7. La EDP de ondas (II): Otros resultados

Esta sección está dedicada a profundizar en varios aspectos de la EDP de ondas y sus soluciones. También, hablaremos de otras EDPs similares (en algunos casos más sencillas) que permiten modelar fenómenos ondulatorios.

7.1. El problema de Cauchy y su solución

Para comprender bien las propiedades que tienen las soluciones de la EDP de ondas, conviene formular (y resolver) el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = f(\mathbf{x},t), \quad (\mathbf{x},t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x},0) = u_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N, \end{cases} \tag{92}$$

donde $N = 1, 2$ ó 3 y las funciones f, u_0 y u_1 son dadas.

Veremos que, si estas funciones son suficientemente regulares, existe una única solución "clásica" de (92), esto es, una única $u \in C^2(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+) \cap C^1(\mathbf{R}^N \times \overline{\mathbf{R}}_+)$ que verifica la EDP precedente en todo punto de $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+$ y las condiciones de Cauchy precedentes en todo $\mathbf{R}^N \times \{0\}$. De hecho, veremos una fórmula explícita de u para cada valor de N. Para más detalles, véanse [1, 3].

Por el momento, supondremos que $f \equiv 0$ y consideraremos el correspondiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0, \quad (\mathbf{x},t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x},0) = u_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N. \end{cases} \tag{93}$$

Más adelante veremos cómo puede conseguirse la solución para una f arbitraria (y suficientemente regular).

7.1.1. El caso $N = 1$: fórmula de D'Alembert

Cuando $N = 1$, sabemos que u debe tener necesariamente la estructura

$$u = F(x + ct) + G(x - ct)$$

para determinadas funciones F y G. Si imponemos las condiciones iniciales, obtenemos fácilmente los valores de F y G y por tanto la expresión de u:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\, d\xi \qquad \forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \overline{\mathbf{R}}_+. \tag{94}$$

Se trata de la *fórmula de D'Alembert*. De entrada, nos dice que, si $u_0 \in C^2(\mathbf{R})$ y $u_1 \in C^1(\mathbf{R})$, el problema (93) posee solución clásica; por otra parte, teniendo en cuenta el argumento utilizado (hallar F y G), está claro que es única.

Aún más, vemos a partir de (94) que, para $t > 0$, $u(\cdot\,,t)$ conserva la regularidad inicial. En efecto, si $r \geq 2$ es un entero, tenemos:

$$u_0 \in C^r(\mathbf{R}),\ u_0 \in C^{r-1}(\mathbf{R}) \ \Rightarrow\ u(\cdot\,,t) \in C^r(\mathbf{R}),\ u_t(\cdot\,,t) \in C^{r-1}(\mathbf{R}) \ \ \forall t > 0.$$

Sea ahora $(\overline{x},\overline{t}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ un punto dado. En virtud de (94), el valor de u en $(\overline{x},\overline{t})$ depende exclusivamente de los valores de u_0 en $\overline{x} \pm c\overline{t}$ y de los valores de u_1 en el intervalo $[\overline{x} - c\overline{t}, \overline{x} + c\overline{t}]$. Por este motivo, $[\overline{x} - c\overline{t}, \overline{x} + c\overline{t}]$ se denomina *intervalo de dependencia* de $(\overline{x},\overline{t})$ para $t = 0$.

(Esto contrasta con lo que ocurre cuando se analiza el problema de Cauchy para la EDP del calor; en este último caso, si llamamos u a la solución, el valor de u en $(\overline{x}, \overline{t})$ depende de los valores del dato inicial u_0 en todo $\mathbf{R}$.)

Por otra parte, también se deduce de (94) que los valores de u_0 y u_1 en un punto x dado influyen, exclusivamente, sobre los valores que toma u en los $(\overline{x}, t)$ con $\overline{x} = x \pm ct$ y $t \geq 0$. Se dice entonces que $\{ (\overline{x}, t) : \overline{x} = x \pm ct, \quad t \geq 0 \}$ es el *dominio de influencia* de x.

