COMPLEMENTOS DE MODELIZACIÓN Y OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Trabajo 2 **Curso 2015/16**

1. Se considera el sistema elíptico-parabólico

$$\begin{cases} -\Delta y = z, \quad (x,t) \in Q := \Omega \times (0,T), \\ z_t - \Delta z + \rho z = v 1_\omega, \quad (x,t) \in Q, \\ y = 0, \quad z = 0, \quad (x,t) \in \Sigma := \partial\Omega \times (0,T), \\ z(x,0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω y ω son abiertos con las propiedades habituales, $T > 0$, $\rho > 0$, $z_0 \in L^2(\Omega)$ y $v \in L^2(\omega \times (0,T))$. Probar que, para cada $v \in L^2(\omega \times (0,T))$, existe una única solución de (1) que, entre otras cosas, verifica

$$y, z \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$$

2. Sea

$$J(v) := \frac{a_1}{2} \iint_Q |y - \overline{y}|^2 \, dx \, dt + \frac{a_2}{2} \int_\Omega |z(x,T) - z_d(x)|^2 \, dx + \frac{b}{2} \iint_{\omega \times (0,T)} |v|^2 \, dx \, dt,$$

donde $a_1, a_2, b > 0$, $a_1 + a_2 + b = 1$, $z_d \in L^2(\Omega)$, $\overline{y} \in L^2(Q)$, sea $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \subset L^2(\omega \times (0,T))$ un convexo cerrado no vacío y consideremos el problema de control óptimo

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(v) \\ \text{Sujeto a } v \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}, \ (y,z) \ \text{ verifica } \ (1). \end{cases} \tag{2}$$

Probar que (2) posee solución única (el control óptimo $\hat{u}$). Aceptaremos que la aplicación $v \mapsto (y,z)$ es lineal continua.

3. Hallar el sistema de optimalidad asociado y determinar un algoritmo de punto fijo para el cálculo de $\hat{u}$. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de este algoritmo?

4. Determinar los algoritmos del gradiente y del gradiente conjugado con paso óptimo para el cálculo de $\hat{u}$. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia?

5. Escribir programas `FreeFem` para estos dos últimos algoritmos en el caso siguiente:

$$\Omega = (0,10) \times (0,10), \quad \omega = B((2,8);1), \quad \rho = 1,$$
$$z_0(x) \equiv 31_{\mathcal{O}} \ \text{ con } \ \mathcal{O} = B((8,2);1), \quad z_d \equiv 1, \quad \overline{y} \equiv 1.$$

Se partirá de $v_0 \equiv 0$. Se usará como test de parada la condición

$$\|v_{n+1} - v_n\|_{L^2(\omega \times (0,T))} \leq 10^{-5}.$$

Averiguar cuáles son los valores más pequeños de b para los que se tiene convergencia.

FECHA LÍMITE DE ENTREGA: 12/06/2016