Tema 1

Introducción a las Ecuaciones y Sistemas Diferenciales Ordinarios. Métodos elementales de integración

1 Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Durante todo el Curso, usaremos la expresión EDO como sinónimo de Ecuación Diferencial Ordinaria.

Definición 1.1 *Una EDO de primer orden es una expresión de la forma*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

siendo F una función dada, definida en un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$, con valores en $\mathbb{R}$, que depende efectivamente de al menos la tercera variable. A x se le denomina la variable independiente, $y = y(x)$ es una función incógnita dependiente sólamente de la variable x, e y' denota a la derivada primera de y respecto de x.

Observación 1.2 *Con frecuencia se usa la letra t, en vez de x, para designar a la variable independiente en la ecuación* (1.1)*. En tal caso, es también corriente utilizar la letra x para designar a la función incógnita, dependiente ahora de la variable t, e incluso usar $\dot{x}$ para denotar a la derivada primera de x respecto de t, con lo que la EDO* (1.1) *se escribe entonces*

$$F(t, x, \dot{x}) = 0. \tag{1.2}$$

Nosotros usaremos preferentemente la notación (1.1)*, pero a veces, dependiendo del contexto, haremos uso de* (1.2) *u otras notaciones equivalentes.*

Definición 1.3 *Una solución de* (1.1) *es cualquier función* $\varphi : I \to \mathbb{R}$*, con* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo de interior no vacío, satisfaciendo:*

(i) *Existe la derivada* $\varphi'(x)$ *en todo punto* $x \in I$*, donde si* x *es un extremo de* I*,* $\varphi'(x)$ *denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in \mathcal{O}$*, para todo* $x \in I$*,*

(iii) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$*, para todo* $x \in I$*.*

Se dice también en tal caso que la pareja (I, φ) *es una solución local de* (1.1)*, o que* φ *es una solución de* (1.1) *en el intervalo* I*.*

La ecuación (1.1) se dice que está en forma implícita. En el caso en que y' aparece despejada en la EDO, se dice que ésta está en forma explícita o normal. Más exactamente:

Definición 1.4 *Diremos que una EDO de primer orden está en forma explícita o normal, si está escrita en la forma*

$$y' = f(x, y), \tag{1.3}$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función dada. En tal caso, esta ecuación puede ser escrita en la forma* (1.1)*, tomando* $\mathcal{O} = \Omega \times \mathbb{R}$*, con* $F(x, y, y') = y' - f(x, y)$*.*

En este Curso, nos vamos a centrar en el caso de las EDOs en forma normal. La noción de solución para (1.3) no es más que un caso particular de la correspondiente noción para (1.1)

Definición 1.5 *Una solución de* (1.3) *es cualquier función* $\varphi : I \to \mathbb{R}$*, con* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo de interior no vacío, satisfaciendo:*

(i) *Existe la derivada* $\varphi'(x)$ *en todo punto* $x \in I$*, donde si* x *es un extremo de* I*,* $\varphi'(x)$ *denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$*, para todo* $x \in I$*,*

(iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$*, para todo* $x \in I$*.*

Se dice también en tal caso que la pareja (I, φ) *es una solución local de* (1.3)*, o que* φ *es una solución de* (1.3) *en el intervalo* I*.*

Observación 1.6 *En general, consideraremos que* Ω *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^2$*, y que* f *es continua. En ese caso, la condición (i) en la definición precedente puede ser sustituida por pedir que* $\varphi \in C^1(I)$*.*

Observación 1.7 *La ecuación* (1.3) *admite una interpretación geométrica sencilla. A cada punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$*, la función* f *le asocia el número* $p_0 = f(x_0, y_0)$*. Si pensamos en* p_0 *como el valor de la pendiente de la recta que pasa por* (x_0, y_0)*, obtenemos en* Ω *un campo de direcciones. En este sentido, buscar solución* φ *a* (1.3) *equivale a buscar una curva plana de ecuación en coordenadas cartesianas* $y = \varphi(x)$*, tal que para cada punto* (x_0, y_0) *de la curva, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto sea precisamente el valor* $p_0 = f(x_0, y_0)$ *del campo en el citado punto.*

A continuación, discutimos algunos ejemplos de problemas que dan lugar a la aparición de EDOs de primer orden.

Ejemplo 1) Al eliminar un parámetro.

En concreto, supongamos dada una familia uniparamétrica de funciones regulares $y = y(x, C)$, dependientes del parámetro $C \in \mathbb{R}$, y que vienen definidas de manera implícita por la ecuación

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.4}$$

con Φ una función regular dada. En tal caso, derivando respecto de x en (1.4), obtenemos para cada valor de C,

$$\Phi_x(x, y, C) + \Phi_y(x, y, C)y' = 0, \tag{1.5}$$

donde por Φ_x (respectivamente, Φ_y) denotamos a la derivada parcial primera de Φ respecto de x (respectivamente, respecto de y).

Entonces, eliminando C entre (1.4) y (1.5), en principio cabe pensar que se va a obtener una expresión de la forma (1.1).

Por ejemplo, si consideramos la familia de parábolas de ecuación $y = Cx^2$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitrario, estamos en el caso $\Phi(x, y, C) = y - Cx^2$, derivando en dicha ecuación respecto de x obtenemos $y' = 2Cx$, y eliminando C entre las dos ecuaciones, obtenemos la EDO satisfecha por la familia dada de parábolas, que en forma normal se escribe

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Ejemplo 2) En problemas de tipo geométrico.

Por ejemplo, supongamos dada una familia uniparamétrica de curvas regulares en el plano cartesiano $y = y(x, C)$, dependientes del parámetro $C \in \mathbb{R}$, y que vienen definidas de manera implícita por la ecuación (1.4). Nos planteamos el problema de hallar curvas que corten de manera ortogonal a todas las curvas de la familia dada.

Para abordar este problema, lo que se puede hacer en primer lugar es, mediante el procedimiento descrito en el Ejemplo 1), obtener por eliminación de

C la EDO $F(x, y, y') = 0$ satisfecha por la familia de funciones $y = y(x, C)$. A continuación, se observa que, fijado un valor C_0 de C y un punto $(x_0, y(x_0, C_0))$ sobre la curva correspondiente, si $y = \varphi(x)$ es una curva que corta a $y = y(x, C_0)$ en dicho punto de manera ortogonal, entonces forzosamente $\varphi(x_0) = y(x_0, C_0)$, y la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto, que viene dada por $\varphi'(x_0)$, ha de coincidir con la inversa cambiada de signo de la pendiente de la tangente a la curva $y = y(x, C_0)$ en el mismo punto, es decir,

$$\varphi'(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0, C_0)}$$

Sustituyendo las relaciones obtenidas en la igualdad $F(x_0, y(x_0, C_0), y'(x_0, C_0)) = 0$, y eliminando el subíndice, llegamos a que

$$F(x, \varphi(x), -\frac{1}{\varphi'(x)}) = 0,$$

o cambiando de notación,

$$F(x, y(x), -\frac{1}{y'(x)}) = 0,$$

es la EDO de la familia buscada.

Por ejemplo, si consideramos la familia de parábolas de ecuación $y = Cx^2$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitrario, del ejemplo anterior, resulta que, como la EDO

$$y' = \frac{2y}{x}$$

es la correspondiente a dicha familia, entonces la EDO

$$y' = \frac{-x}{2y}$$

es la correspondiente a las curvas ortogonales a familia de parábolas. En este caso, es muy sencillo obtener, usando los métodos elementales de integración de EDO que se describirán posteriormente, que, como se comprueba fácilmente, la última EDO tiene por soluciones, a todas las funciones definidas de manera implícita por ecuaciones de la forma $y^2 + \dfrac{x^2}{2} = k$, con k constante positiva arbitraria. Se obtiene por tanto una familia de elipses centradas en el origen.

Ejemplo 3) En problemas de dinámica de poblaciones.

Consideremos una especie aislada en un determinado hábitat, y denotemos por $p(t)$ a la población, es decir al número de individuos, de esa especie presente en el citado hábitat en cada instante t. Un modelo muy simplificado para la evolución de $p(t)$ es suponer que el incremento de población en un corto intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ es proporcional al número de individuos presentes en el instante t multiplicado por el tiempo transcurrido, es decir

$$p(t + \Delta t) - p(t) = \alpha p(t)\Delta t,$$

con $\alpha > 0$ constante. En tal caso, dividiendo por Δt y pasando la límite cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene el modelo

$$\dot{p}(t) = \alpha p(t), \tag{1.6}$$

que fue propuesto por Malthus en 1798.

Es inmediato comprobar que toda función de la forma $p(t) = Ce^{\alpha t}$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria, es solución de (1.6). Si conocemos que en un instante t_0 hay $p_0 > 0$ individuos de la especie, entonces la solución correspondiente a (1.6) que satisface esta última condición viene dada por

$$p(t) = p_0 e^{\alpha(t-t_0)},$$

igualdad que en particular describe la evolución futura de $p(t)$ para $t \geq t_0$. Se observa que, por tanto, el modelo de Malthus predice un crecimiento exponencial al infinito de la población, cuando $t \to +\infty$. Ello hace que el modelo sea poco realista, al menos para tiempos grandes. Una hipótesis razonable es suponer que pasado un cierto umbral $\beta > 0$, la población empieza a decrecer, debido por ejemplo a la competencia por el alimento existente. Esta hipótesis conduce a un modelo de la forma

$$\dot{p}(t) = \alpha p(t)(\beta - p(t)), \tag{1.7}$$

que es también estudiado en dinámica de poblaciones. Éste y otros modelos se pueden consultar en [1].

Vemos que en los ejemplos anteriores, las EDO de primer orden que han aparecido poseen infinitas soluciones. Si se quiere singularizar una solución, hace falta imponer una condición adicional. En general, esa condición adicional consiste en imponer que la solución pase por un punto prefijado del plano

Definición 1.8 *Denominaremos Problema de Cauchy o de valores iniciales para la EDO* (1.3) *al problema consistente en, fijado un punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$, *hallar una solución local* (I, φ) *de* (1.3) *tal que* $x_0 \in I$ *y* $\varphi(x_0) = y_0$. *En tal caso, se dice que* (I, φ) *es una solución local del Problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Como un ejemplo adicional de Problema de Cauchy, consideremos el siguiente:

Ejemplo 4) Nos planteamos el problema consistente en encontrar una curva regular en el plano cartesiano, que pase por el punto $(1, 2)$, y tal que la recta normal a la curva en cada punto de la misma pase por el origen de coordenadas.

Para resolver este problema, supongamos que $y = \varphi(x)$ es la ecuación de la curva que se busca. En tal caso, la recta normal a la curva en cada punto $(x_0, \varphi(x_0))$ de la misma tiene por ecuación,

$$y - \varphi(x_0) = -\frac{1}{\varphi'(x_0)}(x - x_0),$$

con lo que, si pedimos que esa recta pase por el origen de coordenadas, se ha de satisfacer

$$-\varphi(x_0) = \frac{x_0}{\varphi'(x_0)},$$

y esto para todo valor de x_0. En consecuencia, eliminando el subíndice de la última igualdad, y sustituyendo $\varphi(x)$ por y, obtenemos que la EDO que ha de satisfacer la curva que buscamos, escrita en forma normal, es:

$$y' = -\frac{x}{y},$$

estamos por tanto ante el Problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

La EDO anterior se puede escribir $yy' = x$, y es fácil de resolver con los métodos que describiremos con posterioridad, obteniéndose que todas las funciones de la forma $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, o $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, con R constante arbitraria, son soluciones de la misma. Si imponemos la condición adicional $y(1) = 2$, obtenemos como solución del (PC)

$$\varphi(x) = \sqrt{5 - x^2},$$

función definida en el intervalo $I = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. La función $y = \varphi(x)$ viene definida de manera implícita por la igualdad $x^2 + y^2 = 5$, así pues, la curva buscada es la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{5}$.

2 Sistemas Diferenciales Ordinarios de primer orden

Usaremos la expresión SDO como sinónimo de Sistema Diferencial Ordinario. Consideremos fijado un entero $N \geq 1$.