Supongamos por simplicidad que

$$u_0 > 0 \text{ en } (-a, a), \quad u_0 = 0 \text{ en } \mathbf{R} \setminus (-a, a), \quad u_1 \equiv 0.$$

Sea $\overline{x}$ un punto exterior al intervalo $[-a, a]$. Entonces está claro que existen dos tiempos $\overline{t}_1$ y $\overline{t}_2$ con $0 < \overline{t}_1 < \overline{t}_2$ tales que

$$u(\overline{x}, t) \begin{cases} = 0, & \text{si } 0 \leq t \leq \overline{t}_1 \\ > 0, & \text{si } \overline{t}_1 < t < \overline{t}_2 \\ = 0, & \text{si } t \geq \overline{t}_2. \end{cases}$$

La interpretación que debe darse a este comportamiento es la siguiente:

> $[N = 1$:$]$ *Una señal que parte de $[-a, a]$ en el instante inicial llega a todos los puntos de* $\mathbf{R}$. *Para cada $\overline{x}$ exterior a este intervalo, la señal tarda un tiempo $\overline{t}_1$ en llegar, dado por*
>
> $$\overline{t}_1 = \frac{1}{c}\,(|\overline{x}| - a).$$
>
> *Durante un intervalo temporal $[\overline{t}_1, \overline{t}_2]$ de amplitud $2a/c$, la señal es percibida en $\overline{x}$. Posteriormente, para $t \geq \overline{t}_2$, la señal vuelve a ser invisible desde $\overline{x}$.*

Esta propiedad de las soluciones de (93) para $N = 1$ se denomina *Principio Óptico de Huygens*. Veremos más adelante que no siempre se cumple en dimensión superior.

7.1.2. El caso $N = 3$: fórmula de Poisson

Cuando $N = 3$, es posible deteminar la solución de (93) mediante el *método de las medias esféricas*.

La idea es la siguiente. Dada una función continua $f \in C^0(\mathbf{R}^3)$ y dados un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ y un radio $r > 0$, denominamos *media esférica* de f en $B(\mathbf{x}; r)$ a la cantidad

$$M(f; \mathbf{x}, r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(\mathbf{x};r)} f(\mathbf{z})\, d\Gamma(\mathbf{z}).$$

Ahora, sea u solución (clásica) de (93), fijemos $\mathbf{x}$ y consideremos la función $m = m(r, t)$, donde

$$m(r, t) := M(u(\cdot\,, t); \mathbf{x}, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(\mathbf{x};r)} u(\mathbf{z}, t)\, d\Gamma(\mathbf{z}) \quad \forall (r, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+.$$

Entonces

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \to 0^+} m(r, t),$$

la función $(r, t) \mapsto r m(r, t)$ es solución de una EDP de ondas 1D en las variables r y t y, además,

$$m(r, 0) = M(u_0; \mathbf{x}, r), \quad m_t(r, 0) = M(u_1; \mathbf{x}, r) \quad \forall r \in \mathbf{R}_+.$$

De estas propiedades, se puede deducir una fórmula para u, que se conoce con el nombre de *fórmula de Poisson:*

$$u(\mathbf{x},t) = (tM(u_0;\mathbf{x},ct))_t + tM(u_1;\mathbf{x},ct) \quad \forall(\mathbf{x},t) \in \mathbf{R}^3 \times \overline{\mathbf{R}}_+. \tag{95}$$

Así, si $u_0 \in C^3(\mathbf{R}^3)$ y $u_1 \in C^2(\mathbf{R}^3)$, el problema (92) posee solución clásica; por otra parte, teniendo en cuenta cómo hemos llegado a (95), queda claro que la solución es única.

Contrariamente a lo que vimos para $N = 1$, la regularidad inicial de u no se conserva para tiempos positivos. Más precisamente, como consecuencia de (95), para cada entero $r \geq 3$ tenemos la siguiente implicación:

$$u_0 \in C^r(\mathbf{R}^3),\ u_0 \in C^{r-1}(\mathbf{R}^3) \ \Rightarrow\ u(\cdot\,,t) \in C^{r-1}(\mathbf{R}^3),\ u_t(\cdot\,,t) \in C^{r-2}(\mathbf{R}^3) \ \ \forall t > 0.$$

Es decir, la EDP de ondas 3D conduce a una pérdida de regularidad instantánea que suele ser denominada *efecto focal.*

Desde un punto de vista práctico, esto tiene consecuencias: para transmitir una señal en $\mathbf{R}^3$, resulta fiable descomponerla en imágenes elementales que pueden ser transmitidas por medios (aproximadamente) unidimensionales y recomponer después, tras la recepción, la imagen completa. Por ejemplo, la transmisión por cable de una señal televisiva ofrece mayores garantías de calidad que la transmisión tradicional.

