5. La EDP del calor (II)

En esta sección, volveremos a considerar la EDP del calor y algunas variantes. Intentaremos analizar y resolver problemas donde los coeficientes, segundos miembros, etc. son poco regulares. Para ello, como en la Sección 4, necesitaremos debilitar el concepto de solución y basarnos en un resultado de carácter general.

5.1. Un resultado abstracto: Teorema de Lions

Sea $T > 0$. Dado un espacio de Hilbert separable X, para cada $p \in [1, +\infty]$, $L^p(0,T;X)$ denotará el espacio de Banach de las (clases de) funciones medibles y p-integrables en $(0,T)$ (para la medida de Lebesgue habitual) con valores en X. La norma en $L^p(0,T;X)$ es

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right) \quad \text{si } p < +\infty$$

y

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} := \text{Sup Es} \, \|f(t)\|_X \quad \text{si } p = +\infty$$

y, obviamente, si $p = 2$, estamos ante un espacio de Hilbert.

Supondremos dados

- Dos espacios de Hilbert separables V y H (de normas y productos escalares $\|\cdot\|_V$ y $(\cdot\,,\cdot)_V$, $\|\cdot\|_H$ y $(\cdot\,,\cdot)_H$, respectivamente).
- Una familia $\{a(t;\cdot\,,\cdot)\}_{t\in[0,T]}$ de formas bilineales sobre V.
- Los datos $F \in L^2(0,T;H)$ y $u_0 \in H$.

Tenemos entonces:

Teorema 5.1 (Lions) *Supongamos que*

$$V \subset H, \text{ la inyección de } V \text{ en } H \text{ es continua y } V \text{ es denso en } H. \tag{46}$$

Supongamos también que existen $M, \alpha > 0$ (independientes de t) tales que

$$|a(t;u,v)| \le M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall u,v \in V \tag{47}$$

y

$$|a(t;v,v)| \ge \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \tag{48}$$

para t c.p.d. en $[0,T]$. Finalmente, supongamos que

$$t \mapsto a(t;u,v) \quad \text{es medible} \quad \forall u,v \in V. \tag{49}$$

Entonces existe una única solución del problema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \; u \in L^2(0,T;V) \cap C^0([0,T];H) \; \text{ tal que} \\ \dfrac{d}{dt}(u,v)_H + a(t;u,v) = (F,v)_H \quad \forall v \in V, \quad \text{c.p.d. en } \; (0,T) \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \tag{50}$$

La demostración puede encontrarse por ejemplo en [1, 2]. Puede conseguirse fácilmente introduciendo una sucesión creciente de subespacios $V_m \subset V$ de dimensión finita tal que su unión sea densa en V, reduciendo (50) para cada $m \geq 1$ a un problema diferencial ordinario (de solución $u_m : [0,T] \mapsto V_m$) y comprobando que la sucesión $\{u_m\}$ converge (en un sentido adecuado) hacia una función u que verifica (50).

Merece la pena realizar varios comentarios:

- La hipótesis sobre F se puede debilitar. Así, basta suponer que

$$F \in L^2(0,T;V') + L^1(0,T;H)$$

  (obsérvese que, en las condiciones del teorema, existe una inyección continua y densa de H en V', es decir, se puede interpretar que V' es un espacio de Hilbert que contiene a H).

  Con esta nueva hipótesis sobre F, el resultado se conoce con el nombre de Teorema de Lions-Tartar.

- Se puede debilitar también la hipótesis (48). En efecto, basta suponer que existen $\alpha, \beta > 0$ (independientes de t) tales que

$$|a(t;v,v)| \geq \alpha \|v\|_V^2 - \beta \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V \tag{51}$$

  para t c.p.d. en $[0,T]$.

- Si, en vez de (47), se supone que

$$|a(t;u,v)| \leq M(t)\|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u,v \in V, \tag{52}$$

  donde $M \in L^2(0,T)$ y se conserva el resto de hipótesis, es posible demostrar la existencia de solución. Sin embargo, la unicidad es una cuestión abierta.

5.2. Aplicaciones (I): Problema de Cauchy-Dirichlet

Consideraremos de nuevo un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ con las propiedades indicadas en la Sección 4. Recordemos que Q y Σ denotan, respectivamente, el cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$ y la frontera lateral $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$.

Supongamos dados los a_{ij} y c, con

$$\begin{gathered} a_{ij} = a_{ji}, \ c \in L^\infty(Q) \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x},t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \ \ (\mathbf{x},t) \ \text{ c.p.d. en } \ Q, \ \ \alpha > 0 \end{gathered} \tag{53}$$

y pongamos

$$L(t)u := -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}(\mathbf{x},t)\partial_j u) + c(\mathbf{x},t)u.$$

Obsérvese que no estamos imponiendo ninguna condición de signo a c.

