6. La EDP de ondas (I): Motivación, deducción y resultados básicos

En esta sección, describiremos la evolución de los fenómenos ondulatorios más sencillos (de nuevo con origen en Física, Química, Biología, etc.) en un abierto espacial $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ durante un intervalo de tiempo $(0, T)$. Una vez más, se supone conocida la situación en el tiempo $t = 0$ e intentamos predecir qué ocurrirá en todo $t \in (0, T)$.

6.1. Motivación y deducción de la EDP del ondas

Por simplicidad, consideraremos en primer lugar un medio elástico 1D (una "cuerda" elástica) que ocupa el intervalo $(0, L)$. Un punto genérico de la cuerda será denotado x.

Denotaremos

- $u = u(x, t)$ el desplazamiento producido en la punto de la cuerda que ocupa la posición x en el instante t.
- $F_a = F_a(t)$ la resultante de las fuerzas elásticas (internas) que actúan en el punto a en el instante t.
- $F = F(x, t)$ una densidad de esfuerzos externos aplicados en los distintos puntos del medio.

Nuestro objetivo principal es calcular los valores de u o, al menos, aproximaciones numéricas de los mismos. Para determinar el modelo satisfecho por u, usaremos:

(I) La *ley de Newton* en cada intervalo (a, b) en cada instante de tiempo:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_a^b \rho u_t \, dx\right) = F_b(t) - F_a(t) + \displaystyle\int_a^b F(x,t)\, dx \\ \forall a, b \in [0, L] \quad (\text{con } a < b), \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \tag{67}$$

donde ρ es una constante positiva (la densidad de masa del medio).

(II) La *ley de Hooke:* así, supondremos que existe una constante positiva $c_0^2 > 0$ tal que

$$F_a(t) = c_0^2\, u_x(a, t) \quad \forall a \in [0, L], \quad \forall t \in [0, T]. \tag{68}$$

Teniendo en cuenta (67)–(68), llegamos a que

$$\int_a^b \left(\rho u_{tt} - c_0^2 u_{xx}\right) \, dx = \int_a^b F(x,t)\, dx \;\; \forall a, b \in [0, L] \;\; (\text{con } a < b), \;\; \forall t \in [0, T].$$

De aquí, deducimos la EDP de ondas 1D:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{69}$$

donde hemos introducido $c := c_0/\sqrt{\rho}$ y $f := \frac{1}{\rho} F$.

En dimensión superior a 1, con una deducción bsada en argumentos similares, se llega a la EDP

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in Q. \tag{70}$$

Cuando $N = 2$, las soluciones pueden ser interpretadas como *ondulaciones* producidas sobre una región plana por efecto de unos esfuerzos $f = f(\mathbf{x}, t)$ y, eventualmente, una perturbación inicial. Los esfuerzos internos producidos por u están dados por $c^2 \nabla u$ y, como antes, f se interpreta como una densidad de esfuerzos externos (por unidad de masa). Así, estamos frente a una EDP que modela (por ejemplo) el comportamiento de las ondas que se producen sobre la superficie de un estanque.

Cuando $N = 3$, las soluciones de (70) describen vibraciones producidas por ondas que evolucionan en el espacio Euclídeo habitual; por ejemplo, las ondas acústicas, ópticas (o más generalmente electromagnéticas) evolucionan de acuerdo con esta EDP. Los esfuerzos internos y externos están dados por expresiones similares a las precedentes.

Es claro que c debe tener las dimensiones de una velocidad; de hecho, esta constante debe ser interpretada como la velocidad a la que se mueven las ondas que generan la solución; véase por ejemplo [3].

Así, si $N = 1$, no es difícil demostrar que u es solución de (69) en un abierto $D \subset \mathbf{R}^2$ si y sólo si existen funciones F y G (definidas en intervalos adecuados) tales que

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad \text{en} \quad D. \tag{71}$$

Se dice entonces que u es la *superposición* de dos ondas que se desplazan respectivamente hacia la izquierda y hacia la derecha de los valores de x con velocidad c.