Fijemos ahora un punto $(\overline{\mathbf{x}},\overline{t}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+$. Gracias a (95), vemos que el valor de u en $(\overline{\mathbf{x}},\overline{t})$ depende exclusivamente de los valores de u_0 y u_1 en los $\mathbf{x} \in \partial B(\overline{\mathbf{x}};c\overline{t})$. Por este motivo, se dice que $\partial B(\overline{\mathbf{x}};c\overline{t})$ es el *dominio de dependencia* de $(\overline{\mathbf{x}},\overline{t})$ para $t = 0$.

(De nuevo, esto contrasta con lo que ocurre cuando se analiza el problema de Cauchy para la EDP del calor.)

Por otra parte, también se deduce de (95) que los valores de u_0 y u_1 en el punto $\mathbf{x}$ influyen, exclusivamente, sobre los valores que toma u en los $(\overline{\mathbf{x}},t)$ con $\overline{\mathbf{x}} \in \partial B(\mathbf{x};ct)$ y $t \geq 0$. Se dice que $\{\,(\overline{\mathbf{x}},t) : \overline{\mathbf{x}} \in \partial B(\mathbf{x};ct), \quad t \geq 0\,\}$ es el *dominio* o cono *de influencia* de $\mathbf{x}$.

Supongamos ahora que

$$u_0 > 0 \ \text{ en } \ B(0;\alpha),\ u_0 = 0 \ \text{ en } \ \mathbf{R}^3 \setminus B(0;\alpha),\ u_1 \equiv 0.$$

Sea $\overline{\mathbf{x}}$ un punto exterior a $\overline{B}(0;\alpha)$. Entonces, como en el caso unidimensional, existen dos tiempos $\overline{t}_1$ y $\overline{t}_2$ con $\overline{t}_1 < \overline{t}_2$ tales que

$$u(\overline{\mathbf{x}},t) \begin{cases} = 0, & \text{si } 0 \leq t \leq \overline{t}_1 \\ > 0, & \text{si } \overline{t}_1 < t < \overline{t}_2 \\ = 0, & \text{si } t \geq \overline{t}_2. \end{cases}$$

En otras palabras, volvemos a tener el Principio de Huygens:

> [$N = 3$:] *Una señal que parte de $B(0;\alpha)$ en el instante inicial llega a todos los puntos de $\mathbf{R}^3$. Para cada $\overline{\mathbf{x}}$ exterior a este intervalo, la señal tarda un tiempo $\overline{t}_1$ en llegar, dado por*
>
> $$\overline{t}_1 = \frac{1}{c}\,(|\overline{\mathbf{x}}| - \alpha).$$
>
> *Durante un intervalo temporal $[\overline{t}_1,\overline{t}_2]$ de amplitud $2\alpha/c$, la señal es percibida en $\overline{\mathbf{x}}$. Posteriormente, para $t \geq \overline{t}_2$, la señal vuelve a ser invisible desde $\overline{\mathbf{x}}$.*

Obviamente, esto concuerda con nuestra experiencia diaria: las señales sonoras, ópticas, etc. en $\mathbf{R}^3$ son percibidas durante un corto intervalo de tiempo y, después, “nos abandonan” dejándonos libres y permitiéndonos percibir otras con posterioridad.

7.1.3. El caso $N = 2$: fórmula de Hadamard

Para $N = 2$, podemos también hallar explícitamente la solución de (93). El método que hay que utilizar en este caso se debe a Hadamard y se conoce como *método del descenso.*

El argumento es bien sencillo: dadas $u_0 \in C^3(\mathbf{R}^2)$ y $u_1 \in C^2(\mathbf{R}^2)$, definimos las funciones $\tilde{u}_0$ y $\tilde{u}_1$, con

$$\tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3) := u_i(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \quad (i = 1, 2).$$

A continuación, resolvemos (93) para $N = 3$, con datos iniciales $\tilde{u}_i$; esto conduce a la solución $\tilde{u}$, dada por

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (tM(\tilde{u}_0; x_1, x_2, x_3, ct))_t + tM(\tilde{u}_1; x_1, x_2, x_3, ct) \quad \forall (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbf{R}^3 \times \overline{\mathbf{R}}_+.$$

