3. EDPs elípticas lineales

En esta sección consideraremos modelos correspondientes a fenómenos *estacionarios,* es decir, con un comportamiento independiente del tiempo. Encontramos una primera motivación cuando queremos describir un fenómeno térmico transcurrido mucho tiempo, cuando la temperatura alcanza valores que sólo dependen de la variable espacial.

3.1. Soluciones fuertes

En primer lugar, consideramos el *problema de Dirichlet para la EDP de Poisson:*

$$\begin{cases} -k\Delta\theta = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \theta = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

donde $k > 0$ y f son dadas.

Teorema 3.1 *Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. Entonces existe una única función $\theta = \theta(\mathbf{x})$ que verifica lo siguiente:*

1. *En casi todo Ω, θ es diferenciable respecto de las x_i, las $\partial_i\theta$ son diferenciables respecto de las x_j y*
$$\theta, \partial_i\theta, \partial_i\partial_j\theta \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j.$$
2. $-k\Delta\theta = f$ *c.p.d. en* Ω.
3. $\theta \in C^0(\overline{\Omega})$ *y* $\theta\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Además, si $f \geq 0$ c.p.d., tenemos que $\theta \geq 0$.

Para la demostración, véase [3]. Se dice que θ es la (única) *solución fuerte* de (14).

Observación 3.1 De nuevo, podemos enunciar el mismo resultado para otros muchos sistemas análogos:

- En (14), podemos utilizar otras condiciones sobre $\partial\Omega$.
- Si los a_{ij}, b_i, c son dados, con
$$a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad b_i, c \in L^\infty(\Omega),$$
$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}, t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \quad \mathbf{x} \text{ c.p.d. en } \Omega, \quad \alpha > 0$$
y ponemos
$$Lz := -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j z) + \sum_{i=1}^N b_i(\mathbf{x})\partial_i z + c(\mathbf{x})z,$$
podemos cambiar la EDP de (14) y escribir
$$\begin{cases} L\theta = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \theta = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$
La existencia y unicidad de solución fuerte continúa siendo cierta. □

3.2. Soluciones débiles

En las aplicaciones, es usual encontrar problemas similares a (14) con coeficientes a_{ij} discontinuos (por ejemplo, constantes a trozos). En casos así no tiene sentido hablar de soluciones fuertes y necesitamos resultados de existencia en un marco más general. Dicho de otro modo, necesitamos *generalizar* o *debilitar* el concepto de solución.

Con este objetivo en mente, presentaremos a continuación un marco abstracto donde encuadrar el problema.

3.2.1. Un resultado abstracto: Teorema de Lax-Milgram

Supongamos dados un espacio de Hilbert V, una forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot) : V \times V \mapsto \mathbf{R}$ y una foma lineal $\ell : V \mapsto \mathbf{R}$ sobre V.

Teorema 3.2 (Lax-Milgram) *Supongamos que $a(\cdot\,,\cdot)$ es continua, esto es,*

$$\exists M > 0 \quad \textit{tal que} \quad |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall u,v \in V \tag{15}$$

y coerciva, esto es:

$$\exists \alpha > 0 \quad \textit{tal que} \quad |a(v,v)| \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \tag{16}$$

Supongamos por otra parte que ℓ es continua, es decir,

$$\exists C > 0 \quad \textit{tal que} \quad |\ell(v)| \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V. \tag{17}$$

Entonces existe una única solución del problema siguiente:

$$\begin{cases} \textit{Hallar} \quad u \in V \quad \textit{tal que} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{18}$$

Como veremos, este resultado es fundamental para poder resolver problemas como (14) en condiciones muy generales. La demostración puede encontrarse en [2].