Definición 2.1 *Un SDO de primer orden y dimensión N en forma normal o explícita es una expresión de la forma*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_N), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_N' = f_N(x, y_1, ..., y_N), \end{array}\right. \tag{2.8}$$

siendo f_i, para $1 \leq i \leq N$ entero, N funciones dadas, definidas en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, con valores en $\mathbb{R}$. A x se le denomina la variable independiente, las y_i, para $1 \leq i \leq N$, son funciones incógnitas dependientes sólamente de la variable x, e y_i' denota, para cada i, a la derivada primera de y_i respecto de x.

Observación 2.2 *Hablando con propiedad, la denominación SDO de primer orden, referida a* (2.8)*, debería estar reservada al caso en que $N \geq 2$, pero hemos aceptado también el caso $N = 1$ en nuestra definición, con el fin de que el concepto de SDO de primer orden en forma normal contenga como caso particular al de una EDO de primer orden en forma normal.*

De forma análoga a los conceptos de solución y de Problema de Cauchy para una EDO de primer orden en forma normal, tenemos los correspondientes para un SDO de primer orden en forma normal.

Definición 2.3 *Una solución local de* (2.8) *es cualquier N+1-upla $(I, \varphi_1, ..., \varphi_N)$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y las φ_i, $1 \leq i \leq N$, N funciones $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, satisfaciendo:*

(i) *Existe la derivada $\varphi_i'(x)$ en todo punto $x \in I$, y para todo $1 \leq i \leq N$, donde si x es un extremo de I, $\varphi_i'(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_N(x)) \in \Omega$, *para todo $x \in I$,*

(iii) $\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_N(x))$, *para todo $x \in I$, y para todo $1 \leq i \leq N$.*

Se dice también entonces que la N-upla $(\varphi_1, ..., \varphi_N)$ es una solución de (2.8) *en el intervalo I.*

Definición 2.4 *Denominaremos Problema de Cauchy o de valores iniciales para el SDO* (2.8) *al problema consistente en, fijado un punto $(x_0, y_{1_0}, ..., y_{N_0})$ perteneciente a Ω, hallar una solución local $(I, \varphi_1, ..., \varphi_N)$ de* (2.8) *tal que $x_0 \in I$ y $\varphi_i(x_0) = y_{i_0}$, para todo $1 \leq i \leq N$. En tal caso, se dice que $(I, \varphi_1, ..., \varphi_N)$ es una solución local del Problema de Cauchy*

$$(PC)\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_N), \\ ...., \\ ...., \\ y_N' = f_N(x, y_1, ..., y_N), \\ y_1(x_0) = y_{1_0}, ..., y_N(x_0) = y_{N_0}. \end{cases}$$

Observación 2.5 *La formulación del SDO* (2.8)*, así como las definiciones* 2.3 *y* 2.4 *pueden ser efectuadas en una notación compacta que formalmente contenga la situación de una EDO de primer orden como caso particular. Para ello, lo que se hace es introducir la notación vectorial, denotando en particular a los elementos de $\mathbb{R}^N$ como vectores columna. Denotemos*

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_N' \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}, \quad \varphi' = \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_N' \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, ..., y_N) \\ \vdots \\ f_N(x, y_1, ..., y_N) \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{0_1} \\ \vdots \\ y_{0_N} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

De esta forma, el SDO (2.8) *puede ser escrito como*

$$y' = f(x, y), \tag{2.11}$$

con $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ dada. Una solución local de (2.11) *es entonces una pareja (I, φ) tal que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, y $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ es una función que satisface:*

(i) *Existe la derivada (componente a componente) $\varphi'(x)$ en todo punto $x \in I$, donde si x es un extremo de I, $\varphi'(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) *$(x, \varphi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$,*

(iii) *$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, para todo $x \in I$.*

De igual manera, se puede formular el Problema de Cauchy para (2.11)

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

como el problema consistente en, fijado un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, hallar una solución local (I, φ) de (2.11) *tal que $x_0 \in I$ y $\varphi(x_0) = y_0$. En tal caso, se dice que (I, φ) es una solución local del Problema de Cauchy.*

Obsérvese la completa analogía existente entre estas notaciones y las correspondientes al caso de una EDO de primer orden en forma normal.

Los SDOs aparecen en las aplicaciones a la Física, Biología, Economía, etc. Citemos como un ejemplo el denominado sistema de Lotka-Volterra,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p_1} = \alpha p_1 - \beta p_1 p_2, \\ \dot{p_2} = -\gamma p_2 + \delta p_1 p_2, \end{array} \right. \tag{2.12}$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas dadas, y p_1 y p_2 son dos funciones incógnitas dependientes sólamente de la variable tiempo t.

Un sistema de Lotka-Volterra como (2.12), se denomina también un sistema de tipo presa-depredador. En efecto, en (2.12) la variable $p_1(t)$ puede ser interpretada como la cantidad de individuos de una especie, las presas, presentes en el instante t en un determinado hábitat, y la variable $p_2(t)$ puede ser interpretada como la cantidad de individuos de otra especie, los depredadores, presentes en el instante t en el mismo hábitat. Se supone que los depredadores se alimentan de las presas, mientras que éstas no se alimentan de los depredadores. Con estas suposiciones, el modelo (2.12), en su primera ecuación, está expresando que, en ausencia de depredadores, las presas crecen a un ritmo constante, mientras que la presencia de los primeros hace disminuir el número de presas en proporción directa al de depredadores presentes. De igual manera, la segunda ecuación en (2.12) indica que, en ausencia de presas, los depredadores decrecen a un ritmo constante, mientras que la presencia de las presas hace aumentar el número de depredadores en proporción directa al de aquellas presentes.

3 Métodos elementales de resolución de EDOs de primer orden

En esta sección vamos a exponer métodos para resolver algunos casos sencillos de EDOs de primer orden. Las notas que siguen están tomadas en gran medida de [3] (ver también [4]).

En el caso de una EDO de primer orden, diremos que hemos resuelto la ecuación si somos capaces de hallar una familia infinita de funciones $\varphi(x, C)$, dependiente de x y de una constante arbitraria $C \in \mathbb{R}$, tal que para cada valor fijado de C la función correspondiente sea solución de la EDO. En tal caso, diremos que la expresión $y = \varphi(x, C)$ es la solución general de la EDO. De manera más general, diremos que hemos resuelto la ecuación si somos capaces de hallar una función regular $\Phi(x, y, C)$, dependiente de x, y, y una constante arbitraria $C \in \mathbb{R}$, tal que para cada valor fijado de C la igualdad $\Phi(x, y, C) = 0$ defina de manera implícita una o varias funciones $\varphi(x, C)$ soluciones de la correspondiente EDO. En tal caso, diremos que la expresión $\Phi(x, y, C) = 0$ es la integral general de la ecuación.

Pasamos a exponer seguidamente una colección de casos en que es posible resolver una EDO.

1.- EDO de la forma $y' = f(x)$.

En este caso, f no depende de y, y si por ejemplo $f \in C^0(I)$, con I intervalo de $\mathbb{R}$ de interior no vacío, la resolución es inmediata. Basta tomar como solución general $y = F(x) + C$, siendo F una primitiva de f.

2.- EDO de primer orden de variables separables.

Éste es el caso en que la EDO puede ser escrita en la forma

$$y' = \frac{a(x)}{b(y)}, \tag{3.13}$$

con $a(x)$ función continua dependiente sólo de la variable x, y $b(y)$ función continua dependiente sólo de la variable y.

En este caso, la EDO también puede ser escrita en la forma

$$b(y)y' = a(x), \tag{3.14}$$

de la que se dice que está escrita con las variables separadas. Sean $A(x)$ una primitiva de $a(x)$, $B(y)$ una primitiva de $b(y)$, y $\varphi(x)$ una función derivable. En tal caso,

$$\frac{d}{dx}B(\varphi(x)) = b(\varphi(x))\varphi'(x),$$

con lo que, si $\varphi(x)$ es solución de (3.14), entonces

$$\frac{d}{dx}B(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}A(x),$$

y en consecuencia

$$B(\varphi(x)) = A(x) + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Por tanto, la expresión

$$B(y) = A(x) + C, \tag{3.15}$$

es la integral general de (3.13).

En la práctica, para llegar a la integral general se puede proceder como sigue. La EDO (3.14) se puede escribir formalmente

$$b(y)dy = a(x)dx,$$

y en consecuencia, integrando los dos miembros de esta última igualdad, se obtiene (3.15).

Así, si consideramos por ejemplo el Problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = 1 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

observamos que la EDO que aparece en dicho problema puede ser escrita de manera formal
$$\frac{dy}{1+y^2} = dx,$$
con lo que integrando los dos miembros de esta igualdad, obtenemos como integral general,
$$\operatorname{arctg} y = x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$
de la que, despejando y, obtenemos la expresión de la solución general de la citada EDO,
$$y = \operatorname{tg}(x + C)$$
Ahora, imponiendo la condición $y(0) = 0$, y teniendo en cuenta que el intervalo de definición de la solución del Problema de Cauchy planteado ha de contener al cero, resulta finalmente que dicha solución viene dada por $y = \operatorname{tg} x$, con intervalo de definición $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

3.- EDO lineal de primer orden.

Éste es el caso en que la EDO es de la forma
$$a_0(x)y' + a_1(x)y + a_2(x) = 0, \tag{3.16}$$
con $a_i(x) \in C(I)$, $i = 0, 1, 2$, funciones dadas, siendo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y donde suponemos que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

En este caso, denotando
$$a(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad b(x) = -\frac{a_2(x)}{a_0(x)},$$
la ecuación (3.16) también puede ser escrita en la forma
$$y' = a(x)y + b(x), \tag{3.17}$$
con $a(x)$ y $b(x)$ funciones dadas en $C(I)$.

A partir de ahora nos centramos en esta última formulación de la ecuación lineal.

Definición 3.1 *Si $b \equiv 0$, se dice que* (3.17) *es una EDO lineal de primer orden homogénea. En el caso en que $b \not\equiv 0$, se dice que la ecuación* (3.17) *es una EDO lineal de primer orden no homogénea. En este último caso, se dice que*
$$y' = a(x)y, \tag{3.18}$$
es la ecuación homogénea asociada a (3.17).

Denotemos,

$$V_0 = \{\varphi \in C^1(I);\ \varphi \text{ es solución de (3.18) en } I\},$$

y de manera más general,

$$V_b = \{\varphi \in C^1(I);\ \varphi \text{ es solución de (3.17) en } I\}.$$

Como primer resultado, tenemos

Proposición 3.2 *El conjunto V_0 es un subespacio vectorial de $C^1(I)$ de dimensión 1.*

Demostración.- Denotemos por $A(x)$ a una primitiva de $a(x)$. Sea $\varphi \in C^1(I)$ una función dada. Es inmediato comprobar que φ pertenece a V_0 si y sólo si,

$$\varphi'(x)e^{-A(x)} - a(x)\varphi'(x)e^{-A(x)} = 0, \quad \forall\, x \in I,$$

es decir, si y sólo si,

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(x)e^{-A(x)}\right) = 0, \quad \forall\, x \in I,$$

lo cuál es equivalente a afirmar que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x)e^{-A(x)} = C, \quad \forall\, x \in I.$$

En resumen, φ pertenece a V_0 si y sólo si es de la forma $\varphi(x) = Ce^{A(x)}$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria. Así pues V_0 coincide con el subespacio vectorial generado por la función $e^{A(x)}$,

$$V_0 = \langle e^{A(x)} \rangle.$$

Observación 3.3 *De la proposición precedente, se tiene en particular que toda combinación lineal de soluciones de* (3.18) *en I, es también solución de* (3.18) *en I.*

En la Proposición 3.2 *hemos encontrado de hecho la solución general de la EDO homogénea* (3.18). *Si la denotamos por $\varphi_h(x, C)$, hemos obtenido que*

$$\varphi_h(x, C) = Ce^{A(x)},$$

con $A(x)$ una primitiva de $a(x)$.