Finalmente, observamos que $\tilde{u}$ es independiente de x_3 y de hecho sus valores están dados por

$$u(\mathbf{x}, t) = \left(t\tilde{M}(u_0; \mathbf{x}, ct)\right)_t + t\tilde{M}(u_1; \mathbf{x}, ct) \quad \forall (x, t) \in \mathbf{R}^2 \times \overline{\mathbf{R}}_+, \tag{96}$$

donde, para cada $f \in C^0(\mathbf{R}^2)$, hemos usado la notación

$$\tilde{M}(f; \mathbf{x}, r) := \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(\mathbf{x};r)} f(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}.$$

La *fórmula de Hadamard* (96) proporciona, para $u_0 \in C^3(\mathbf{R}^2)$ y $u_1 \in C^2(\mathbf{R}^2)$ dadas, la única solución clásica de (93) para $N = 2$.

Como en el caso tridimensional, la regularidad inicial de u no se conserva para t positivo. Para cada entero $r \geq 3$, tenemos sólo que

$$u_0 \in C^r(\mathbf{R}^2),\ u_0 \in C^{r-1}(\mathbf{R}^2) \ \Rightarrow\ u(\cdot\,, t) \in C^{r-1}(\mathbf{R}^2),\ u_t(\cdot\,, t) \in C^{r-2}(\mathbf{R}^2) \ \ \forall t > 0.$$

Dicho de otro modo, la EDP de ondas 2D también produce efecto focal.

Veamos a continuación cómo son los dominios de dependencia e influencia cuando $N = 2$.

Si $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+$, vemos a partir de (95) que el valor de u en $(\overline{x}, \overline{t})$ depende exclusivamente de los valores de u_0 y u_1 en los $\mathbf{x} \in B(\overline{\mathbf{x}}; c\overline{t})$. Por tanto, $B(\overline{\mathbf{x}}; c\overline{t})$ (y no $\partial B(\overline{\mathbf{x}}; c\overline{t})$) es el *dominio de dependencia* de $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t})$ para $t = 0$. Análogamente, es inmediato que los valores de u_0 y u_1 en $\mathbf{x}$ influyen, exclusivamente, sobre los valores que toma u en los $(\overline{\mathbf{x}}, t)$ con $\overline{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x}; ct)$ y $t \geq 0$; luego el *dominio* o cono *de influencia* de $\mathbf{x}$ es el conjunto $\{\, (\overline{\mathbf{x}}, t) : \overline{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{x}; ct), \quad t \geq 0\,\}$.

Una vez más, nos situamos en las condiciones siguientes:

$$u_0 > 0 \ \text{ en } \ B(0; \alpha),\ u_0 = 0 \ \text{ en } \ \mathbf{R}^2 \setminus B(0; \alpha),\ u_1 \equiv 0.$$

Sea, como antes, $\overline{\mathbf{x}}$ un punto exterior a $\overline{B}(0; \alpha)$. En base lo que precede, vemos que existe $\overline{t}_1 > 0$ tal que $u(\overline{\mathbf{x}}, t) = 0$ para $t \in [0, \overline{t}_1]$ y $u(\overline{\mathbf{x}}, t) > 0$ para $t > \overline{t}_1$ próximo a $\overline{t}_1$. Ahora bien, una vez superado el tiempo $\overline{t}_1$, el dominio de dependencia de $(\overline{\mathbf{x}}, t)$ siempre corta a $B(0; \alpha)$ en un conjunto de medida positiva. Luego ya siempre tenemos $u(\overline{\mathbf{x}}, t) > 0$.

Es decir, para $N = 2$, no se cumple el Principio de Huygens:

> [$N = 2$:] *Una señal que parte de $B(0; \alpha)$ en el instante inicial llega a todos los puntos de $\mathbf{R}^2$. Para cada $\overline{\mathbf{x}}$ exterior a este intervalo, la señal tarda un tiempo $\overline{t}_1$ en llegar, dado por*
>
> $$\overline{t}_1 = \frac{1}{c}\,(|\overline{\mathbf{x}}| - \alpha).$$
>
> *A partir de ese instante, la señal es percibida en $\overline{\mathbf{x}}$.*

Así, en un mundo bidimensional, es difícil (por no decir imposible) conseguir transmitir información. Que no se cumpla el Principio de Huygens es algo que también concuerda con nuestra experiencia, por ejemplo, cuando observamos las ondas generadas sobre la superficie de un estanque por la caída de una piedra.