Se pueden hacer varios comentarios interesantes sobre el Teorema 3.2:

- La solución u depende continuamente del dato ℓ: en efecto, si ℓ_1 yℓ_2 son dos formas lineales continuas sobre V, es decir, dos elementos del *dual* V' y denotmaos $\|\cdot\|_*$ la norma en V', entonces las soluciones asociadas u_1 y u_2 verifican:

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|\ell_1 - \ell_2\|_* \,.$$

- Pongamos

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v). \tag{19}$$

  Entonces, si en el Teorema 3.2 la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ es además simétrica, la solución de (18) es también la única solución del problema de mínimos

$$\begin{cases} \text{Hallar} \quad u \in V \quad \text{tal que} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{20}$$

  Si $a(\cdot\,,\cdot)$ no es simétrica pero está en las condiciones del Teorema 3.2, se puede considerar el problema (20), que vuelve a tener solución única u; aunque en ese caso u no es solución de (18) sino del problema siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar} \quad u \in V \quad \text{tal que} \\ \dfrac{1}{2}\left(a(u,v) + a(v,u)\right) = \ell(v) \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

- Existe una versión no lineal del Teorema 3.2: *Teorema de Lions-Stampacchia.* Dice lo siguiente: sean V, $a(\cdot\,,\cdot)$ y ℓ como antes y sea $K \subset V$ un convexo cerrado; entonces existe una única solución del problema
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Hallar}\ \ u \in K\ \ \text{tal que}\\ a(u, v-u) \geq \ell(v-u) \quad \forall v \in K.\end{array}\right. \tag{21}$$
De nuevo, si $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica, la solución de (18) es también la única solución de un problema de mínimos:
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Hallar}\ \ u \in K\ \ \text{tal que}\\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K.\end{array}\right.$$
□

- Hemos visto en el Teorema 3.2 que, suponiendo que $a(\cdot\,,\cdot)$ verifica (15) y $\ell \in V'$, (16) es una condición suficiente para la existencia y unicidad de solución de (18). Pero no es una condición necesaria (eso se entiende fácilmente cuando se analiza el caso en que la dimensión de V es finita). Una condición necesaria y suficiente es la siguiente, llamada hipótesis de *coercividad débil* de $a(\cdot\,,\cdot)$:
$$\operatorname*{ínf}_{u\in V}\sup_{v\in V}\frac{a(u,v)}{\|u\|_V\|v\|_V} > 0 \quad \text{y} \quad \sup_{u\in V}\frac{a(u,v)}{\|u\|_V} > 0 \ \ \text{para} \ \ v \neq 0.$$
Cuando la dimensión de V es finita y tenemos $a(u,v) := Bu \cdot v$ para una matriz cuadrada B, estas dos condiciones quieren decir que existe $\beta > 0$ tal que $|Mz| \geq \beta|z|$ para todo $z \in V$ y que $M^t z \neq 0$ si $z \neq 0$, respectivamente. Para más detalles, véase [1, **?**].

3.2.2. Derivadas generalizadas y espacios de Sobolev

Por simplicidad y para fijar ideas, supondremos que $N \leq 3$ y que la frontera $\partial\Omega$ de Ω es la unión de dos puntos (si $N = 1$), una poligonal (si $N = 2$) o una superficie poliédrica (si $N = 3$). Esto permite hablar sin ambigüedad de la medida superficial $d\Gamma$ sobre $\partial\Omega$ y de los espacios $L^p(\partial\Omega)$ para $1 \leq p \leq +\infty$.

Consideremos a continuación varios espacios de funciones (o clases de funciones) definidas en Ω.

El *más pequeño* de todos es
$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\, \varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{sop}(\varphi) \subset \Omega \,\}.$$
Recuérdese que $\operatorname{sop}(\varphi)$ s la adherencia del conjunto donde φ no es cero; se trata por tanto de un compacto y las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ se anulan en un entorno de $\partial\Omega$.