El mismo resultado puede ser obtenido observando que (3.18) *es una EDO de variables separables, que se puede escribir formalmente*

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx,$$

y por tanto, calculando primitivas de cada uno de los dos miembros de la igualdad, tenemos

$$\log |y| = A(x) + k,$$

es decir,

$$|y| = e^k e^{A(x)},$$

con $k \in \mathbb{R}$ arbitrario, expresión que, denotando $e^k = C$, es la misma que la obtenida precedentemente para $\varphi_h(x, C)$.

Una vez hemos visto como hallar V_0, nos planteamos la cuestión de determinar V_b cuando $b \not\equiv 0$.

En primer lugar, es inmediato comprobar que se satisfacen la dos propiedades siguientes:

a) Si $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ pertenecen a V_b, es decir, son soluciones de (3.17) en I, entonces $\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}$ pertenece a V_0, es decir, es solución de (3.18) en I.

b) Si $\widehat{\varphi}$ pertenece a V_b, es decir, es solución de (3.17) en I, y φ pertenece a V_0, es decir, es solución de (3.18) en I, entonces $\widehat{\varphi} + \varphi$ pertenece a V_b, es decir, es solución de (3.17) en I.

Como consecuencia de a) y b), es inmediato obtener que si $\widehat{\varphi}_p$ es una solución particular de (3.17) en I, entonces

$$V_b = \{\widehat{\varphi}_p + \varphi;\ \varphi \in V_0\}, \tag{3.19}$$

es decir, V_b coincide con la variedad afín $\widehat{\varphi}_p + V_0$.

La igualdad (3.19) se expresa también diciendo que la solución general de (3.17) es igual a la suma de una solución particular de dicha ecuación, más la solución general de (3.18).

El problema es por tanto cómo calcular una solución particular de (3.17). Vamos a ver que, de hecho, en la búsqueda de dicha solución particular encontraremos nuevamente la igualdad (3.19), es decir, hallaremos la solución general de (3.17).

Una primera forma de hallar una solución particular de (3.17), y como ya hemos dicho encontrar de hecho la solución general, es proceder como para la demostración de la Proposición 3.2.

En efecto, sea $A(x)$ una primitiva de $a(x)$, y sea $\widehat{\varphi} \in C^1(I)$ una función dada. Es inmediato comprobar que $\widehat{\varphi}$ es solución de (3.17) si y sólo si,

$$\widehat{\varphi}'(x)e^{-A(x)} - a(x)\widehat{\varphi}'(x)e^{-A(x)} = b(x)e^{-A(x)}, \quad \forall\, x \in I,$$

es decir, si y sólo si,

$$\frac{d}{dx}\left(\widehat{\varphi}(x)e^{-A(x)}\right) = b(x)e^{-A(x)}, \quad \forall\, x \in I. \tag{3.20}$$

Si denotamos por $D(x)$ a una primitiva de la función $b(x)e^{-A(x)}$, es inmediato que (3.20) es equivalente a afirmar que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widehat{\varphi}(x)e^{-A(x)} = D(x) + C, \quad \forall\, x \in I,$$

es decir

$$\widehat{\varphi}(x) = D(x)e^{A(x)} + Ce^{A(x)}, \quad \forall\, x \in I, \tag{3.21}$$

que es la expresión de la solución general de (3.17), siendo la función

$$\widehat{\varphi}(x) = D(x)e^{A(x)},$$

una solución particular de la misma. Se observa que (3.21) implica en particular a la igualdad (3.19).

Otra manera de reencontrar (3.21) se basa en el denominado método de Lagrange de variación de la constante. La idea del citado método consiste en, una vez que se ha hallado $\varphi_h(x, C) = Ce^{A(x)}$ como solución general de la EDO homogénea, buscar $\widehat{\varphi}(x)$, solución de (3.17), de la forma

$$\widehat{\varphi}(x) = C(x)e^{A(x)}, \tag{3.22}$$

con $C(x)$ función derivable de la variable x por determinar. Para hallar $C(x)$, se exige que $\widehat{\varphi}(x)$ satisfaga (3.17), lo que conduce a

$$C'(x)e^{A(x)} + a(x)C(x)e^{A(x)} = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

es decir,

$$C'(x)e^{A(x)} = b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

lo cuál conduce a

$$C(x) = k + D(x), \quad \forall\, x \in I,$$

con $k \in \mathbb{R}$ arbitrario, y por tanto, llevando esta expresión de $C(x)$ a (3.22), obtenemos nuevamente (3.21).

Como ejemplo de aplicación de las consideraciones precedentes, consideremos la EDO

$$y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x \tag{3.23}$$

La ecuación homogénea asociada es

$$y' + y\cos x = 0,$$

que es inmediato ver que tiene por solución general $y_h(x, C) = Ce^{-\operatorname{sen} x}$, con $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Utilizando el método de variación de constante, buscamos solución de (3.23) de la forma

$$y = C(x)e^{-\operatorname{sen} x}$$

Para determinar $C(x)$, exigimos que y satisfaga (3.23), y obtenemos

$$C'(x)e^{-\operatorname{sen} x} - C(x)e^{-\operatorname{sen} x}\cos x + C(x)e^{-\operatorname{sen} x}\cos x = \operatorname{sen} x \cos x,$$

es decir,

$$C'(x) = e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x \cos x,$$

con lo que

$$C(x) = \int e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x \cos x \, dx + k,$$

con $k \in \mathbb{R}$ constante arbitraria.

Ahora bien, integrando por partes, se obtiene fácilmente que

$$\int e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x \cos x \, dx = e^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x - 1),$$

y en consecuencia,

$$C(x) = e^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x - 1) + k,$$

con lo que obtenemos como solución general de (3.23)

$$y(x) = ke^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

El mismo resultado se puede obtener multiplicando la EDO (3.23) por $e^{\operatorname{sen} x}$ e integrando.

4.- EDO de Bernoulli.

Una EDO de Bernoulli es de la forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, 1, \tag{3.24}$$

con $a(x)$ y $b(x)$ funciones dadas en $C(I)$.

Para resolver (3.24), se pueden utilizar dos métodos.

Un primer método consiste en efectuar el cambio de función incógnita

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Con ese cambio,

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$

con lo que, multiplicando (3.24) por $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, se obtiene

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x),$$

EDO lineal que sabemos ya cómo resolver.

Otro método para resolver (3.24) consiste en buscar solución de la forma

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Sustituyendo en la EDO, se obtiene

$$u'v + uv' = a(x)uv + b(x)u^\alpha v^\alpha. \tag{3.25}$$

Entonces, tomando como u una solución de la EDO lineal homogénea

$$u' = a(x)u,$$

por ejemplo $u(x) = e^{A(x)}$, con $A(x)$ primitiva de $a(x)$, y sustituyendo dicha u en (3.25), se obtiene

$$v' = b(x)u^{\alpha-1}v^\alpha,$$

ecuación que, al ser conocida u, es de variables separables en la función incógnita v.

En cualquiera de los dos métodos, hay que tener en cuenta, cuando $\alpha > 0$, que $y = 0$ es también solución de (3.24).

Como un ejemplo, consideremos la EDO

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\log x}{x}y^2 \tag{3.26}$$

Efectuando el cambio $y = uv$, obtenemos

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\log x}{x}u^2v^2$$

Tomando u solución de $u' + \dfrac{1}{x}u = 0$, por ejemplo

$$u = \frac{1}{x},$$

y sustituyendo en la EDO anterior, se obtiene

$$v' = \frac{\log x}{x^2}v^2,$$

EDO de variables separables, que conduce a

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\log x}{x^2}\, dx + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Integrando por partes, es fácil obtener

$$\int \frac{\log x}{x^2}\, dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x},$$

y en consecuencia,
$$-\frac{1}{v} = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + k$$
Llevando las expresiones obtenidas para u y v a la igualdad $y = uv$, obtenemos
$$y = \frac{1}{\log x + 1 - Cx}, \tag{3.27}$$
expresión de la solución general de (3.26), a la cuál hay que añadir la solución $y = 0$.

Como ya hemos dicho, teniendo en cuenta que en este caso $\alpha = 2$, se puede obtener la misma expresión de la solución general de (3.26), mediante el cambio $z = y^{-1}$, que permite escribir la ecuación como
$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\log x}{x},$$
EDO lineal que se puede resolver fácilmente. Para ello multiplicamos por $1/x$, obteniendo
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right) = -\frac{\log x}{x^2},$$
es decir,
$$\frac{z}{x} = -\int \frac{\log x}{x^2}\,dx + k,$$
con $k \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Sustituyendo el valor de la integral, que ya hemos hallado, obtenemos
$$z = \log x + 1 + kx,$$
con lo que, como $y = 1/z$, cambiando $k = -C$, obtenemos de nuevo la expresión (3.27).

5.- EDO homogénea.

Una EDO de la forma $y' = f(x, y)$ se dice homogénea si
$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$
De manera general, una función $f(x, y)$ se dice homogénea de grado n si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. En consecuencia, una EDO de la forma $y' = f(x, y)$ se dice homogénea si $f(x, y)$ lo es de grado 0.

Si la EDO es homogénea, se puede hacer el cambio
$$y(x) = xu(x),$$
con lo que se obtiene
$$xu' + u = f(x, xu) = f(1, u),$$

y por tanto

$$xu' = g(u),$$

con $g(u) = f(1,u) - u$, EDO que es de variables separables.

Así, por ejemplo, si consideramos la ecuación

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}, \tag{3.28}$$

es inmediato comprobar que es homogénea. Haciendo el cambio $y = xu$, obtenemos

$$u + xu' = \frac{xu + \sqrt{x^2 - x^2u^2}}{x} = u \pm \sqrt{1 - u^2},$$

es decir,

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm\frac{dx}{x},$$

con lo que integrando, se tiene

$$\operatorname{arcsen}(u) = \pm \log |Cx|,$$

con $C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ constante arbitraria. Con lo que resulta, $y = \pm x \operatorname{sen}(\log|Cx|)$, o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta el carácter arbitrario de C,

$$y = x \operatorname{sen}(\log|Cx|).$$

A esta expresión de la solución general de (3.28), hay que añadir dos soluciones particulares que se han perdido al dividir por $\sqrt{1-u^2}$, y que se corresponden con $u = \pm 1$,

$$y = x, \quad \text{e} \quad y = -x.$$

Mencionemos también, dentro de este caso, un tipo de ecuaciones que son fácilmente reducibles a homogéneas, y que son las EDOs de la forma

$$y' = g\left(\frac{ax + by + r}{cx + dy + s}\right), \tag{3.29}$$

donde a, b, c, d, r, s son números reales dados, y $g = g(t)$ es una función de una sola variable.

Si las rectas de ecuaciones $ax + by + r = 0$ y $cx + dy + s = 0$ son paralelas, es decir, si

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0,$$

entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $a = \mu c$, y $b = \mu d$, con lo que (3.29) se escribe

$$y' = g\left(\frac{\mu(cx + dy) + r}{cx + dy + s}\right), \tag{3.30}$$

e introduciendo el cambio de incógnita $z = cx + dy$, se obtiene de (3.30)

$$z' = c + dg\left(\frac{\mu z + r}{z + s}\right),$$

ecuación que es de variables separables, y que una vez resuelta, permite obtener y a partir de z.

Si las rectas de ecuaciones $ax + by + r = 0$ y $cx + dy + s = 0$ no son paralelas, es decir, si

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces existe un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + r = 0, \\ cx_0 + dy_0 + s = 0. \end{cases}$$

Trasladando el origen a dicho punto, es decir, introduciendo el cambio de variables

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0, \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que en tal caso

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dX}\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dX},$$

es inmediato que la EDO (3.30) se transforma en

$$\frac{dY}{dX} = g\left(\frac{aX + bY}{cX + dY}\right),$$

ecuación que es homogénea, y ya sabemos resolver mediante el cambio $Y = Xu$.