Por otra parte, sean

$$f \in L^2(Q), \quad u_0 \in L^2(\Omega) \tag{54}$$

y consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t + L(t)u = f(\mathbf{x},t), & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = 0, & (\mathbf{x},t) \in \Sigma \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{55}$$

generalmente denominado *problema de Cauchy-Dirichlet* para la EDP $u_t + L(t)u = f$.

Pongamos

$$a(t;u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x},t)\partial_j u\, \partial_i v + c(\mathbf{x},t)uv \right) d\mathbf{x} \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega). \tag{56}$$

Definición 5.1 *Se dice que u es solución débil de* (55) *si*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d}{dt}(u,v)_{L^2} + a(t;u,v) = (f(\cdot\,,t),v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad c.p.d.\ en\ \ (0,T) \\ u\big|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{57}$$

Estamos ante una generalización natural del concepto de solución fuerte de (55). En efecto, si u y los datos de (55) son muy regulares, multiplicamos la EDP por una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ arbitraria, integramos respecto de $\mathbf{x}$ en Ω y realizamos integraciones por partes, obtenemos

$$\int_\Omega u_t\varphi\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x},t)\partial_j u\, \partial_i \varphi + c(\mathbf{x},t)u\varphi \right) d\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x},t)\varphi\, d\mathbf{x}$$

que, con la notación precedente, coincide con la identidad diferencial de (57) para $v = \varphi$.

Tenemos entonces:

Teorema 5.2 *Bajo las hipótesis* (53)–(54)*, existe una única solución débil de* (55)*.*

Prueba: Es fácil comprobar que el Teorema 5.1 se puede aplicar a los espacios $V = H_0^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$, las formas bilineales $a(t;\cdot\,,\cdot)$ definidas en (56), la función F dada por $F(t) := f(\cdot\,,t)$ c.p.d. y el dato u_0.

Por tanto, está asegurada la existencia y unicidad de solución de (50). □

Observación 5.1 Una vez más, el argumento que conduce de (55) a (57) posee un recíproco: si u verifica (57) y los datos y u son suficientemente regulares, entonces u es solución fuerte de (55). □

Observación 5.2 Cuando se tiene $c \geq 0$ c.p.d., el problema (55) tiene carácter *disipativo*. Esto quiere decir que, si $f \equiv 0$, una cierta cantidad asociada a la solución que se interpreta como la "energía" decrece con t. En efecto, usando (57) con segundo miembro cero y $v = u(\cdot\,,t)$, obtenemos fácilmente para casi todo t que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot\,,t)\|_{L^2}^2 + a(t;u(\cdot\,,t),u(\cdot\,,t)) = 0,$$

de donde resulta la denominada *identidad de la energía:*

$$\frac{1}{2}\|u(\cdot\,,t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t a(s;u(\cdot\,,s),u(\cdot\,,s))\, ds = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{58}$$

Esta igualdad muestra que la función $t \mapsto \|u(\cdot\,,t)\|_{L^2}^2$ es decreciente. Si interpretamos u como la temperatura de un medio, (58) indica que la energía interna en el instante t más la suma de toda la energía calorífica perdida o disipada a lo largo del intervalo $[0,t]$ coincide con la energía interna inicial. □

Veamos ahora cómo debemos proceder para conseguir aproximaciones numéricas de la solución de (55). Teniendo en cuenta la estructura del problema parece adecuado proceder por etapas:

Etapa 1 - Aproximación en tiempo:

Fijemos un entero $M_T \geq 1$, el paso en tiempo $\tau = T/M_T$ y la partición de $[0,T]$

$$\{\, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{M_T} \,\},$$

donde $t_m := m\tau$ para $m = 0, 1, \ldots M_T$. En esta primera etapa, el objetivo consiste en hallar aproximaciones $u^0, u^1, \ldots$ de las $u(\cdot\,,t^0), u(\cdot\,,t^1), \ldots$

En primer lugar, tomamos simplemente $u^0 = u_0$.

A continuación, evaluamos la EDP de (55) en los distintos t^{m+1} y sustituimos las derivadas temporales de (55) por cocientes en diferencias. El resultado es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + L(t^{m+1})u^{m+1} = f(\mathbf{x}, t^{m+1}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u^{m+1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{59}$$

Etapa 2 - Aproximación en espacio:

Así, conseguimos reducir la tarea a la resolución de un número finito de problemas elípticos, todos con la estructura

$$\begin{cases} au + \tilde{L}u = \tilde{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{60}$$

donde $a = 1/\tau$.

Obviamente, si τ es suficientemente pequeño (esto es, si M_T es suficientemente grande), estamos en las condiciones de la Sección 3.2.3 y cada uno de estos problemas posee solución única. Por otra parte, las técnicas descritas en la Sección 4 permiten construir aproximaciones numéricas de (60).