El espacio *más grande* es $L^1_{loc}(\Omega)$. Se define del modo siguiente. En primer lugar, denotamos $\mathcal{M}(\Omega)$ la familia de las funciones $v : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ que son *medibles.* En segundo lugar, ponemos
$$\mathcal{N}(\Omega) := \{\, v \in \mathcal{M}(\Omega) : v = 0 \ \ \text{c.p.d.} \,\}$$
y
$$\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) := \{\, v \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_K |v|\, d\mathbf{x} < +\infty \ \ \forall K \subset \Omega \ \text{compacto} \,\}.$$
Finalmente, $L^1_{loc}(\Omega)$ es el siguiente espacio de clases:
$$L^1_{loc}(\Omega) := \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega).$$

Así, dada $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, tiene sentido hablar de la integral de v en todo compacto $K \subset \Omega$. Es posible escribir que $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, identificando toda función con la clase a la que pertenece (formada por todas las funciones que coinciden con ella en casi todo). En lo que sigue, trabajaremos con nuevos espacios $X(\Omega)$ que son intermedios, es decir, verifican

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset X(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$

Para ello, necesitamos previamente hablar de *derivadas generalizadas:*

Definición 3.1 *Sea $v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se dice que v posee derivada generalizada respecto de la variable x_i si existe $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega w\, \varphi\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega v\, \partial_i \varphi\, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En tal caso, w es única y se denomina "derivada generalizada de v respecto de x_i".

Si (por ejemplo) $v \in C^0(\Omega)$, existe la derivada parcial clásica $\partial_i v(\mathbf{x})$ en todo $\mathbf{x} \in \Omega$ y la función $\mathbf{x} \mapsto \partial_i v(\mathbf{x})$ es continua, entonces v posee derivada generalizada y ésta coincide con $\partial_i v$. Por este motivo, denotaremos también $\partial_i v$ la derivada generalizada de v caso de que exista.

No obstante, es fácil construir ejemplos de funciones que poseen derivadas generalizadas, pero no derivadas en el sentido clásico. Por ejemplo, cuando $N = 1$, toda función continua afín a trozos posee derivada generalizada pero no derivada clásica en todos los puntos.

Definición 3.2 (Espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$) *Pongamos*

$$H^1(\Omega) := \{\, v \in L^2(\Omega) : \exists \partial_i v \in L^2(\Omega) \ \ \textit{para} \ \ 1 \le i \le N \,\}.$$

Dotado de las operaciones habituales, $H^1(\Omega)$ es un espacio vectorial. La aplicación

$$(u, v) \mapsto (u, v)_{H^1} := \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^N \partial_i u \partial_i v \right) d\mathbf{x}$$

es un producto escalar en $H^1(\Omega)$ y, dotado de éste, $H^1(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert separable.

Definición 3.3 (Espacio de Sobolev $H^1_0(\Omega)$) *Denominaremos $H^1_0(\Omega)$ la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Obviamente, $H^1_0(\Omega)$ es un nuevo espacio de Hilbert separable.*

A continuación, presentaremos dos de las propiedades más importantes de los espacioes de Sobolev. Para las demostraciones, véase por ejemplo [2, 3].

Teorema 3.3 (Teorema de trazas en $H^1(\Omega)$) *La aplicación lineal $v \in C^1(\overline{\Omega}) \mapsto v\big|_{\partial\Omega}$ se extiende por densidad a una única aplicación lineal continua $\gamma : H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$ que tiene las propiedades siguientes:*

1. *$N(\gamma) = H^1_0(\Omega)$ y $R(\gamma)$ es un subespacio propio de $L^2(\partial\Omega)$.*

2. *Si $u, v \in H^1(\Omega)$, se tiene la siguiente fórmula de integración por partes:*

$$\int_\Omega \partial_i u\, v\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega u\, \partial_i v\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \gamma u\, \gamma v\, n_i\, d\Gamma,$$

donde $n_i = n_i(\mathbf{x})$ es la i-ésima componente del vector normal unitario exterior a Ω.