Así, por ejemplo, si consideramos la EDO

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y - 1}, \tag{3.31}$$

como las rectas $x + y + 1 = 0$, y $x - y - 1 = 0$, tienen por punto de corte $(x_0, y_0) = (0, -1)$, haciendo el cambio

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + 1, \end{cases}$$

obtenemos de (3.31)

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y} \tag{3.32}$$

Ahora, para resolver (3.32), hacemos el cambio $Y(X) = Xu(X)$, y obtenemos

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{X+Xu}{X-Xu} = \frac{1+u}{1-u},$$

es decir,

$$X\frac{du}{dX} = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u},$$

con lo que

$$\frac{(1-u)du}{1+u^2} = \frac{dX}{X},$$

y por tanto, integrando, obtenemos

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\log(1+u^2) = \log|CX|,$$

con $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constante arbitraria. Esta última expresión se puede escribir de manera algo más abreviada

$$\operatorname{arctg} u = \log\left|CX\sqrt{1+u^2}\right|. \tag{3.33}$$

Deshaciendo los cambios de variables, obtenemos de (3.33), como integral general de (3.31),

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{x}\right) - \log|C\sqrt{x^2+(y+1)^2}| = 0.$$

6.- EDO exacta.

Consideremos una EDO de primer orden en forma explícita de la forma

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

con M y N funciones continuas definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y $N(x,y) \neq 0$, para todo $(x,y) \in \Omega$.

Dicha ecuación puede ser escrita, de manera equivalente como

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0. \tag{3.34}$$

Se dice que la EDO (3.34) es exacta si existe una función $\Phi \in C^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi_x(x,y) = M(x,y), \quad \text{y} \quad \Phi_y(x,y) = N(x,y), \quad \forall\,(x,y) \in \Omega. \tag{3.35}$$

Si (3.34) es exacta, e $y(x)$ es una solución de esta ecuación en un intervalo I, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Phi(x,y(x)) &= \Phi_x(x,y(x)) + \Phi_y(x,y(x))y'(x)\\ &= M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0, \quad \forall\, x \in I,\end{aligned}$$

y por tanto la expresión $\Phi(x,y(x))$ se mantiene constante en todo I. Es decir, la expresión

$$\Phi(x,y) = C,$$

es la integral general de (3.34).

Las dos cuestiones que se plantean son, en primer lugar, cómo reconocer si (3.34) es exacta, y en segundo lugar, en el supuesto de que (3.34) es exacta, cómo hallar $\Phi(x,y)$ satisfaciendo (3.35).

Supongamos que M y N son funciones en $C^1(\Omega)$. En tal caso, es inmediato deducir de la igualdad de las derivadas Φ_{xy} y Φ_{yx}, que una condición necesaria para la existencia de Φ es que se satifaga la relación

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \quad \forall\,(x,y) \in \Omega. \tag{3.36}$$

De hecho, y con la condición de regularidad de M y N antes supuesta, si además Ω es un abierto simplemente conexo, entonces la condición (3.36) es también suficiente para la existencia de $\Phi(x,y)$ satisfaciendo (3.35). Nosotros nos vamos a contentar con comprobar esta última afirmación en el caso en que Ω es un “rectángulo” de la forma

$$\Omega = (a,b)\times(c,d), \quad -\infty \le a < b \le +\infty, \quad -\infty \le c < d \le +\infty. \tag{3.37}$$

En tal caso, la existencia de Φ puede ser demostrada mediante integración por caminos paralelos a los ejes de coordenadas. En concreto, supongamos Ω definido por (3.37), M y N en $C^1(\Omega)$ satisfaciendo (3.36). Fijemos un punto $(x_0,y_0) \in \Omega$, y definamos

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x,s)\,ds, \quad \forall\,(x,y) \in \Omega. \tag{3.38}$$

Es inmediato que Φ está bien definida y pertenece a $C^2(\Omega)$. Además, es inmediato que $\Phi_y(x,y) = N(x,y)$ en todo punto $(x,y) \in \Omega$. Finalmente, derivando respecto de x en (3.38), y teniendo en cuenta (3.36),

$$\begin{aligned}\Phi_x(x,y) &= M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} N_x(x,s)\,ds\\ &= M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} M_s(x,s)\,ds\\ &= M(x,y_0) + M(x,y) - M(x,y_0) = M(x,y),\end{aligned}$$

en todo punto $(x, y) \in \Omega$. En consecuencia, la función definida por (3.38) satisface (3.35).

Obsérvese que (3.38) nos da una fórmula para hallar $\Phi(x, y)$, y que dicha función satisface $\Phi(x_0, y_0) = 0$. En consecuencia, bajo las hipótesis anteriores, la solución del problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} M(x,y) + N(x,y)y' = 0, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

viene dada de manera implícita por

$$\Phi(x, y) = 0,$$

con Φ definida por (3.38).

En la práctica, para hallar Φ, supuesta satisfecha la condición (3.36), se puede proceder como sigue. En primer lugar, como queremos que se satisfaga $\Phi_x(x, y) = M(x, y)$, tomaremos

$$\Phi(x, y) = \int M(x, y)\, dx + \varphi(y),$$

con $\varphi(y)$ función de la variable y por determinar. Para hallar dicha función, imponemos la condición $\Phi_y(x, y) = N(x, y)$, obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx + \varphi'(y) = N(x, y),$$

ecuación de la que hallar $\varphi(y)$.

Naturalmente, para hallar Φ, también se puede intentar proceder como precedentemente, pero intercambiando los papeles de x e y, es decir, imponiendo primero la condición $\Phi_y(x, y) = N(x, y)$, y depués la condición $\Phi_x(x, y) = M(x, y)$.

Como un ejemplo, consideremos la EDO

$$y' = -\frac{x^3 + xy^2}{x^2 y + y^3} \tag{3.39}$$

Obsérvese que dicha ecuación es homogénea, pero también es exacta, ya que

$$M(x, y) = x^3 + xy^2, \quad \text{y} \quad N(x, y) = x^2 y + y^3,$$

con lo que $M_y(x, y) = 2xy$, y $N_x(x, y) = 2xy$.

Para hallar $\Phi(x, y)$, imponemos $\Phi_x(x, y) = x^3 + xy^2$, lo que nos lleva a

$$\Phi(x, y) = \int (x^3 + xy^2)\, dx + \varphi(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \varphi(y).$$

Para determinar $\varphi(y)$, imponemos ahora $\Phi_y(x,y) = x^2y+y^3$, y obtenemos

$$x^2y + \varphi'(y) = x^2y + y^3,$$

es decir, $\varphi'(y) = y^3$, con lo que nos sirve la función

$$\varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

En consecuencia, obtenemos en este caso

$$\Phi(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2.$$

Con ello, la integral general de (3.39) viene dada por $\Phi(x,y) = C$, o simplificando,

$$x^2 + y^2 = C^2,$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria.

7.- EDO reducible a exacta: factor integrante

Consideremos una EDO de primer orden de la forma

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0, \tag{3.40}$$

con M y N funciones de $C^1(\Omega)$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo, y supongamos que (3.40) no es exacta.

Se dice que $\mu = \mu(x,y)$ es un factor integrante en Ω de la EDO anterior, si $\mu \in C^1(\Omega)$, $\mu(x,y) \neq 0$ en todo punto $(x,y) \in \Omega$, y la EDO

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0, \tag{3.41}$$

es exacta.

Obsérvese que, gracias a la condición $\mu(x,y) \neq 0$, (3.40) y (3.41) poseen las mismas soluciones. En consecuencia, si conocemos un factor integrante $\mu(x,y)$, y hallamos $\Phi(x,y)$ tal que

$$\Phi_x(x,y) = \mu(x,y)M(x,y), \quad \text{y} \quad \Phi_y(x,y) = \mu(x,y)N(x,y),$$

entonces $\Phi(x,y) = C$ es la integral general de (3.40). Por ello, si existe un factor integrante para (3.40), diremos que ésta es una EDO reducible a exacta.

De las consideraciones del caso de una EDO exacta, sabemos que la condición necesaria y suficiente para que exista un factor integrante $\mu(x,y)$, es que se satisfaga

$$(\mu(x,y)M(x,y))_y = (\mu(x,y)N(x,y))_x, \quad \forall\,(x,y) \in \Omega, \tag{3.42}$$

es decir,

$$N(x,y)\mu_x(x,y) - M(x,y)\mu_y(x,y) + (N_x(x,y) - M_y(x,y))\mu(x,y) = 0,$$

para todo $(x,y) \in \Omega$, que es una Ecuación en Derivadas Parciales en la incógnita $\mu(x,y)$.

Así pues, para la búsqueda de un factor integrante, hay que encontrar $\mu \in C^1(\Omega)$ satisfaciendo (3.42). Este problema, en determinados casos particulares, puede ser llevado al de resolver una EDO.

Por ejemplo, si consideramos la EDO lineal

$$y' = a(x)y + b(x),$$

en este caso podemos tomar $M(x,y) = a(x)y + b(x)$, y $N(x,y) = -1$. Supongamos que nos planteamos encontrar un factor integrante que dependa sólamente de x, es decir, $\mu = \mu(x)$. Entonces, la ecuación (3.42) se escribe

$$(a(x)\mu(x)y + b(x)\mu(x))_y = (-\mu(x))_x,$$

es decir,

$$a(x)\mu(x) = -\mu'(x),$$

ecuación que, en particular, admite como solución

$$\mu(x) = e^{-A(x)},$$

con $A(x)$ una primitiva de $a(x)$. Es decir, la exponencial que utilizamos en su momento para resolver la EDO lineal de primer orden no era sino un factor integrante de dicha ecuación.

Consideramos ahora un ejemplo más complicado que el precedente. En concreto, supongamos que nos planteamos resolver la EDO

$$x(1-y) + (y + x^2)y' = 0, \tag{3.43}$$

mediante la búsqueda de un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$. Es decir, buscamos en primer lugar una función $\mu = \mu(t)$, de una sóla variable t, de tal manera que se satisfaga la ecuación

$$(x(1-y)\mu(x^2+y^2))_y = ((y+x^2)\mu(x^2+y^2))_x, \tag{3.44}$$

para a continuación resolver (3.43).

Si denotamos por $\dot{\mu}(t)$ a la derivada de $\mu(t)$ respecto de t, de (3.44) obtenemos

$$-x\mu(x^2+y^2) + 2xy(1-y)\dot{\mu}(x^2+y^2) = 2x\mu(x^2+y^2) + 2x(y+x^2)\dot{\mu}(x^2+y^2),$$

es decir,

$$(2xy(1-y) - 2x(y+x^2))\dot{\mu}(x^2+y^2) = 3x\mu(x^2+y^2),$$

con lo que, simplificando, dividiendo por x y denotando $x^2 + y^2 = t$, obtenemos

$$-2\dot{\mu}(t) = 3\mu(t),$$

como EDO que ha de satisfacer $\mu(t)$. Evidentemente, como solución a esta última EDO se tiene $\mu(t) = t^{-3/2}$, y por consiguiente un factor integrante para (3.43) es

$$\mu(x,y) = (x^2+y^2)^{-3/2}.$$

Ahora, para resolver (3.43), hemos de hallar una función $\Phi(x,y)$ tal que

$$\Phi_x(x,y) = x(1-y)(x^2+y^2)^{-3/2}, \quad \text{y} \quad \Phi_y(x,y) = (y+x^2)(x^2+y^2)^{-3/2}.$$

Integrando la primera de las ecuaciones, obtenemos

$$\Phi(x,y) = -(1-y)(x^2+y^2)^{-1/2} + \varphi(y),$$

con lo que de la segunda ecuación se tiene

$$(x^2+y^2)^{-1/2} + (1-y)y(x^2+y^2)^{-3/2} + \varphi'(y) = (y+x^2)(x^2+y^2)^{-3/2},$$

ecuación que simplificada nos lleva a

$$\varphi'(y) = 0.$$

Por consiguiente, podemos tomar $\varphi(y) = 0$, y escribir

$$(1-y)(x^2+y^2)^{-1/2} = C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria, como integral general de (3.43).

8.- EDO de Riccati.

Se denomina ecuación diferencial de Riccati a la EDO

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x), \tag{3.45}$$

con $a, b, c \in C(I)$, y $c \not\equiv 0$. Obsérvese que si $c \equiv 0$, entonces (3.45) es una ecuación de Bernoulli, que ya sabemos cómo resolver.