Por otra parte, veremos más adelante que, para $N = 2$ y $N = 3$, las ondas producidas se desplazan (en todas las direcciones) también con velocidad c. En particular, cuando $N = 3$, la constante c se suele llamar *velocidad del sonido.*

Para calcular u, necesitamos añadir a (70) condiciones complementarias. Teniendo en cuenta que estamos frente a una EDP de segundo orden en t, una posibilidad consiste en añadir información sobre los valores de u y u_t para $t = 0$ y sobre la frontera lateral. Así, dados un abierto Ω y un tiempo final T en las condiciones habituales y recordando la notación habitual $Q = \Omega \times (0, T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$, el *problema de Cauchy-Dirichlet* para la EDP de ondas es

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q \\ u = u_\Gamma(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{72}$$

donde f, u_Γ, u_0 y u_1 son funciones dadas. Las tres últimas se interpretan, respectivamente, como los valores de los desplazamientos de las partículas que están sobre Σ y los desplazamientos y velocidades de las partículas en el instante inicial $t = 0$.

Otra posibilidad consiste en dar información sobre los esfuerzos elásticos normales sobre Σ. De este modo llegamos al *problema de Cauchy-Neumann*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q \\ c^2 \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{73}$$

donde g es una función dada.

6.2. Un resultado abstracto y algunas aplicaciones

Presentaremos a continuación un resultado abstracto que puede ser aplicado a problemas con una estructura similar a la de los que preceden.

Supondremos dados

- Dos espacios de Hilbert separables V y H de normas y productos escalares $\|\cdot\|_V$, $(\cdot\,,\cdot)_V$, etc.
- Una familia $\{a(t;\cdot\,,\cdot)\}_{t\in[0,T]}$ de formas bilineales sobre V.
- Los datos $F \in L^2(0,T;H)$, $u_0 \in V$ y $u_1 \in H$.

Tenemos entonces:

Teorema 6.1 *Supongamos que*

$$V \subset H, \text{ la inyección de } V \text{ en } H \text{ es continua y } V \text{ es denso en } H. \tag{74}$$

Supongamos también que existen $M, \alpha, \beta > 0$ (independientes de t) tales que

$$|a(t;u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall u,v \in V \tag{75}$$

y

$$a(t;v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 - \beta\|v\|_H^2 \quad \forall v \in V \tag{76}$$

para t c.p.d. en $[0,T]$. Finalmente, supongamos que

$$t \mapsto a(t;u,v) \text{ es continua y diferenciable c.p.d. con derivada en } L^\infty \quad \forall u,v \in V. \tag{77}$$

Entonces existe una única solución del problema siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \; u \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H) \; \text{ tal que} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(u,v)_H + a(t;u,v) = (F,v)_H \quad \forall v \in V, \quad \text{c.p.d. en } \; (0,T) \\ (u(0),u_t(0)) = (u_0,u_1). \end{cases} \tag{78}$$

La demostración puede encontrarse por ejemplo en [2, 5]. De nuevo puede conseguirse introduciendo una sucesión creciente de subespacios $V_m \subset V$ de dimensión finita tal que su unión sea densa en V, reduciendo (78) para cada m a un problema diferencial ordinario de segundo orden y comprobando que las correspondientes soluciones u_m convergen (en un sentido adecuado) hacia una función u que verifica (78).

A continuación, presentaremos aplicaremos el teorema precedente a la resolución de varios problemas que contienen, como casos particulares, (72) y (73).

Consideraremos una vez más un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ con las propiedades indicadas en la Sección 4. Supongamos dados los coeficientes a_{ij} y c, con

$$\begin{gathered} a_{ij} = a_{ji}, \; c \in L^\infty(\Omega) \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \quad \mathbf{x} \text{ c.p.d. en } \Omega, \quad \alpha > 0 \end{gathered} \tag{79}$$

y pongamos

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u) + c(\mathbf{x})u.$$

Por otra parte, sean

$$f \in L^2(Q), \quad u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega) \tag{80}$$

y consideremos el problema de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu = f(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q \\ u = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{81}$$

Pongamos

$$a(u, v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_j u \, \partial_i v + c(\mathbf{x}) uv \right) d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{82}$$

Definición 6.1 *Se dice que u es solución débil de* (81) *si*

$$\begin{cases} u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(u, v)_{L^2} + a(u, v) = (f(\cdot\,, t), v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad c.p.d. \ en \ \ (0, T) \\ u\big|_{t=0} = u_0, \quad u_t\big|_{t=0} = u_1. \end{cases} \tag{83}$$

Obviamente, estamos generalizando el concepto de solución habitual de (81); por brevedad, omitiremos los detalles.

