$|v - \Lambda_K v|_{H^m} \leq C_A^* \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{H^{k+1}} \quad \forall v \in H^{k+1}(K)$$

Teorema (Error local de interpolación para Argyris)

Suponemos: $N = 2$, $3 \leq k \leq 5$, $0 \leq m \leq k+1$

Entonces: $\exists C_A(k)$ *con*

$$|v - \pi_K v|_{H^m} \leq C_A \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} \left(1 + \frac{h_K}{\rho_K}\right) |v|_{H^{k+1}} \quad \forall v \in H^{k+1}(K)$$

Obsérvese: $H^{k+1}(K) \hookrightarrow C^2(K)$

Error global, elementos de tipo Lagrange (I)

Suponemos: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ poliédrico, $\{\mathcal{T}_h\}$ familia regular de triangulaciones con $N-$ símplices, i.e.

- $\lim_{h\to 0}(\max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K) = 0$
- $\exists\sigma > 0$ tal que $\frac{h_k}{\rho_K} \leq \sigma\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall h \in (0,1]$

Recordemos: $X_h^\ell = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : v|_K \in P_\ell(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$

Operador de interpolación global: $\pi_h^\ell \in \mathcal{L}(C^0(\overline{\Omega}); X_h^\ell)$, con

$$\pi_h^\ell v|_K = \pi_K(v|_K) \ \ \forall v \in C^0(\overline{\Omega}), \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h$$

(π_K es el operador de $P_\ell(K)$-interpolación, local)

Teorema (Estimación del error de interpolación global)

Suponemos: $N \leq 3$, $1 \leq k \leq \ell$, $m = 0, 1$
Entonces: $\exists C(N,k)$ *con*

$$\|v - \pi_h^\ell v\|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{k+1-m}|v|_{H^{k+1}(\Omega)} \ \ \forall v \in H^{k+1}(\Omega)$$

Error global, elementos de tipo Lagrange (II)

Idea de la demostración:

$H^{k+1}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ y $\pi_h^\ell v$ bien definida para $v \in H^{k+1}(\Omega)$

Estimación del error local $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
|v - \pi_h^\ell v|^2_{H^m(\Omega)} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|_K - \pi_K(v|_K)|^2_{H^m(K)} \\
&\leq C_2^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m}\right)^2 |v|_K|^2_{H^{k+1}(K)} \leq C\left(h^{k+1-m}|v|_{H^{k+1}(\Omega)}\right)^2
\end{aligned}
$$

Se ha usado: $\mathcal{T}_h$ es regular y $h_K \leq h\ \forall K \in \mathcal{T}_h$

Consecuencia:

$$
\begin{aligned}
\|v - \pi_h^\ell v\|^2_{H^1(\Omega)} &= \sum_{i=0}^1 |v - \pi_h^\ell v|^2_{H^i(\Omega)} \\
&\leq Ch^{2(k+1)}|v|^2_{H^{k+1}(\Omega)} + Ch^{2k}|v|^2_{H^{k+1}(\Omega)} = Ch^{2k}(1+h^2)|v|^2_{H^{k+1}(\Omega)} \\
&\leq Ch^{2k}|v|^2_{H^{k+1}(\Omega)}, \qquad h \in (0,1]
\end{aligned}
$$

Error global, elementos de tipo Lagrange (III)

También:

$$\|v - \pi_h^\ell v\|_{L^2(\Omega)} = |v - \pi_h^\ell v|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}|v|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Observación

Con máxima regularidad para v, tenemos:

- $m = 1$: $\|v - \pi_h^\ell v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(N,\ell)\, h^\ell |v|_{H^{\ell+1}(\Omega)}$
- $m = 0$: $\|v - \pi_h^\ell v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(N,\ell)\, h^{\ell+1} |v|_{H^{\ell+1}(\Omega)}$

Error global, elementos de tipo Lagrange (IV)

Teorema (Error global. Convergencia)

Suponemos: $N \leq 3$, $V = H^1(\Omega)$ *ó* $V = H_0^1(\Omega)$ *ó* $V = \{H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$, $\{\mathcal{T}_h\}$ *regular*
Entonces

- $\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$
- *Si* $u \in H^{k+1}(\Omega)$, $1 \leq k \leq \ell$, *se tiene*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(N,k)h^k |v|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Idea de la demostración: Cea + Error global

Observación

Con máxima regularidad para v: $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = O(h^\ell)$
Veremos a continuación: $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{\ell+1})$

Error global, elementos de tipo Lagrange (V)

Suponemos: H Hilbert, $V \hookrightarrow H$ con inyección continua y densa
Notación: Para $g \in H$, φ_g denota la única solución de

$$\begin{cases} \text{Hallar } \varphi_g \in V \text{ tal que} \\ a(v, \varphi_g) = (g, v)_H \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Teorema (Aubin-Nitsche)

$\exists C$ (independiente de h) con

$$\|u - u_h\|_H \leq C\|u - u_h\|_V \sup_{g \in H, g \neq 0} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v_h \in V_h} \|\varphi_g - v_h\|_V \right\}$$

Aplicación: Ponemos $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$
Suponemos: $\varphi_g \in H^2(\Omega)$ y $\|\varphi_g\|_{H^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$ $\forall g \in L^2(\Omega)$
Si $1 \leq k \leq \ell$, $u \in H^{k+1}(\Omega)$, entonces $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{\ell+1})$

Error global, triángulo de Argyris (I)

Suponemos: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ poliédrico, $\{\mathcal{T}_h\}$ familia regular de triangulaciones
Recordemos: $X_h = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v|_K \in P_5(K) \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$
Operador de interpolación global: $\pi_h \in \mathcal{L}(C^2(\overline{\Omega}); X_h)$, con

$$\pi_h v|_K = \pi_K(v|_K) \ \ \forall v \in C^2(\overline{\Omega}), \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h$$

(π_K es el operador de $P_5(K)$-interpolación, local)

Teorema (Estimación del error de interpolación global)

Suponemos: $N = 2$, $3 \le k \le 5$, $m = 0, 1, 2$
Entonces: $\exists C(k)$ *con*

$$\|v - \pi_h v\|_{H^m(\Omega)} \le C h^{k+1-m} |v|_{H^{k+1}(\Omega)} \ \ \forall v \in H^{k+1}(\Omega)$$

Error global, triángulo de Argyris (II)

Teorema (Error global. Convergencia)

Suponemos: $N = 2$, $V \subset H^2(\Omega)$ *subespacio cerrado,* $\{\mathcal{T}_h\}$ *regular*
Entonces

- $\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$
- *Si* $u \in H^{k+1}(\Omega)$, $3 \leq k \leq 5$, *se tiene*

$$\|u - u_h\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^{k-1}|v|_{H^{k+1}(\Omega)}$$