Es conocido que, en general, la EDO (3.45) no se puede resolver mediante cuadraturas (resultado debido a Liouville, ver [2]). Sin embargo, si se conoce una solución particular y_p de (3.45), entonces sí que es posible resolverla. En efecto, en tal caso, efectuando el cambio de función incógnita

$$y = y_p + \frac{1}{u}, \tag{3.46}$$

obtenemos de (3.45),

$$y_p' - \frac{u'}{u^2} = a(x)y_p + \frac{a(x)}{u} + b(x)y_p^2 + \frac{b(x)}{u^2} + \frac{2b(x)}{u} + c(x),$$

con lo que, teniendo en cuenta que y_p satisface (3.45), tenemos

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{a(x)}{u} + \frac{b(x)}{u^2} + \frac{2b(x)}{u} \tag{3.47}$$

Multiplicando en (3.47) por $-u^2$, se obtiene

$$u' = -(a(x) + 2b(x))u + b(x),$$

EDO lineal de primer orden que ya sabemos cómo resolver.

Como un ejemplo, consideremos el problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = (1-2x)y - y^2 + 2x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que $y = 1$ es solución de la EDO que aparece en (PC). Por consiguiente, hacemos el cambio

$$y = 1 + \frac{1}{u},$$

y sustituyendo en la EDO, obtenemos

$$-\frac{u'}{u^2} = 1 - 2x + \frac{(1-2x)}{u} - 1 - \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} + 2x,$$

con lo que, simplificando y multiplicando por $-u^2$, se obtiene

$$u' = (2x+1)u + 1, \tag{3.48}$$

ecuación que ha de satisfacer u junto con la condición $u(0) = -1$.

Para resolver (3.48), multiplicamos por $e^{-(x^2+x)}$, y obtenemos

$$\frac{d}{dx}(e^{-(x^2+x)}u) = e^{-(x^2+x)},$$

con lo que, integrando esta última ecuación desde 0 hasta x, y teniendo en cuenta que $u(0) = -1$, se tiene

$$e^{-(x^2+x)}u(x) + 1 = \int_0^x e^{-(s^2+s)}\, ds,$$

y por tanto, deshaciendo el cambio, obtenemos

$$y(x) = 1 + \frac{e^{-(x^2+x)}}{-1 + \displaystyle\int_0^x e^{-(s^2+s)}\, ds}$$

como solución de (PC).

4 Ecuaciones Diferenciales de orden superior

Nos restringimos al caso de EDOs en forma normal. Consideremos fijado un entero $n > 1$.

Definición 4.1 *Una EDO de orden n en forma explícita o normal es una expresión de la forma*

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{4.49}$$

siendo g una función dada, definida en un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con valores en $\mathbb{R}$. A x se le denomina la variable independiente, y es una función incógnita dependiente sólamente de la variable x, y' denota a la derivada primera de y respecto de x, y para $k \geq 2$, $y^{(k)}$ denota a la derivada k-ésima de y con respecto a x.

Observación 4.2 *Nosotros, como es la costumbre, usaremos la notación y'' para denotar a derivada segunda $y^{(2)}$. De esta forma, en el caso de una EDO de segundo orden en forma normal, se escribe*

$$y'' = g(x, y, y').$$

Al igual que en el caso de primer orden, con frecuencia se usa la letra t, en vez de x, para designar a la variable independiente en la EDO de orden superior, y en tal caso, se suele utilizar la letra x para designar a la función incógnita, dependiente ahora de la variable t, $\dot{x}$ para denotar a la derivada primera de x respecto de t, y $\ddot{x}$ para denotar a la derivada segunda de x respecto de t, con lo que, por ejemplo, la EDO de segundo orden se escribe entonces

$$\ddot{x} = g(t, x, \dot{x}). \tag{4.50}$$

De manera análoga a la definición 1.5, se introduce la noción de solución de (4.49).

Definición 4.3 *Una solución de* (4.49) *es cualquier función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, satisfaciendo:*

(i) *Existe la derivada n-ésima $\varphi^{(n)}(x)$ en todo punto $x \in I$, donde si x es un extremo de I, $\varphi^{(n)}(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \in \mathcal{O}$, *para todo $x \in I$,*

(iii) $\varphi^{(n)}(x) = g(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x))$, *para todo $x \in I$.*

Se dice también en tal caso que la pareja (I, φ) es una solución local de (4.49), *o que φ es una solución de* (4.49) *en el intervalo I.*

En general, cabe esperar que una EDO de orden n posea una infinidad de soluciones, dependiente de n constantes arbitrarias. Así, por ejemplo, es inmediato comprobar que para la EDO $y^{(3)} = 24x$, todas las funciones de la forma $\varphi(x) = x^4 + C_1x^2 + C_2x + C_3$, con C_1, C_2 y C_3 constantes reales arbitrarias, son soluciones en $I = \mathbb{R}$ de la EDO. Por consiguiente, si se quiere singularizar una solución de una EDO como (4.49), hace falta imponer n condiciones adicionales.

Las EDOs de orden superior a uno, y sobre todo las de segundo orden, aparecen por ejemplo en problemas de la Física. Como un ejemplo, consideremos el siguiente:

La EDO del péndulo simple.

Consideremos una masa m suspendida en el extremo de una barra muy delgada de longitud L. Suponemos que la barra está fijada por el otro extremo, y en posición de reposo vertical al suelo, a un punto O situado a una altura $H > L$ del mismo. Supongamos que, en el instante $t_0 = 0$, desplazamos la barra de su posición de reposo un ángulo $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, e inmediatamente, estando la barra en reposo, la soltamos. Se desea predecir la evolución de la posición y velocidad de la masa m conforme pasa el tiempo. Para ello, hacemos las suposiciones simplificadoras que siguen:

- El rozamiento del aire y la fricción de la barra en el punto O son despreciables.
- La masa m puede ser considerada como un punto.
- La barra es rígida y de masa despreciable
- El movimiento de la barra se produce en un plano, y solo bajo la acción de la fuerza de gravedad, cuya aceleración g suponemos constante.

Para resolver el problema basta con conocer la función $\theta(t)$ que nos da el ángulo con vértice en O que en cada instante t forma la barra con la vertical al suelo. En efecto, tomando coordenadas cartesianas con origen en O y ordenada la vertical al suelo, las coordenadas de posición de la masa m vendrán dadas en cada instante t por

$$x(t) = L \operatorname{sen} \theta(t), \quad y(t) = -L \cos \theta(t).$$

Para determinar la función $\theta(t)$, observemos que por las condiciones impuestas al problema, la energía total $E(t)$ del sistema ha de ser constante, siendo $E(t)$ la suma de la energía cinética $E_c(t)$ más la energía potencial $E_p(t)$. En este caso,

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2,$$

con

$$v^2(t) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = L^2 \dot{\theta}^2(t),$$

y

$$E_p(t) = mg(H - L\cos\theta(t)),$$

con lo que

$$E(t) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2(t) + mg(H - L\cos\theta(t)),$$

y por tanto, derivando esta última expresión, y teniendo en cuenta la conservación de $E(t)$, obtenemos, tras dividir por $mL^2\dot{\theta}(t)$, la EDO que describe el comportamiento del péndulo,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{4.51}$$

Dicha ecuación debe ser complementada, tal y como hemos planteado el problema, con las condiciones adicionales

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

que junto la EDO (4.51) constituyen un Problema de Cauchy.

Exponemos ahora algunas consideraciones elementales sobre resolución de la EDO de segundo orden

$$y'' = g(x, y, y'). \tag{4.52}$$

Estas consideraciones son fácilmente generalizables al caso de EDOs de orden superior a dos.

Diremos que hemos resuelto la ecuación (4.52), si somos capaces de hallar una familia infinita de funciones $\varphi(x, C_1, C_2)$, dependiente de x y de dos constantes arbitrarias $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tal que para cada valor fijado del par (C_1, C_2), la función correspondiente sea solución de la EDO. En tal caso, diremos que la expresión $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ es la solución general de (4.52). De manera más general, diremos que hemos resuelto la ecuación si somos capaces de hallar una función regular $\Phi(x, y, C_1, C_2)$, dependiente de x, y, y dos constantes arbitrarias $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tal que para cada valor fijado del par (C_1, C_2) la igualdad $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ defina de manera implícita una o varias funciones $\varphi(x, C_1, C_2)$ soluciones de la correspondiente EDO. En tal caso, diremos que la expresión $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ es la integral general de la ecuación (4.52).

Exponemos ahora algunos casos sencillo en que es posible resolver (4.52), o al menos reducirla a una EDO de primer orden.

a).- EDO de la forma $y'' = g(x)$.

En este caso, g no depende de y ni de y', y si por ejemplo $g \in C^0(I)$, con I intervalo de $\mathbb{R}$ de interior no vacío, la resolución es inmediata. Basta tomar como solución general

$$y = \int G(x) + C_1 x + C_2,$$

siendo G una primitiva de g.

b).- EDO de la forma $y'' = g(x, y')$.

Si g no depende de y, se puede reducir el orden de la EDO haciendo el cambio $z = y'$. De esta forma, obtenemos la ecuación de primer orden $z' = g(x, z)$, que si sabemos resolver nos permite hallar y integrando después z.

Por ejemplo, si consideramos la EDO

$$y'' = 2x(a + y')^2, \tag{4.53}$$

con $a \in \mathbb{R}$ constante dada, haciendo el cambio $z = y'$ obtenemos

$$z' = 2x(a + z)^2,$$

ecuación que tiene por solución general

$$z = -\frac{1}{x^2 + C_1} - a,$$

con $C_1 \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. A esta solución general hay que añadir

$$z = -a,$$

que es también solución.

Resolviendo ahora $y' = z$, obtenemos

$$y = -ax + C_2 - \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{C_1}}\right),$$

con C_1, C_2 constantes arbitrarias, como solución general de (4.53), junto con la familia de funciones

$$y = -ax + C_2,$$

que formalmente se obtienen de la expresión de la solución general tomando $C_1 = +\infty$.

c).- EDO de la forma $y'' = g(y, y')$.

Si g no depende de x, se puede reducir el orden de la EDO haciendo el cambio

$$y'(x) = p(y(x)),$$

con $p(y)$ función por determinar. De esta forma, teniendo en cuenta que

$$y'' = \frac{dp}{dy}(y(x))y'(x) = \frac{dp}{dy}(y(x)p(y(x)),$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{dp}{dy}p = g(y,p),$$

EDO de primer orden en la incógnita $p(y)$, que si sabemos resolver nos permite hallar y integrando después $p(y)$.

Por ejemplo, si consideramos la EDO

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}, \tag{4.54}$$

haciendo el cambio $y'(x) = p(y(x))$, obtenemos

$$\frac{dp}{dy}p + p^2 = 2e^{-y},$$

o dividiendo por p,

$$\frac{dp}{dy} = -p + e^{-y}p^{-1},$$

que es una EDO de Bernoulli. Esta última ecuación puede ser fácilmente resuelta, obteniéndose como solución general

$$p = \pm e^{-y}\sqrt{4e^y + C_1},$$

con $C_1 \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Para obtener ahora la solución general de (4.54), hemos de resolver

$$y' = \pm e^{-y}\sqrt{4e^y + C_1},$$

es decir,

$$\frac{e^y}{\sqrt{4e^y + C_1}}dy = \pm dx,$$

que, integrando, proporciona

$$\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1} = \pm(x + C_2).$$

Elevando al cuadrado, despejando y, y cambiando $-C_1/4$ por C_1, obtenemos

$$y = \log|(x + C_2)^2 + C_1|,$$

como solución general de (4.54).

d).- EDO lineal de segundo orden.

Las consideraciones que siguen serán tratadas con más generalidad en el Tema 5.

Se denomina EDO lineal de segundo orden a una ecuación de la forma

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \tag{4.55}$$

con $a_i(x) \in C(I)$, $i = 0, 1, 2$, y $b(x) \in C(I)$, funciones dadas, siendo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y donde suponemos que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. A las funciones $a_i(x)$ se las denominan los coeficientes de (4.55), y a $b(x)$ el término independiente de la EDO.