Aplicando el Teorema 6.1, obtenemos el resultado siguiente:

Teorema 6.2 *Bajo las hipótesis* (79)–(80)*, existe una única solución débil de* (81)*.*

Observación 6.1 El resultado continúa siendo cierto si los a_{ij} y c dependen de la variable t de manera suficientemente regular. Por ejemplo, esto ocurre si los coeficientes son derivables respecto de t en casi todo $(\mathbf{x}, t)$, con

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t} \in L^\infty(Q).$$

En efecto, en tal caso, es posible definir una familia de formas bilineales continuas sobre $H_0^1(\Omega)$ que cumple las propiedades adecuadas. □

Observación 6.2 Contrariamente a (55), el problema (81) tiene carácter *conservativo.* Esto quiere decir que, si $f \equiv 0$, una cierta cantidad asociada a la solución que juega el papel de “energía” asociada permanece constante en el tiempo. En efecto, a partir de (83) con segundo miembro cero y $v = u_t(\cdot\,, t)$, obtenemos fácilmente para casi todo t que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u_t(\cdot\,, t)\|_{L^2}^2 + a(u(\cdot\,, t), u(\cdot\,, t)) \right] = 0,$$

de donde resulta la denominada *identidad de energía*

$$\frac{1}{2} \left[\|u_t(\cdot\,, t)\|_{L^2}^2 + a(u(\cdot\,, t), u(\cdot\,, t)) \right] = \frac{1}{2} \left[\|u_1\|_{L^2}^2 + a(u_0, u_0) \right] \quad \forall t \in [0, T]. \tag{84}$$

Otra propiedad que tiene la EDP de (81) es la *reversibilidad.* Más precisamente, obsérvese que el cambio de variables $t' = -t$ deja invariante la EDP y, por tanto, tiene perfecto sentido considerar problemas de Cauchy-Dirichlet con *condiciones finales en tiempo.* Obviamente, esto no es cierto para la EDP que aparece en (55). □

Ejercicio 6.1 Se considera el siguiente problema para la *EDP del telegrafista* (con potencial o *término de Klein-Gordon* adicional):

$$\begin{cases} u_{tt} + au_t - c^2 u_{xx} + m(x)u = f(x,t), & (x,t) \in Q \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in (0,L), \end{cases}$$

donde $a \in \mathbf{R}$, $m \in L^\infty(0,L)$ y los otros datos cumplen las condiciones habituales.

Definir adecuadamente el concepto de solución débil y probar un resultado de existencia y unicidad. ¿Qué puede decirse de las soluciones asociadas a distintos valores de a y distintas funciones m cuando $a \to 0^+$? ¿Y cuando $m \to 0$ en $L^\infty(0,L)$?
Indicación: Realizar un cambio de variable $u = e^{\lambda t} w$ con λ adecuado. □

También es posible formular (y resolver) problemas de tipo Cauchy-Neumann en este contexto.

Así, supongamos de nuevo que los a_{ij}, c, f y u_0 verifican (79) y (80), sea

$$g \in L^2(\Sigma) \tag{85}$$

y consideremos el problema

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu = f(\mathbf{x},t), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\mathbf{x},t)\partial_i u\, n_j = g(\mathbf{x},t), & (\mathbf{x},t) \in \Sigma \\ u\big|_{t=0} = u_0, \quad u_t\big|_{t=0} = u_1. \end{cases} \tag{86}$$

Pongamos ahora

$$a(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, \partial_i v + c(\mathbf{x})uv \right) d\mathbf{x} \quad \forall u,v \in H^1(\Omega) \tag{87}$$

y

$$F(t)(v) := \int_\Omega f(\mathbf{x},t)v\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x},t)v\, d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{88}$$

para casi todo $t \in [0,T]$.

Definición 6.2 *Se dice que u es solución débil de* (62) *si*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(u,v)_{L^2} + a(t;u,v) = F(t)(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad c.p.d.\ en\ \ (0,T) \\ u\big|_{t=0} = u_0, \quad u_t\big|_{t=0} = u_1. \end{cases} \tag{89}$$

De nuevo tenemos un resultado de existencia y unicidad (basta comprobar que se puede aplicar el Teorema 6.1 con $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $a(\cdot\,,\cdot)$ como en (87), F como en (88) y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$):

Teorema 6.3 *Bajo las hipótesis* (79)–(80) *y* (85), *existe una única solución débil de* (86).