De acuerdo con este resultado, es posible dar un sentido (generalizado) a la "restricción" de una función de $H^1(\Omega)$ a la frontera $\partial\Omega$. Si tuviéramos interés en resolver (por ejemplo) un problema de Dirichlet para una EDP elíptica con condición

$$u = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

sería natural (y en cierto modo suficiente) buscar u en $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 3.4 (Desigualdad de Poincaré) *Existe una constante $C(\Omega) > 0$ tal que*

$$\|v\|_{L^2} \leq C(\Omega)\|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{22}$$

Esta desigualdad no es cierta en general para una función de $H^1(\Omega)$. Por otra parte, en la demostración del Teorema 3.4 juega un papel esencial que Ω sea acotado (si Ω es un abierto conexo no acotado en ninguna dirección, el resultado no es cierto).

Una clara consecuencia de (22) es que, en $H_0^1(\Omega)$, la seminorma

$$v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2} \tag{23}$$

es de hecho una norma Hilbertiana (es decir, inducida por un producto escalar) equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$.

3.2.3. Aplicaciones (I): Problema de Dirichlet

Supongamos dados los a_{ij}, c, con

$$\begin{gathered} a_{ij} = a_{ji}, c \in L^\infty(\Omega) \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x},t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \quad \mathbf{x} \ \text{ c.p.d. en } \ \Omega \ \ \alpha > 0 \quad \text{c.p.d. en } \ \Omega \\ c \geq 0 \end{gathered} \tag{24}$$

y sean

$$f \in L^2(\Omega), \quad g = \gamma\overline{u} \ \text{ con } \ \overline{u} \in H^1(\Omega). \tag{25}$$

Pongamos

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u) + c(\mathbf{x})u,$$

y consideremos el problema

$$\begin{cases} Lu = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{26}$$

usualmente denominado *problema de Dirichlet* para la EDP $Lu = f(\mathbf{x})$.

En general, no es posible probar la existencia de solución fuerte de (26). Necesitamos por tanto *debilitar* el concepto de solución. Para ello, haremos el razonamiento siguiente:

- Supongamos en primer lugar que $g = 0$. Por tanto, el problema es

$$\begin{cases} Lu = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{27}$$

- En primer lugar, vemos que es natural buscar la solución en $H_0^1(\Omega)$. De este modo, la condición de contorno será automáticamente satisfecha, al menos, en un senido generalizado.

- Supongamos que todos los datos son regulares y u es una solución también regular (por ejemplo, todos los coeficientes y u pertenecen a $C^2(\overline{\Omega})$). Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Multiplicando la EDP por φ e integrando en Ω obtenemos:

$$\int_\Omega \left(-\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u) + c(\mathbf{x})u \right) \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f \cdot \varphi \, d\mathbf{x}.$$

  Integrando por partes en esta igualdad y teniendo en cuenta que φ se anula sobre $\partial\Omega$, vemos entonces que

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u \, \partial_i \varphi + c(\mathbf{x})u\varphi \right) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi \, d\mathbf{x}.$$

  En consecuencia, dado que la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ es $H_0^1(\Omega)$, tiene sentido pedir que se cumplan estas igualdades para φ cualquiera en $H_0^1(\Omega)$.

- En el caso general, con $g = \gamma\overline{u}$ y $\overline{u} \in H^1(\Omega)$, tiene sentido buscar u en la variedad lineal $\overline{u}+H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$. Si ponemos $u = \overline{u}+w$, tiene entonces sentido pedirle a w que pertenezca a $H_0^1(\Omega)$ y verifique

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j w \, \partial_i \varphi + c(\mathbf{x})w\varphi \right) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(f\varphi - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j \overline{u} \, \partial_i \varphi \right) \, d\mathbf{x}$$

  para toda φ en $H_0^1(\Omega)$.