Definición 4.4 *Si* $b \equiv 0$, *se dice que* (4.55) *es una EDO lineal de segundo orden homogénea. En el caso en que* $b \not\equiv 0$, *se dice que la ecuación* (4.55) *es una EDO lineal de segundo orden no homogénea. En este último caso, se dice que*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{4.56}$$

es la ecuación homogénea asociada a (4.55).

Denotemos,

$$V_0^2 = \{\varphi \in C^2(I);\ \varphi \text{ es solución de (4.56) en } I\},$$

y de manera más general,

$$V_b^2 = \{\varphi \in C^2(I);\ \varphi \text{ es solución de (4.55) en } I\}.$$

Nos centramos en primer lugar en el caso de una EDO homogénea. Es inmediato comprobar que toda combinación lineal de soluciones de (4.56) en I es también solución de (4.56) en I, es decir, V_0^2 es un subespacio vectorial de $C^2(I)$. De hecho, en el Tema 5 demostraremos el siguiente resultado que, por ahora, admitimos sin demostración.

Proposición 4.5 *El conjunto* V_0^2 *es un subespacio vectorial de* $C^2(I)$ *de dimensión 2.*

Así pues, para resolver (4.56) basta con hallar dos soluciones φ_1 y φ_2 en V_0^2 que sean linealmente independientes. En tal caso, se dice que el par $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, que constituye una base de V_0^2, es un sistema fundamental de soluciones de (4.56), y la solución general $y_h(x, C_1, C_2)$ de esta ecuación viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), \quad \forall\, x \in I,$$

siendo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

A diferencia de para el caso de una EDO lineal de primer orden, no existe una fórmula general que permita obtener un sistema fundamental de soluciones de (4.56), no obstante, existen algunos casos importantes en que ello es posible, y que exponemos a continuación.

d1).- Caso en que se conoce una solución particular no nula.
Si conocemos una solución $y_p(x)$ de (4.56) en I, tal que $y_p \not\equiv 0$, entonces, haciendo el cambio

$$y(x) = y_p(x)u(x),$$

y teniendo en cuenta que

$$y' = y_p'u + y_pu', \qquad y'' = y_p''u + 2y_p'u' + y_pu'',$$

y que y_p satisface (4.56), se obtiene como ecuación para u

$$a_0(x)y_p(x)u'' + (a_1(x)y_p(x) + 2a_0(x)y_p'(x))u' = 0,$$

EDO que se puede reducir de orden con el cambio $z = u'$.
Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \tag{4.57}$$

en $I = (0, +\infty)$, de la cuál suponemos conocido de antemano que

$$y_p = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

es una solución particular.
Haciendo el cambio

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}u,$$

obtenemos de (4.57)

$$(\operatorname{sen} x)u'' + \left(\frac{2\operatorname{sen} x}{x} + \frac{2x\cos x - 2\operatorname{sen} x}{x}\right)u' = 0,$$

con lo que poniendo $z = u'$, y simplificando, tenemos

$$(\operatorname{sen} x)z' + 2(\cos x)z = 0,$$

de donde fácilmente se obtiene

$$\log|z| = -2\log|\operatorname{sen} x| + C,$$

con lo que

$$u' = z = \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

e integrando,

$$u = -C_1 \operatorname{cotg} x + C_2,$$

y por tanto, la solución general de (4.57) viene dada por

$$y(x) = -C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

es decir, $\left\{\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \frac{\cos x}{x}\right\}$ constituye un sistema fundamental de soluciones de la citada EDO.

d2).- EDO lineal homogénea de segundo orden de coeficientes constantes.

Se dice que (4.55) es una EDO lineal de segundo orden de coeficientes constantes si los a_i son constantes, es decir $a_i(x) \equiv a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$.

En el caso en que la ecuación es homogénea, es fácil hallar un sistema fundamental de soluciones.

En efecto, consideremos la EDO

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{4.58}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$.

Se denomina polinomio característico asociado a la ecuación (4.58), al polinomio

$$p(\lambda) = a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$$

Sean λ_1 y λ_2 las dos raices del polinomio característico, es decir, las soluciones de

$$p(\lambda) = 0.$$

Se pueden presentar tres casos:

i) Las dos raices son reales y distintas.
En tal caso, si definimos

$$\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, 2, \tag{4.59}$$

las dos funciones son linealmente independientes, y es inmediato comprobar que

$$a_0 \varphi_k''(x) + a_1 \varphi_k'(x) + a_2 \varphi_k(x) = p(\lambda_k) e^{\lambda_k x} = 0,$$

con lo que $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de (4.58), es decir, la solución general de dicha EDO viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

ii) Las dos raices son reales e iguales.
En este caso, las dos funciones definidas por (4.59) coinciden. Desde luego, la función $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, es una solución de (4.58), y el problema es cómo hallar otra solución linealmente independiente de ésta.
Para ello, basta tomar

$$\varphi_2(x) = x e^{\lambda_1 x},$$

función que evidentemente es linealmente independiente de $\varphi_1(x)$. Pero además, teniendo en cuenta que λ_1 es raiz doble de $p(\lambda)$, podemos afirmar que

$$\frac{dp}{d\lambda}(\lambda_1) = 2a_0\lambda_1 + a_1 = 0.$$

Pero,

$$\varphi_2'(x) = x\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x}, \quad \text{y} \quad \varphi_2''(x) = x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x},$$

con lo que

$$a_0\varphi_2''(x)+a_1\varphi_2'(x)+a_2\varphi_2(x) = p(\lambda_1)xe^{\lambda_1 x}+(2a_0\lambda_1+a_1)e^{\lambda_1 x} = 0,$$

y por tanto $\varphi_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$, es solución (4.58).
En resumen, cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de (4.58), es decir, la solución general de dicha EDO viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

iii) Si las dos raices son complejas conjugadas.
En tal caso,

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, y $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Razonando como en el caso i), se comprueba que las funciones $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ y $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ son soluciones de (4.58), pero toman valores complejos. Para solventar este problema, y limitarnos al caso de funciones con valores reales, se toman como soluciones de (4.58), las funciones parte real y parte imaginaria de $\varphi_1(x)$, es decir,

$$\psi_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad \psi_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),$$

que son linealmente independientes.
En resumen, en este caso, $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de (4.58), es decir, la solución general de dicha EDO viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2) = e^{\alpha x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

d3).- EDO de Euler de segundo orden.

La EDO de Euler de segundo orden es una ecuación de la forma

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0, \tag{4.60}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$, dados.

Para resolver (4.60) en $I = (0, +\infty)$, se puede efectuar el cambio de variable independiente

$$t = \log x, \tag{4.61}$$

que convierte la ecuación en una lineal homogénea de coeficientes constantes.

En efecto, si denotamos por $\dot{y}$ a la derivada primera de y respecto de t, e $\ddot{y}$ a la derivada segunda de y respecto de t, teniendo en cuenta que

$$y' = \dot{y}\frac{1}{x}, \quad \text{e} \quad y'' = \ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\frac{1}{x^2},$$

sustituyendo en (4.60), y simplificando, obtenemos

$$a_0\ddot{y} + (a_1 - a_0)\dot{y} + a_2 y = 0,$$

EDO de coeficientes costantes que, una vez resuelta, y tras cambiar t por $\log x$, nos proporciona la solución general de (4.60) en $I = (0, +\infty)$. Para resolver la misma ecuación en $(-\infty, 0)$, basta hacer el cambio $t = \log(-x)$, y proceder de manera similar.

Otra manera de actuar para resolver (4.60), consiste en buscar soluciones de la forma $y = x^\lambda$, con λ por determinar. En este caso, derivando y sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$a_0\lambda(\lambda - 1)x^\lambda + a_1\lambda x^\lambda + a_2 x^\lambda = 0,$$

con lo que si λ es solución de la ecuación

$$a_0\lambda(\lambda - 1) + a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{4.62}$$

entonces $y = x^\lambda$ es solución de (4.60). En consecuencia, si las dos soluciones de (4.62) son reales y distintas se obtiene así un sistema fundamental de soluciones de (4.60). El análisis de lo que hay que hacer si (4.62) posee solución real doble o soluciones complejas conjugadas, se deja como ejercicio.

Una vez hemos visto varios casos en que sabemos cómo hallar V_0^2, nos planteamos la cuestión de, conociendo V_0^2, o lo que es lo mismo, un sistema fundamental $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ de soluciones de (4.56), determinar V_b^2, cuando $b \not\equiv 0$, es decir hallar la solución general de (4.55).

En primer lugar, como en el caso de las EDO lineales de primer orden, es inmediato comprobar que se satisfacen la dos propiedades siguientes:

a) Si $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ pertenecen a V_b^2, es decir, son soluciones de (4.55) en I, entonces $\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}$ pertenece a V_0^2, es decir, es solución de (4.56) en I.

b) Si $\widehat{\varphi}$ pertenece a V_b^2, es decir, es solución de (4.55) en I, y φ pertenece a V_0^2, es decir, es solución de (4.56) en I, entonces $\widehat{\varphi}+\varphi$ pertenece a V_b^2, es decir, es solución de (4.55) en I.

Como consecuencia de a) y b), es inmediato obtener que si $\widehat{\varphi}_p$ es una solución particular de (4.55) en I, entonces

$$V_b^2 = \{\widehat{\varphi}_p + \varphi;\ \varphi \in V_0^2\}, \tag{4.63}$$

es decir, V_b^2 coincide con la variedad afín $\widehat{\varphi}_p + V_0^2$.

La igualdad (4.63) se expresa también diciendo que la solución general de (4.55) es igual a la suma de una solución particular de dicha ecuación, más la solución general de (4.56).

El problema es por tanto cómo calcular una solución particular de (4.55). Vamos a ver que, al menos en teoría, ello es posible si se conoce un sistema fundamental $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ de soluciones de la ecuación homogénea (4.56).

Para ello, se puede usar el denominado método de Lagrange de variación de las constantes, cuya idea, al igual que en el caso de las EDO de primer orden, consiste en, sabiendo que

$$y_h(x, C_1, C_2) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x),$$

es solución general de la EDO homogénea, buscar $\widehat{\varphi}(x)$, solución de (4.55), de la forma

$$\widehat{\varphi}(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x), \tag{4.64}$$

con $C_k(x)$, $k = 1, 2$, funciones derivables de la variable x por determinar. Para hallar las $C_k(x)$, se exige que sean soluciones del SDO

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{array} \right. \tag{4.65}$$

Que (4.65) posee soluciones $(C_1(x), C_2(x)) \in C^1(I) \times C^1(I)$, será demostrado en el Tema 5, y lo admitimos por ahora.

Tomando $\widehat{\varphi}(x)$ de la forma (4.64), con las $C_k(x)$ satisfaciendo (4.65), se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}'(x) &= C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x) + C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) \\ &= C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x), \quad \forall\, x \in I, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}''(x) &= C_1(x)\varphi_1''(x) + C_2(x)\varphi_2''(x) + C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) \\ &= C_1(x)\varphi_1''(x) + C_2(x)\varphi_2''(x) + \frac{b(x)}{a_0(x)}, \quad \forall\, x \in I, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} & a_0(x)\widehat{\varphi}''(x) + a_1(x)\widehat{\varphi}'(x) + a_2(x)\widehat{\varphi}(x) \\ &= C_1(x)\left[a_0(x)\varphi_1''(x) + a_1(x)\varphi_1'(x) + a_2(x)\varphi_1(x)\right] \\ &+ C_2(x)\left[a_0(x)\varphi_2''(x) + a_1(x)\varphi_2'(x) + a_2(x)\varphi_2(x)\right] + b(x) = b(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in I$, con lo que $\widehat{\varphi}(x)$ es una solución particular de (4.55).