7.1.4. Problemas con f no nula

A partir de las soluciones consideradas en las secciones precedentes, se puede calcular la solución de (92) con $f = f(\mathbf{x}, t)$ suficientemente regular. Para ello, sea $m = 1$ si $N = 1$ y $m = 2$ si $N \geq 2$. Conviene introducir para cada $\sigma \in [0, T]$ la aplicación $S(\sigma) : C^m(\mathbf{R}^N) \mapsto C^m(\mathbf{R}^N)$ que a cada h asigna la función $w(\cdot\,, \sigma)$, donde w es la única solución de

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \\ w(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad w_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N. \end{cases} \tag{97}$$

Denotemos W el espacio vectorial de las funciones $f \in C^0(\mathbf{R}^N \times \overline{\mathbf{R}}_+)$ tales que $f(\cdot\,, t) \in C^m(\mathbf{R}^N)$ para cada $t \geq 0$. Usaremos el resultado siguiente, conocido como *Principio de Duhamel:*

Teorema 7.1 *Supongamos que $f \in W$ y que $u_0 \equiv 0$ y $u_1 \equiv 0$ en* (92)*. La solución de* (92) *está dada por*

$$u(\cdot\,, t) = \int_0^t S(t - s) f(\cdot\,, s)\, ds \quad \forall t \in [0, T]. \tag{98}$$

La prueba es casi inmediata. Basta comprobar directamente que la función u dada por (98) verifica las propiedades adecuadas; para más detalles, véase [1, 3].

Descomponiendo la solución u de (92) en suma de soluciones con segundo miembro o condiciones iniciales nulas y teniendo en cuenta el Teorema 7.1 y las fórmulas (94), (95) y (96), es fácil conseguir expresiones explícitas.

Por ejemplo, en dimensión $N = 1$, vemos que, si $f \in W$, $u_0 \in C^2(\mathbf{R})$ y $u_1 \in C^1(\mathbf{R})$, el problema (92) posee solución clásica única, dada por

$$\begin{cases} u(x, t) = \dfrac{1}{2}\left(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)\right) + \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\, d\xi \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi, s)\, d\xi\, ds \quad \forall (x, t) \in \mathbf{R} \times \overline{\mathbf{R}}_+. \end{cases}$$

La fórmula (98) también sirve para determinar la solución de muchas otras EDPs de evolución lineales. Por ejemplo, denotemos $S(\sigma)$ la aplicación lineal que a cada $f \in H$ asigna el valor en $t = \sigma$ de la solución de (50) con $u_0 = f$ y $F = 0$. Entonces la única solución de (50) con $u_0 = 0$ es la función u definida por

$$u(t) := \int_0^t S(t - s) F(s)\, ds.$$

7.2. Otras EDPs ligadas a fenómenos ondulatorios

Esta sección está dedicada a presentar brevemente otras EDPs donde se modela el comportamiento ondulatorio de un sistema.

7.2.1. La EDP de transporte

Por simplicidad, consideremos el caso $N = 1$. La EDP de ondas puede escribirse en la forma

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u = 0, \quad \text{o bien} \quad (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0.$$

Por tanto, las soluciones de las EDPs

$$u_t - cu_x = 0 \quad \text{y} \quad u_t + cu_x = 0 \tag{99}$$

son soluciones de la EDP de ondas. Como ya se dijo, estas soluciones representan ondas que se desplazan a derecha o izquierda con velocidad c. Las EDPs se denominan *ecuaciones de transporte.*

Vemos que, por tanto, es razonable considerar problemas de Cauchy-Dirichlet para las EDPs (99). Por ejemplo, en el caso de la segunda de ellas, es natural complementar la EDP con condiciones iniciales y condiciones de contorno sobre la frontera lateral izquierda:

$$\begin{cases} u_1 + cu_x = 0, & (x,t) \in Q \\ u(0,t) = \alpha(t), & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,L) \end{cases} \tag{100}$$

Supongamos que $\alpha \in C^1([0,T])$, $u_0 \in C^1([0,L])$ y tenemos

$$\alpha(0) = u_0(0), \quad \alpha'(0) = -cu_0'(0).$$

Entonces es posible calcular la solución explícita de (100).