Todo esto motiva la siguiente

Definición 3.4 *Se dice que u es solución débil de* (26) *si $u = \overline{u} + w$, donde*

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j w \, \partial_i v + c(\mathbf{x})wv \right) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(fv - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j \overline{u} \, \partial_i v \right) \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{28}$$

Observación 3.2 Vemos que u es solución débil si y sólo si

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \overline{u} + H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u \, \partial_i v + c(\mathbf{x})uv \right) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega fv \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

□

Tenemos el resultado siguiente:

Teorema 3.5 *Bajo las hipótesis* (24)–(24)*, existe una única solución débil de* (26)*.*

Prueba: Pongamos

$$a(w,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j w \, \partial_i v + c(\mathbf{x})wv \right) \, d\mathbf{x}$$

y

$$\ell(v) := \int_\Omega \left(fv - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j \overline{u}\,\partial_i v \right)\,d\mathbf{x}.$$

Entonces $a(\cdot\,,\cdot)$ es una forma bilineal continua y coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$ y ℓ es una forma lineal continua sobre el mismo espacio.

En efecto, lo único que no es trivial es la coercividad de $a(\cdot\,,\cdot)$. Pero, gracias a (24) y a la desigualdad de Poincaré,

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j v\,\partial_i v + c(\mathbf{x})|v|^2 \right)\,d\mathbf{x} \\ &\geq \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i v|^2 \right)\,d\mathbf{x} \\ &\geq \overline{\alpha}\|v\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

para algún $\overline{\alpha}$ independiente de v.

En virtud del Teorema 3.2, tenemos garantizada la existencia y unicidad de solución débil de (26). $\square$

Observación 3.3 Realmente, el argumento que condice de (26) a (28) posee un recíproco: se puede probar que, si $u = \overline{u} + w$, w verifica (28) y los datos y u son suficientemente regulares, entonces u essolución fuerte de (26). $\square$

Observación 3.4 Dado que la forma blineal precedente es simétrica, w está caracterizada por ser la única solución de un determinado problema de mínimos. No es difícil comprobar que esto le ocurre también a u. Más precisamente, u es la única función de $\overline{u} + H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$J(u) \leq J(z) \quad \forall z \in \overline{u} + H_0^1(\Omega),$$

donde J está dado por (19). $\square$

3.2.4. Aplicaciones (II): Problema de Neumann

Supongamos ahora que los a_{ij} son como en (24) y que c verifica la hipótesis más fuerte

$$c \geq c_0 > 0 \text{ c.p.d. en } \Omega. \tag{29}$$

Sea $h \in L^2(\partial\Omega)$ y consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} Lu = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, n_i(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{30}$$

donde $n_i = n_i(\mathbf{x})$ es la i-ésima componente del vector normal exterior a Ω.

De nuevo, en general no es posible probar la existencia de solución fuerte de (30) y tenemos que recurrir a un concepto más débil. El razonamiento que seguiremos aquí es análogo al utilizado en la sección precedente y se compon de los pasos siguientes:

- Aceptemos que todos los datos son regulares y u es una solución también regular y elijamos φ en $C^\infty(\overline{\Omega})$ (ahora u no tiene por qué anularse sobre $\partial\Omega$; por tanto, tiene sentido permitir a φ lo mismo). Multiplicando la EDP por φ, integrando en Ω y llevando a cabo integración por partes, resulta:

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, \partial_i \varphi + c(\mathbf{x}) u\varphi \right) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, n_i \right) \varphi \, d\Gamma = \int_\Omega f\varphi \, d\mathbf{x}.$$

  Y, teniendo en cuenta la condición de contorno impuesta, llegamos a que

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, \partial_i \varphi + c(\mathbf{x}) u\varphi \right) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} h\varphi \, d\Gamma. \tag{31}$$

- Por tanto, tiene sentido pedirle a u que pertenezca a $H^1(\Omega)$ y verifique (31) para toda φ en $H^1(\Omega)$.

Así, queda motivada la siguiente

Definición 3.5 *Se dice que u es solución débil de* (30) *si*

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, \partial_i v + c(\mathbf{x}) uv \right) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega fv \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} hv \, d\Gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Aquí, en la integral sobre $\partial\Omega$, los valores de v se interpretan en el sentido de la traza.