Observación 4.6 *En el caso en que la ecuación lineal* (4.55) *es de coeficientes constantes, si la función* $b(x)$ *es de la forma*

$$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\operatorname{sen}(\beta x)),$$

con $P_n(x)$ *y* $Q_m(x)$ *polinomios de grado* n *y* m *respectivamente, y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *dados, se puede encontrar solución particular* $y_p(x)$ *de* (4.55), *buscándola de la forma*

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(\widetilde{P}_r(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_r(x)\operatorname{sen}(\beta x)),$$

con $\widetilde{P}_r(x)$ *y* $\widetilde{Q}_r(x)$ *polinomios de grado* $r = \text{máx}(n, m)$, *con los coeficientes por determinar, y* s *igual al orden de multiplicidad de* $\alpha + i\beta$ *como raiz del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada a* (4.55) *(en particular,* $s = 0$ *si* $\alpha + i\beta$ *no es raiz del polinomio característico).*

Observación 4.7 *Si*

$$b(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j(x),$$

y conocemos para cada $1 \leq j \leq m$ *una solución particular* $\widehat{\varphi}^j(x)$ *de la EDO* (4.55) *en el caso en que el término independiente es* $b_j(x)$, *entonces es inmediato comprobar que la función*

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^{m} \widehat{\varphi}^j(x),$$

es una solución particular de la EDO (4.55) *en el caso en que el término independiente es* $b(x)$. *Esta afirmación se conoce como principio de superposición, y es útil en algunos casos para hallar soluciones particulares de* (4.55)

Referencias

[1] M. Braun: *Differential Equations and their Applications*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[2] A. Dou: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Dossat, Madrid, 1969.

[3] A. Kiseliov, M. Krasnov & G. Makarenko: *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Mir, Mosc, 1979.

[4] S. Novo, R. Obaya & J. Rojo: *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, MacGraw & Hill, Madrid, 1995.

Tema 2

El Teorema de existencia y unicidad de Picard

1 Formulación integral del Problema de Cauchy

El objetivo del presente Tema, y del siguiente, es analizar el Problema de Cauchy para un SDO de primer orden en forma normal. En concreto, consideremos el problema

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$, una función dada, siendo $N \geq 1$ entero, y donde $(x_0, y_0) \in \Omega$ está fijado. Recordemos que cuando usamos la notación $(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1}$, ello significa que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^N$. Recordemos también, que si $N = 1$, el SDO $y' = f(x,y)$ es en realidad una EDO de primer orden en forma normal, y si $N > 1$, entonces (PC) es una notación abreviada para el problema

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_N), \\ ...., \\ ...., \\ y_N' = f_N(x, y_1, ..., y_N), \\ y_1(x_0) = y_{1_0}, ..., y_N(x_0) = y_{N_0}. \end{cases}$$

Como ya dijimos en el Tema 1, dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío tal que $x_0 \in I$, una solución del problema (PC) en el intervalo I, es cualquier función $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$, tal que :

(i) Existe el vector derivada (componente a componente) $\varphi'(x)$ en todo punto $x \in I$, donde si x es un extremo de I, $\varphi'(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,

(ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$,

(iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, para todo $x \in I$,

(iv) $\varphi(x_0) = y_0$.

A partir de ahora, vamos a suponer siempre que Ω es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^{N+1}$, y que f es continua de Ω en $\mathbb{R}^N$, lo que denotaremos

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

En tal caso, es inmediato comprobar que la condición (i) en la definición de solución de (PC) precedente, puede ser sustituida por pedir

(i') $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$.

A continuación, vamos a ver que (PC) puede ser formulado de otra manera equivalente que nos va a resultar de utilidad para analizar la existencia de solución al problema.

Lema 1.1 *Supongamos que Ω es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^{N+1}$, y que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de interior no vacío tal que $x_0 \in I$, y $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ una función dada. Bajo estas condiciones, φ es solución del problema (PC) en el intervalo I, si y sólo si satisface las tres condiciones siguientes, denominadas formulación integral del problema (PC):*

(j) $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^N)$,

(jj) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$, *para todo* $x \in I$,

(jjj) $\varphi(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall\, x \in I$, *donde la integral está efectuada componente a componente.*

Demostración.- Que (i'), (ii), (iii) y (iv) implican (j), (jj) y (jjj), es inmediato de comprobar, sin más que integrar en (iii) desde x_0 hasta x, y hacer uso de (iv).

Recíprocamente, si φ satisface (j), (jj) y (jjj), en particular, teniendo en cuenta que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, la función $f(s, \varphi(s))$ pertenece a $C(I; \mathbb{R}^n)$, ya que se obtiene de la composición de aplicaciones continuas

$$s \in I \mapsto (s, \varphi(s)) \in \Omega \mapsto f(s, \varphi(s)) \in \mathbb{R}^N.$$

En consecuencia, por (jjj), $\varphi(x_0) = y_0$, y derivando, φ satisface (iii) e (i'). ■

La formulación integral de (PC) permite plantearse este problema desde un punto de vista abstracto. En concreto, y por simplificar, supongamos por un momento que $\Omega = \mathbb{R}^{N+1}$, y que $f \in C(\mathbb{R}^{N+1}; \mathbb{R}^N)$. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de interior no vacío y tal que $x_0 \in I$. Consideremos la aplicación

$$T : \varphi \in C(I; \mathbb{R}^N) \mapsto T\varphi \in C(I; \mathbb{R}^N),$$

definida por

$$(T\varphi)(x) = x_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall\, x \in I.$$

Por el Lema precedente, es evidente que φ es solución de (PC) en I si y sólo si es un punto fijo de la aplicación T, es decir,

$$T\varphi = \varphi.$$

Resulta por tanto de interés el estudiar condiciones bajo las que una aplicación como T posee puntos fijos. Este estudio, como veremos más adelante, pasa por dotar al espacio vectorial $C(I; \mathbb{R}^N)$ de una estructura topológica adecuada. Ello va a ser posible en el caso en que $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado.

2 Espacios métricos. Espacios de Banach

Recordemos que un espacio métrico es cualquier par (X, d), donde X es un conjunto no vacío, y d es una distancia sobre X, es decir, es una aplicación

$$d : (x, y) \in X \times X \mapsto d(x, y) \in [0, +\infty),$$

tal que para todo $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) = d(y, x)$,
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,
3. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Si (X, d) es un espacio métrico, se dice que $A \subset X$ es un conjunto abierto si para cada punto $a \in A$ existe un $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a; \varepsilon_a) \subset A$, donde, por definición,

$$B(a; \varepsilon_a) = \{x \in X;\ d(x, a) < \varepsilon_a\}.$$

De esta forma, queda definida sobre X una estructura de espacio topológico. En particular, un subconjunto $C \subset X$ será cerrado si y sólo si su complementario $X \setminus C$ es abierto.

Una propiedad fundamental de la topología así definida sobre un espacio métrico, es que puede ser analizada mediante sucesiones. En concreto, dada un a sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, se dice que converge a $x \in X$ en (X, d) si

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Es bien conocido la unicidad del límite, es decir, que si $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$, converge a $x \in X$ y a $y \in X$, entonces $x = y$. Por otra parte, entre otras propiedades, se satisfacen:

a) Un conjunto $C \subset X$ es cerrado, si y sólo si, dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset C$, si dicha sucesión converge a $x \in X$, entonces forzosamente x pertenece a C.

b) Sean $(Y, \widetilde{d})$ otro espacio métrico, y $T : X \to Y$ una aplicación. Entonces, T es continua, es decir la imagen inversa $T^{-1}(A)$ es abierto de X cualquiera que sea el abierto A de Y, si y sólo si dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$, si dicha sucesión converge a x en X, entonces forzosamente la sucesión $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ converge a Tx en Y.

Una clase muy importante de espacios métricos la constituyen los espacios normados (sobre $\mathbb{R}$). Recordemos que un espacio normado (sobre $\mathbb{R}$) es cualquier par $(X, \|\cdot\|)$, tal que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y $\|\cdot\|$ es una norma sobre X, es decir, es una aplicación

$$\|\cdot\| : x \in X \mapsto \|x\| \in [0, +\infty),$$

tal que para todo $x, y \in X$, y todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

3. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in X,$$

que se denomina la distancia asociada a la norma $\|\cdot\|$.

Observación 2.1 *Evidentemente, todo subconjunto no vacío de un espacio métrico es un espacio métrico si sobre él consideramos la misma distancia. En particular, todo subconjunto no vacío de un espacio normado es un espacio métrico si sobre él consideramos la distancia asociada a la norma.*

También, es inmediato que todo subespacio vectorial de un espacio normado es un espacio normado si sobre él consideramos la misma norma.

Un primer ejemplo de espacio normado lo constituye $\mathbb{R}^N$ dotado de la norma euclídea $\|\cdot\|_2$, definida por

$$\|y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \right)^{1/2}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^N.$$

Otras normas posibles sobre $\mathbb{R}^N$ son

$$\|y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N} |y_i|, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^N,$$

y

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |y_i|, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^N.$$

A partir de ahora, por razones de conveniencia notacional, denotaremos por $|y|$ a la norma euclídea de $y \in \mathbb{R}^N$.

Consideremos ahora el espacio vectorial $C([a,b],\mathbb{R}^N)$, donde $-\infty < a < b < +\infty$. Sobre dicho espacio podemos considerar también las tres normas siguientes:

$$\|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx\right)^{1/2}, \quad \forall\, \varphi \in C([a,b];\mathbb{R}^N),$$

$$\|\varphi\|_1 = \int_a^b |\varphi(x)|\, dx, \quad \forall\, \varphi \in C([a,b];\mathbb{R}^N),$$

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|, \quad \forall\, \varphi \in C([a,b];\mathbb{R}^N).$$

Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre X. Por definición, ambas normas son equivalentes si existen dos constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall\, x \in X.$$

En tal caso, las topologías inducidas en X por ambas normas coinciden.

Es bien conocido que en $\mathbb{R}^N$ (de hecho en todo espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita) todas las normas son equivalentes. Sin embargo, en general, no es ésta la situación. Como veremos más adelante, las tres normas antes definidas en $C([a,b];\mathbb{R}^N)$ no son equivalentes.

Definición 2.2 *Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ se dice que es de Cauchy si*

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0,$$

es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_n,x_m) \leq \varepsilon, \quad \forall\, n,m \geq n_0(\varepsilon).$$

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ converge a $x \in X$, entonces es una sucesión de Cauchy. El recíproco no es cierto, así, por ejemplo, la sucesión de funciones

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-1,0), \\ nx, & \text{si } x \in [0,1/n), \\ 1, & \text{si } x \in [1/n,1], \end{cases}$$

es de Cauchy en $(C([-1,1]), \|\cdot\|_2)$, pero no es convergente en dicho espacio.

Definición 2.3 *Un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy en dicho espacio es convergente en el mismo. Un espacio de Banach es cualquier espacio normado que sea completo para la métrica inducida por la norma.*

Observación 2.4 *Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas equivalentes sobre X. En tal caso, $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach si y sólo si $(X, \|\cdot\|_2)$ es también un espacio de Banach.*

El espacio $\mathbb{R}^N$, con cualquier norma, es un espacio de Banach. Sin embargo, según se desprende del contraejemplo antes expuesto, $(C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ no es un espacio de Banach. De la misma forma, resulta fácil hallar contraejemplos que demuestran que $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$ tampoco es un espacio de Banach (ver los ejercicios). Más adelante vamos a demostrar que, en general, $(C([a,b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, con lo que, en particular, sobre $C([a,b])$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ no son normas equivalentes a $\|\cdot\|_\infty$.

Observación 2.5 *En general, todo subconjunto cerrado no vacío de un espacio métrico completo es un espacio métrico completo si sobre él consideramos la misma distancia. En particular, todo subconjunto cerrado no vacío de un espacio de Banach es un espacio métrico completo si sobre él consideramos la distancia asociada a la norma.*

También, es inmediato que todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach es un espacio de Banach si sobre él consideramos la misma norma.