En efecto, pongamos

$$Q_1 = \{\, (x,t) \in Q : x < ct \,\}, \quad Q_2 = \{\, (x,t) \in Q : x > ct \,\}$$

y

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x - ct), & \text{si } (x,t) \in Q_1 \\ \alpha(t - \frac{1}{c}x), & \text{si } (x,t) \in Q_2. \end{cases}$$

Tenemos que $u \in C^1(\overline{Q})$ y es solución de (100) en el sentido clásico habitual; es decir, la EDP se verifica en todo $(x,t) \in Q$ y las condiciones adicionales se verifican para cada $t \in [0,T]$ y cada $x \in [0,L]$, respectivamente.

Como estaba previsto, vemos que u "transporta" los valores de u_0 y α sobre las rectas características de pendiente c.

Por supuesto, un estudio análogo es posible para la primera EDP de (**??**) y el problema de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_1 - cu_x = 0, & (x,t) \in Q \\ u(L,t) = \beta(t), & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{101}$$

7.2.2. Las EDPs de la elasticidad lineal. El sistema de Lamé

El sistema de elasticidad puede ser visto como una versión no escalar de la EDP de ondas. Su motivación es la siguiente.

Suponemos dado un abierto poligonal o poliédrico $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ($N = 2$ o $N = 3$) ocupado durante un intervalo de tiempo $[0,T]$ por un medio elástico y conservemos la notación $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T)$.

Denotaremos $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ el campo de *desplazamientos* de las partículas del medio durante dicho intervalo y supondremos que la talla de los $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ es suficientemente pequeña.

Sea $W \subset \Omega$ una bola. Supondremos que la resultante $\mathbf{E}(W,t)$ de los *esfuerzos de tensión* sobre W en el instante t (esto es, las fuerzas elásticas que las partículas situadas en puntos exteriores a W ejercen sobre las partículas situadas en puntos interiores) está dada por

$$\mathbf{E}(W,t) = \int_{\partial W} \sigma \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \tag{102}$$

donde σ es el tensor simétrico de componentes las σ_{ij}, con

$$\sigma_{ij} := \sum_{k,\ell=1}^{N} a_{ijk\ell}(\mathbf{x})\varepsilon_{k\ell}, \quad \varepsilon_{k\ell} := \frac{1}{2}(\partial_k u_\ell + \partial_\ell u_k) \quad \forall i,j,k,\ell = 1,\dots,N. \tag{103}$$

Aquí, los coeficientes $a_{ijk\ell} = a_{ijk\ell}(\mathbf{x})$ dependen de las propiedades del medio. Se supone que verifican las propiedades de simetría

$$a_{ijk\ell} = a_{ji\ell k} = a_{k\ell ij} \ \text{ c.p.d. en } \ \Omega, \quad \forall i,j,k,\ell = 1,\dots,N \tag{104}$$

y las propiedades de coercividad

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{N} a_{ijk\ell}(\mathbf{x})\xi_{ij}\xi_{k\ell} \geq \alpha \sum_{i,j=1}^{N} |\xi_{ij}|^2 \quad \forall \xi = \{\xi_{ij}\} \in \mathbf{R}^{N\times N}, \quad \text{c.p.d. en } \ \Omega, \quad \alpha > 0. \tag{105}$$

La hipótesis (102) se denomina *ley de comportamiento elástico.* Es aceptable siempre que nos encontremos en presencia de pequeños desplazamientos. Por el contrario, no es admisible si las deformaciones superan cierto tamaño crítico; véase por ejemplo [2].

El principio de conservación de la cantidad de movimiento (segunda ley de Newton) dice que, para cada bola $W \subset \Omega$ y cada $t \in (0,T)$, debemos tener

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_t \, d\mathbf{x} = \int_{\partial W} \sigma \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_W \mathbf{F}(\mathbf{x},t) \, d\mathbf{x}, \tag{106}$$

donde $\rho = \rho(\mathbf{x})$ es la densidad de masa del medio y $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ es una densidad de esfuerzos exteriores.

Es fácil deducir de (106) el sistema de EDPs

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt} - \nabla \cdot \sigma = \mathbf{F}(\mathbf{x},t)$$

que, componente a componente, se escribe así:

$$\rho(\mathbf{x})u_{j,tt} - \sum_{i=1}^{N} \partial_i \sigma_{ij} = F_j(\mathbf{x},t), \quad j = 1,\dots,N$$

(recuérdese que las σ_{ij} dependen linealmente de las derivadas espaciales de las u_j; véase (103)).

Como siempre, debemos complementar el sistema con condiciones de contorno sobre Σ y condiciones iniciales para $t = 0$.