Tenemos el resultado siguiente:

Teorema 3.6 *Bajo las hipótesis* (24)–(24) *y* (29)*, existe una única solución débil de* (30).

Prueba: En este caso, pondremos

$$a(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, \partial_i v + c(\mathbf{x}) uv \right) \, d\mathbf{x}$$

y

$$\ell(v) := \int_\Omega fv \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} hv \, d\Gamma.$$

Encontramos que $a(\cdot\,,\cdot)$ y ℓ son, respectivamente, una forma bilineal continua y coerciva y una forma lineal continua sobre $H^1(\Omega)$.

En efecto, la coercividad de $a(\cdot\,,\cdot)$ se obtiene así:

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j v\, \partial_i v + c(\mathbf{x}) |v|^2 \right) \, d\mathbf{x} \\ &\geq \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i v|^2 \right) \, d\mathbf{x} + c_0 \int_\Omega |v|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\geq \text{mín}(\alpha, c_0) \|v\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, la continuidad de ℓ es consecuencia de las estimaciones que siguen:

$$\begin{aligned}|\ell(v)| &\leq \left|\int_\Omega fv\,d\mathbf{x}\right| + \left|\int_{\partial\Omega} hv\,d\Gamma\right|\\ &\leq \|f\|\|v\| + \|h\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\gamma v\|_{L^2(\partial\Omega)}\\ &\leq C\|v\|_{H^1}.\end{aligned}$$

De nuevo, en virtud del Teorema 3.2, tenemos garantizada la existencia y unicidad de solución débil de (30). □

Observación 3.5 La hipótesis (29) es necesaria. En efecto, es fácil probar que, por ejemplo, no puede existir solución débil del problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \mathbf{x}\in\Omega\\ \displaystyle\sum_{i=1}^N \partial_i u\, n_i(\mathbf{x}) = 1, & \mathbf{x}\in\partial\Omega,\end{cases}$$

Por otra parte, en las condiciones del Teorema 3.6, u está de nuevo caracterizada por ser la única solución de un determinado problema de mínimos. □

3.2.5. Aplicaciones (III): Problemas de Fourier y otros

Aparte de (26) y (30), muchos otros problemas pueden ser resueltos (en el sentido débil) con ayuda del Teorema 3.2.

Por ejemplo, eso ocurre con el denominado problema de Fourier:

$$\begin{cases} Lu = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Omega\\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, n_i(\mathbf{x}) + \kappa(\mathbf{x})u = k(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{32}$$

donde L y f son como en la sección precedente y suponemos además que

$$\kappa \in L^\infty(\partial\Omega),\quad \kappa\geq 0 \ \text{ c.p.d. sobre } \partial\Omega \text{ y } \ k\in L^2(\partial\Omega). \tag{33}$$

Si suponemos que los datos son regulares y u es una solución regular de (32), multiplicando por una función φ arbitraria en $C^\infty(\overline{\Omega})$ y realizando las operaciones habituales, obtenemos

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\,\partial_i\varphi + c(\mathbf{x})u\varphi\right)d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}\kappa\, u\varphi\,d\Gamma = \int_\Omega f\,\varphi\,d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k\,\varphi\,d\Gamma. \tag{34}$$

Esto conduce a la

Definición 3.6 *Se dice que u es solución débil de* (32) *si*

$$\begin{cases} u\in H^1(\Omega)\\ \displaystyle\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\,\partial_j u\,\partial_i v + c(\mathbf{x})\,uv\right)d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}\kappa\,uv\,d\Gamma = \int_\Omega f\,v\,d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k\,v\,d\Gamma \quad \forall v\in H^1(\Omega).\end{cases}$$

En las integrales sobre $\partial\Omega$, los valores de u y de v se interpretan en el sentido de las trazas.

Teorema 3.7 *Bajo las hipótesis* (24)–(25), (29) *y* (33), *existe una única solución débil de* (32).