Observación 5.3 En el caso particular en que los coeficientes a_{ij} y c son independientes de t, el operador $\tilde{L}$ que aparece en (60) es siempre el mismo (independiente de m). Cuando se construyen problemas aproximados basados en elementos finitos, la matriz de coeficientes asociada es la misma en todas las etapas de tiempo. Esto es muy beneficioso desde el punto de vista numérico: si, por ejemplo, se decide resolver los sistemas lineales con el método de Cholesky, basta realizar una única vez la factorización de la matriz y limitarse después, para cada m, a resolver dos sistemas triangulares. □

Observación 5.4 Para fijar ideas, supongamos elegida la estrategia P_1-Lagrange para la resolución numérica de los problemas (59). Fijada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, es posible construir, para cada $\tau = T/M_T$ y cada $h > 0$, una "aproximación" $u_{\tau,h}$ de u. La definición de $u_{\tau,h}$ es como sigue:

- $u_{\tau,h} : [0,T] \mapsto V_h$ es continua y afín a trozos.
- $u_{\tau,h}(0) = u_{0,h}$ (una aproximación de u_0 en V_h).

- $u_{\tau,h}(t^{m+1}) = u_h^{m+1}$ (la solución aproximada de (59) determinada por $\mathcal{T}_h$).

Entonces es posible demostrar que las $u_{\tau,h}$ convergen, en un sentido adecuado, hacia la solución u cuando $\tau, h \to 0^+$. Para los detalles, véase por ejemplo [3, 4]. □

5.3. Aplicaciones (II): Problema de Cauchy-Neumann y otros

Es posible complementar EDPs análogas a las precedentes con condiciones de contorno sobre Σ de otro tipo. Por ejemplo, esto conduce al denominado *problema de Cauchy-Neumann,* que describimos a continuación.

Supongamos de nuevo que los datos a_{ij}, c, f y u_0 verifican (53) y (54), sea

$$g \in L^2(\Sigma) \tag{61}$$

y consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t + L(t)u = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_i u\, n_j = g(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{62}$$

Pongamos ahora

$$a(t; u, v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_j u\, \partial_i v + c(\mathbf{x}, t)uv \right) d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \tag{63}$$

y

$$F(t)(v) := \int_\Omega f(\mathbf{x}, t)v\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}, t)v\, d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{64}$$

para casi todo $t \in [0, T]$.

Definición 5.2 *Se dice que u es solución débil de* (62) *si*

$$\begin{cases} u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d}{dt}(u, v)_{L^2} + a(t; u, v) = F(t)(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad c.p.d.\ en\ \ (0, T) \\ u\big|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{65}$$

De nuevo, estamos generalizando el concepto de solución fuerte de (62). En efecto, si u y los datos de (62) son muy regulares, multiplicamos la EDP por una función $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ arbitraria, integramos respecto de $\mathbf{x}$ en Ω y realizamos integraciones por partes, obtenemos

$$\int_\Omega u_t \varphi\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_j u\, \partial_i \varphi + c(\mathbf{x}, t)u\varphi \right) d\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}, t)\varphi\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}, t)\varphi\, d\Gamma,$$

que coincide con lo que aparece en (57) para $v = \varphi$.

De nuevo tenemos un resultado de existencia y unicidad:

Teorema 5.3 *Bajo las hipótesis* (53)–(54) *y* (61)*, existe una única solución débil de* (62)*.*

La demostración no es difícil. Basta comprobar que se puede aplicar el Teorema 5.1 con $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $a(t;\cdot,\cdot)$ como en (63), F como en (64) y $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Para conseguir aproximaciones numéricas de la solución de (62), podemos proceder como en la sección precedente. Así, en una primera etapa, la tarea queda reducida a tomar $u^0 = u_0$ y, después, para $m = 0, 1, \dots$, resolver los problemas de Neumann

$$\begin{cases} \dfrac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + L(t^{m+1})u^{m+1} = f(\mathbf{x}, t^{m+1}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_i u^{m+1} n_j = g(\mathbf{x}, t^{m+1}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{66}$$

A continuación, las técnicas descritas en la Sección 4 permiten construir aproximaciones numéricas adecuadas.

Observación 5.5 De nuevo, si los coeficientes a_{ij} y c son independientes de t, el operador $\tilde{L}$ que aparece en (60) es independiente de m y, tras la aproximación en espacio, aparece una familia de sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes. Por otra parte, indiquemos que aquí es también posible demostrar resultados de convergencia de las soluciones aproximadas. $\square$

De igual modo, pueden considerarse condiciones de contorno de tipo Fourier, distintas condiciones de contorno en distintas partes de $\partial\Omega \times (0, T)$, etc. Por brevedad, omitimos los detalles, que pueden ser fácilmente deducidos razonando como en las líneas precedentes.

Bibliografía

[1] Brezis, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[2] Evans, L.C., *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[3] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F., *Numerical Mathematics, 2nd edition.* Texts in Applied Mathematics, 37. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[4] Temam, R., *Navier-Stokes equations.* Second edition. North-Holland, Amsterdam, 2000.