Sea $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ una partición de $\partial\Omega$ con los Γ_m medibles y

$$\int_{\Gamma_0} d\Gamma > 0.$$

Pongamos $\Sigma_m := \Gamma_m \times (0,T)$ para $m = 0,1$ y sean $\overline{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega)^N$ y $\mathbf{g} \in L^2(\Sigma_1)^N$. Impondremos las condiciones de contorno

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \ \Sigma_0$$

y

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre} \quad \Sigma_1.$$

Estamos diciendo de este modo que, sobre Σ_0, los desplazamientos de las partículas son dados (por ejemplo, tiene sentido fijar $\mathbf{u}$ igual a cero sobre una parte del borde). También, estamos suponiendo que, sobre Σ_1, se aplican esfuerzos desde el exterior.

Por otra parte, dados los campos de desplazamientos iniciales $\mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega)^N$ y $\mathbf{u}_1 \in L^2(\Omega)^N$, impondremos las condiciones de Cauchy

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Finalmente, obtenemos el problema de Cauchy-Dirichlet-Neumann siguiente:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt} - \nabla \cdot \sigma = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q \\ \sigma_{ij} = \displaystyle\sum_{k,\ell=1}^{N} a_{ijk\ell}(\mathbf{x})\varepsilon_{k\ell}, \quad \varepsilon_{k\ell} = \frac{1}{2}(\partial_k u_\ell + \partial_\ell u_k) & \\ \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_0 \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_1 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{107}$$

Bajo hipótesis adecuadas para ρ, $\mathbf{F}$, $\overline{\mathbf{u}}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}_1$, es posible definir el concepto de solución débil de (108) y aplicar el Teorema 6.1, quedando probado de este modo un resultado de existencia y unicidad.

Un caso particular importante es el de un medio *isótropo* y *homogéneo.* Corresponde a la situación siguiente:

- La densidad de masa ρ y los coeficientes $a_{ijk\ell}$ son constantes.
- Existen constantes positivas μ y λ tales que

$$a_{ijk\ell} = 2\mu\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \lambda\delta_{ij}\delta_{k\ell} \quad \forall i, j, k, \ell = 1, \dots, N.$$

En este caso, la escritura de las EDPs de (108) se simplifica notablemente. En el problema que resulta, denominado *sistema de Lamé,* tenemos

$$\sigma = 2\mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\,\mathrm{Id}.$$

y lo que sigue:

$$\begin{cases} \rho\mathbf{u}_{tt} - \sigma \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q \\ \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_0 \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_1 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{108}$$

No es difícil adaptar los argumentos y resultados de la Sección 7 en el contexto particular de (108). Así, supongamos (por ejemplo) $\rho = 1$, $\mathbf{F} \in L^2(Q)^N$, $\overline{\mathbf{u}} = 0$, $\mathbf{g} \in L^2(\Sigma_1)^N$, $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) \in V \times L^2(\Omega)^N$, donde

$$V = \{\, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N : \mathbf{v} = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma_0 \,\}$$

y pongamos

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \left[\frac{\mu}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t) \cdot (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})\right] d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

y

$$b(t)(\mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{F}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}\,d\Gamma \quad \forall \mathbf{v}\in V, \quad \text{c.p.d. en } \ (0,T).$$

Definición 7.1 *Se dice que* $\mathbf{u}$ *es solución débil de* (108) *si*

$$\begin{cases} u \in C^0([0,T];V)\cap C^1([0,T];L^2(\Omega)^N) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u},\mathbf{v})_{L^2} + a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = b(t)(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}\in V, \quad c.p.d.\ en \ \ (0,T) \\ \mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_t\big|_{t=0} = \mathbf{u}_1. \end{cases} \tag{109}$$

De nuevo, el Teorema 6.1 puede ser aplicado. En consecuencia, tenemos:

Teorema 7.2 *En las condiciones precedentes, existe una única solución débil de* (109)*.*

Bibliografía

[1] Courant, R., Hilbert, D., *Methods of mathematical physics, Vol. II: Partial differential equations.* Reprint of the 1962 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[2] Duvaut, G., Lions, J.-L., *Inequalities in mechanics and physics.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[3] John, F., *Partial differential equations.* Reprint of the fourth edition. Applied Mathematical Sciences, 1. Springer-Verlag, New York, 1991.