Prueba: Pongamos

$$a(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, \partial_i v + c(\mathbf{x})uv \right) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \kappa u\varphi \, d\Gamma \tag{35}$$

y

$$\ell(v) := \int_\Omega fv\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} kv\, d\Gamma.$$

Un vez más, $a(\cdot\,,\cdot)$ y ℓ son, respectivamente, una forma bilineal continua y coerciva y una forma lineal continua sobre $H^1(\Omega)$. Luego podemos aplicar el Teorema 3.2 y deducir la existencia y unicidad de solución débil de (32). □

Observación 3.6 El resultado continúa siendo cierto sin imponer (29), a condición de reforzar la hipótesis sobre κ y dejarla así:

$$\kappa \geq 0 \text{ c.p.d. y existe un abierto no vacío } \Gamma_F \subset \partial\Omega \text{ tal que } \kappa \geq \kappa_0 > 0 \text{ c.p.d. sobre } \Gamma_F.$$

La razón es que esta condición, junto con (24)–(24) y (33), permite probar la coercividad de la forma bilineal (35) (la prueba no es simple y escapa del nivel de este curso; véase [3]). □

Hasta el momento, hemos considerado problemas donde la EDP era complementada con una condición de contorno de un mismo tipo sobre toda la frontera $\partial\Omega$. Pero también es posible considerar distintas condiciones de contorno en distintas partes de $\partial\Omega$.

Por ejemplo, tiene sentido descomponer $\partial\Omega$ en la forma

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

con Γ_i una unión de caras o lados completos para $i = 0, 1$ y formular el problema siguiente (de tipo Dirichlet-Neumann):

$$\begin{cases} Lu = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_0 \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\partial_j u\, n_i(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \end{cases} \tag{36}$$

donde L, f y g son como en la Sección 3.2.3 (en particular, $g = \gamma\overline{u}$, con $\overline{u} \in H^1(\Omega)$) y

$$h \in L^2(\Gamma_1). \tag{37}$$

Sea

$$V := \{\, v \in H^1(\Omega) : \gamma v = 0 \;\; \text{c.p.d. sobre} \;\; \Gamma_0 \,\}.$$

Obsérvese que V es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ y, por tamto, un nuevo espacio de Hilbert para el mismo producto escalar. Se puede demostrar además que, en V, la seminorma (23) es de hecho una norma equivalente a $\|\cdot\|_{H^1}$.

Con argumentos similares a los que preceden, llegamos al concepto de solución débil siguiente:

Definición 3.7 *Se dice que u es solución débil de* (32) *si $u = \overline{u} + w$, donde*

$$\begin{cases} w \in V \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_j w \, \partial_i v + c(\mathbf{x}) wv \right) d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(fv - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_j \overline{u} \, \partial_i v \right) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} hv \, d\Gamma \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

En la integral sobre Γ_1, los valores de v se interpretan en el sentido de la traza.

Hay una manera equivalente de decir qué tiene que verificar u:

$$\begin{cases} u \in \overline{u} + V \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_j u \, \partial_i v + c(\mathbf{x}) uv \right) d\mathbf{x} = \int_\Omega fv \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} hv \, d\Gamma \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Y también tenemos un resultado de existencia y unicidad:

Teorema 3.8 *Bajo las hipótesis* (24)–(25) *y* (37)*, existe una única solución débil de* (36)*.*

En las aplicaciones, es muy frecuente esta situación. Por ejemplo, tiene sentido tratar de calcular una temperatura que se conoce sobre una parte de la frontera y posee un flujo de calor conocido sobre otra parte.

Bibliografía

[1] Babuska, I.; Whiteman, J.R.; Strouboulis, T., *Finite elements. An introduction to the method and error estimation.* Oxford University Press, Oxford, 2011.

[2] Boffi, D.; Brezzi, F.; Fortin, M., *Mixed finite element methods and applications.* Springer Series in Computational Mathematics, 44. Springer, Heidelberg, 2013.

[3] Brezis, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[4] Evans, L.C., *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.