Naturalmente, el Teorema 6.1 puede ser aplicado a muchos otros problemas de segundo orden en tiempo similares, con condiciones de Fourier, condiciones distintas sobre distintas partes de Σ, etc.

6.3. Algunas ideas sobre la aproximación numérica

Veremos a continuación cómo se pueden conseguir aproximaciones numéricas de la solución de (81). Los argumentos son análogos a los que se usaron en la Sección 5.2 para la EDP del calor.

De nuevo procederemos por etapas:

Etapa 1 - Aproximación en tiempo:

Fijemos un entero $M_T \geq 1$, el paso en tiempo $\tau = T/M_T$ y la partición de $[0, T]$

$$\{\, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{M_T} \,\},$$

donde $t_m := m\tau$ para $m = 0, 1, \dots M_T$. En una primera etapa, hallamos aproximaciones $u^0, u^1, \dots$ de las $u(\cdot\,, t^0), u(\cdot\,, t^1), \dots$

En primer lugar, tomamos simplemente $u^0 = u_0$, $u^1 = u^0 + \tau u^1$.

A continuación, con $m \geq 1$, evaluamos la EDP de (81) en los distintos t^{m+1} y sustituimos las derivadas temporales de (55) por cocientes en diferencias. El esquema habitual conduce al resultado siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{u^{m+1} - 2u^m + u^{m-1}}{\tau^2} + Lu^{m+1} = f(\mathbf{x}, t^{m+1}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u^{m+1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{90}$$

Etapa 2 - Aproximación en espacio:

Como en la Sección 5.2, conseguimos reducir la tarea a la resolución de un número finito de problemas elípticos, todos con la estructura

$$\begin{cases} au + \tilde{L}u = \tilde{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{91}$$

donde ahora $a = 1/\tau^2$.

Obviamente, si τ es suficientemente pequeño, estamos en las condiciones de la Sección 3.2.3 y cada uno de estos problemas posee solución única. Por otra parte, las técnicas descritas en la Sección 4 permiten construir aproximaciones numéricas de (91).

Observación 6.3 Supongamos (por ejemplo) elegida la estrategia P_1-Lagrange para la resolución numérica de los problemas (90) y supongamos dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$. Para cada $\tau = T/M_T$ y cada $h > 0$, se puede construir una "aproximación" $u_{\tau,h}$ de u como sigue:

- $u_{\tau,h} : [0, T] \mapsto V_h$ es continua y afín a trozos.
- $u_{\tau,h}(0) = u_{0,h}$ y $u_{\tau,h}(\tau) = u_{1,h}$ (aproximaciones respectivas de u^0 y u^1 en V_h).
- $u_{\tau,h}(t^{m+1}) = u_h^{m+1}$ (la solución aproximada de (90) determinada por $\mathcal{T}_h$).

Entonces es posible demostrar que existe una constante $K > 0$ tal que, si $\tau, h \to 0^+$ y $\tau \leq Kh$, las $u_{\tau,h}$ convergen, en un sentido adecuado, hacia la solución u cuando $\tau, h \to 0^+$.[1] Para más detalles, véase por ejemplo [1, 4]. □

[1] La condición precedente sobre τ y h quiere decir que, para un nivel de aproximación en espacio dado, la aproximación en tiempo elegida debe ser suficientemente buena. Generalmente, se conoce como *condición CFL* (de Courant-Friedichs-Levy).

Para conseguir aproximaciones numéricas de la solución de (86) (y otros problemas análogos correspondientes a condiciones de contorno distintas), se puede proceder de forma análoga.

Bibliografía

[1] COURANT, R., HILBERT, D., *Methods of mathematical physics, Vol. II: Partial differential equations.* Reprint of the 1962 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[2] EVANS, L.C., *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[3] JOHN, F., *Partial differential equations.* Reprint of the fourth edition. Applied Mathematical Sciences, 1. Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] QUARTERONI A., SACCO R., SALERI F., *Numerical Mathematics, 2nd edition.* Texts in Applied Mathematics, 37. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[5] TREVES, F., *Basic linear partial differential equations.* Reprint of the 1975 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.