3 El espacio $(C([a,b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$

Consideremos sobre el espacio vectorial $C([a,b]; \mathbb{R}^N)$ la norma

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|.$$

Dicha norma se denomina también la norma de la convergencia uniforme sobre $[a,b]$, ya que dada una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subset C([a,b]; \mathbb{R}^N)$, dicha sucesión converge a φ en $(C([a,b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \right) = 0,$$

es decir, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe un $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall\, x \in [a, b],$$

que no es más que la expresión de que $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ converge a φ uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

Se tiene el siguiente resultado

Teorema 3.1 *El espacio* $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subset C([a, b]; \mathbb{R}^N)$, una sucesión de Cauchy en el espacio normado $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$. En tal caso, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe un $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall\, n, m \geq n_0(\varepsilon),$$

es decir

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{3.1}$$

En consecuencia, para cada $x \in [a, b]$ fijado, la sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy y por tanto convergente en $\mathbb{R}^N$. Así pues, tiene sentido definir la función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, por

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x), \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{3.2}$$

De esta forma, pasando al límite para $m \to \infty$ en (3.1), obtenemos que para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe un $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{3.3}$$

Queda claro de (3.3), que si $\varphi \in C([a, b]; \mathbb{R}^N)$, entonces la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ converge a φ en $(C([a, b]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$, y por tanto, para terminar la demostración del teorema, tan sólo nos resta comprobar que φ es continua en $[a, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$ dado, y fijemos un $n \geq n_0(\varepsilon)$, con $n_0(\varepsilon)$ satisfaciendo (3.3). Como φ_n es uniformemente continua, existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo par $x, \widetilde{x} \in [a, b]$ que satisfaga $|x - \widetilde{x}| \leq \delta$, se tiene

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(\widetilde{x})| \leq \varepsilon. \tag{3.4}$$

De esta forma, teniendo en cuenta que

$$|\varphi(x) - \varphi(\widetilde{x})| \leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi_n(\widetilde{x})| + |\varphi_n(\widetilde{x}) - \varphi(\widetilde{x})|,$$

de (3.3) y (3.4) obtenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo par $x, \widetilde{x} \in [a, b]$ que satisfaga $|x - \widetilde{x}| \leq \delta$, se tiene

$$|\varphi(x) - \varphi(\widetilde{x})| \leq 3\varepsilon,$$

y por consiguiente φ es uniformemente continua en $[a, b]$. ■

Como consecuencia del teorema precedente, se tiene

Corolario 3.2 *Todo subconjunto cerrado no vacío de* $(C([a,b];\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$*, dotado de la métrica asociada a* $\|\cdot\|_\infty$*, es un espacio métrico completo.*

Todo subespacio vectorial cerrado de $(C([a,b];\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$*, dotado de la misma norma, es un espacio de Banach.*

4 Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo de Banach

Como ya hemos visto, resulta de interés el estudio de condiciones bajo las que una aplicación $T : X \to X$ posee un punto fijo. Por conveniencia notacional, usaremos Tx para designar al transformado de x por T.

Definición 4.1 *Sea* (X,d) *un espacio métrico, y consideremos una aplicación* $T : X \to X$*. Se dice que* T *es contractiva, si existe un número* $\alpha \in [0,1)$ *tal que*

$$d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y), \quad \forall\, x,y \in X.$$

Observación 4.2 *Obsérvese que si* T *es contractiva, en particular es continua, de hecho es uniformemente continua, como aplicación de* (X,d) *en sí mismo.*

Obsérvese también que en la definición de aplicación contractiva, la constante α *es estríctamente menor que* 1*. En el caso en que la aplicación* T *no es contractiva, pero satisface la desigualdad*

$$d(Tx,Ty) \le d(x,y), \quad \forall\, x,y \in X,$$

se dice que T *es no expansiva.*

Ya veremos más adelante, y en los ejercicios, ejemplos de aplicaciones contractivas. Para este tipo de aplicaciones se tiene el siguiente importante resultado.

Teorema 4.3 (**Teorema del punto fijo de Banach**) *Sean* (X,d) *un espacio métrico completo, y* $T : X \to X$ *una aplicación contractiva. Bajo estas condiciones, existe un y sólo un punto fijo de* T*, es decir, existe un y sólo un* $\widehat{x} \in X$ *tal que*

$$T\widehat{x} = \widehat{x}.$$

Demostración.- Como T es contractiva, sabemos que existe $\alpha \in [0,1)$ tal que

$$d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y), \quad \forall\, x,y \in X.$$

Fijemos un punto $x_0 \in X$, y de manera inductiva, definamos

$$x_n = Tx_{n-1}, \quad \forall\, n \ge 1,$$

o lo que es equivalente,

$$x_n = T^n x_0, \quad \forall\, n \ge 1,$$

donde por T^n denotamos a la composición de T consigo mismo n veces.

En primer lugar, vamos a demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ así definida es de Cauchy en X. En efecto, sean $m > n \geq 1$, es inmediato que si $n > 1$, entonces

$$d(x_m, x_n) = d(Tx_{m-1}, Tx_{n-1}) \leq \alpha d(x_{m-1}, x_{n-1}).$$

Por consiguiente, iterando esta desigualdad n veces, obtenemos

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^n d(x_{m-n}, x_0), \quad \forall\, m > n \geq 1. \tag{4.5}$$

Ahora bien, por las propiedades de la función distancia,

$$d(x_{m-n}, x_0) \leq \sum_{k=1}^{m-n} d(x_k, x_{k-1}),$$

y por (4.5) aplicada con $m = k$ y $n = k - 1$,

$$d(x_k, x_{k-1}) \leq \alpha^{k-1} d(x_1, x_0).$$

De estas dos últimas desigualdades, obtenemos

$$d(x_{m-n}, x_0) \leq \sum_{k=1}^{m-n} \alpha^{k-1} d(x_1, x_0),$$

con lo que, teniendo en cuenta que $\alpha \in [0, 1)$,

$$d(x_{m-n}, x_0) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j d(x_1, x_0) = \frac{1}{1-\alpha} d(x_1, x_0), \quad \forall\, m > n \geq 1.$$

Llevando esta última desigualdad a (4.5), obtenemos

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0), \quad \forall\, m > n \geq 1. \tag{4.6}$$

Como $0 \leq \alpha < 1$, es evidente que $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, y por tanto, de (4.6) se obtiene

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_m, x_n) = 0,$$

es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en (X, d).

Como (X, d) es completo, existe un $\widehat{x} \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \widehat{x},$$

pero entonces, teniendo en cuenta que T es continua,

$$T\widehat{x} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \widehat{x},$$

y por consiguiente $\widehat{x}$ es un punto fijo de T.

Finalmente, para demostrar la unicidad, supongamos que $\widetilde{x}$ es otro punto fijo de T. En tal caso,

$$d(\widehat{x}, \widetilde{x}) = d(T\widehat{x}, T\widetilde{x}) \leq \alpha d(\widehat{x}, \widetilde{x}),$$

es decir,

$$(1-\alpha)d(\widehat{x}, \widetilde{x}) \leq 0,$$

con lo que al ser $\alpha < 1$, obtenemos que $d(\widehat{x}, \widetilde{x}) = 0$, y por tanto $\widehat{x} = \widetilde{x}$. ■

Observación 4.4 *Obsérvese que la demostración precedente es constructiva, de hecho obtenemos que, bajo las condiciones del Teorema, sea cual sea el punto inicial* x_0 *que tomemos en* X*, la sucesión* $x_n = T^n x_0$ *converge en* (X, d) *al único punto fijo* $\widehat{x}$ *de* T*.*

Además, de hecho podemos obtener una estimación de la cota de error que se produce al tomar $x_n = T^n x_0$ *como una aproximación de* $\widehat{x}$*. En efecto, pasando al límite en* (4.6) *para* $m \to \infty$*, se tiene*

$$d(\widehat{x}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0), \quad \forall\, n \geq 1. \tag{4.7}$$

Observación 4.5 *El Teorema precedente no se satisface si* T *es no expansiva. Como un contraejemplo sencillo, consideremos* $X = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ *con la distancia usual* $d(x, y) = |x - y|$*. Como* X *es un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}$*, resulta ser un espacio métrico completo. Sea* T *la aplicación*

$$T : x \in [1, +\infty) \mapsto x + \frac{1}{x} \in [1, +\infty).$$

Teniendo en cuenta que T *es una función creciente en* $[1, +\infty)$*, es inmediato comprobar que*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \quad \forall\, x \neq y \in [1, +\infty),$$

y sin embargo, no existe punto fijo de T*, es decir, no existe solución en* $[1, +\infty)$ *de la ecuación* $x = x + \dfrac{1}{x}$*.*

El Teorema del punto fijo de Banach se puede extender al caso en que alguna potencia de T es contractiva. En concreto, se tiene:

Teorema 4.6 *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo, y* $T : X \to X$ *una aplicación tal que para algún entero* $k \geq 1$*, la aplicación* T^k *es contractiva. Bajo estas condiciones, existe un y sólo un punto fijo de* T*, es decir, existe un y sólo un* $\widehat{x} \in X$ *tal que*

$$T\widehat{x} = \widehat{x}.$$

Además

$$\widehat{x} = \lim_{n\to\infty} T^n x_0, \quad \forall\, x_0 \in X. \tag{4.8}$$

Demostración.- Si $k = 1$, nuestro enunciado no es sino el Teorema del punto fijo de Banach.

Supongamos $k > 1$. Es inmediato ver que si $\widetilde{x}$ es un punto fijo de T, entonces es un punto fijo de T^k, ya que

$$T^k\widetilde{x} = T^{k-1}(T\widetilde{x}) = T^{k-1}\widetilde{x} = ... = T\widetilde{x} = \widetilde{x}.$$

Recíprocamente, si $\widetilde{x}$ es un punto fijo de T^k, entonces

$$T^k(T\widetilde{x}) = T(T^k\widetilde{x}) = T\widetilde{x},$$

y por tanto $T\widetilde{x}$ es también un punto fijo de T^k. Como T^k es contractiva, posee un único punto fijo. Consiguientemente, $T\widetilde{x} = \widetilde{x}$, es decir, $\widetilde{x}$ es un punto fijo de T.

En resumen, vemos que bajo las condiciones del teorema, $\widetilde{x}$ es un punto fijo de T si y sólo si es un punto fijo de T^k.

Como T^k es contractiva, y (X, d) es completo, sabemos que existe un único punto fijo $\widehat{x}$ de T^k, que por tanto es el único punto fijo de T.

Además, de acuerdo con la Observación 4.4, se satisface

$$\lim_{n\to\infty} (T^k)^n y_0 = \widehat{x}, \quad \forall\, y_0 \in X. \tag{4.9}$$

Si x_0 es cualquier punto fijado de X, tomando $y_0 = x_0$, y más generalmente $y_0 = T^j x_0$, obtenemos de (4.9)

$$\lim_{n\to\infty} T^{nk+j} x_0 = \widehat{x}, \quad \forall j = 0, 1, .., k-1, \quad \forall\, x_0 \in X,$$

es decir, (4.8). ■

5 Funciones lipschitzianas

En esta sección estudiamos los conceptos de función globalmente lipschitziana y de función localmente lipschitziana, respecto de la variable y, en Ω.

Consideremos fijado un conjunto no vacío, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, cuyos puntos denotamos por (x, y) con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^N$.

Definición 5.1 *Se dice que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es una función globalmente lipschitziana respecto de la variable y en Ω, si existe una constante $L > 0$ (dependiente de f), tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall\, (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega. \tag{5.10}$$

A L se le denomina una constante de Lipschitz respecto de la variable y para f en Ω.

Al conjunto de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que sean globalmente lipschitzianas respecto de la variable y en Ω, lo denotaremos por $Lip(y, \Omega)$. Es inmediato comprobar que $Lip(y, \Omega)$, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Obsérvese que, en particular, todas las funciones constantes pertenecen a $Lip(y, \Omega)$.

Observación 5.2 *En general, dada una función $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $n \geq 1$ y $m \geq 1$ enteros, se dice que h es globalmente lipschitziana en D, si existe una constante $L_h > 0$ tal que*

$$|h(z_1) - h(z_2)| \leq L_h |z_1 - z_2|, \quad \forall\, z_1, z_2 \in D.$$

La noción que nosotros hemos introducido en la Definición 5.1, aunque emparentada con la de función globalmente lipschitziana precedente, es diferente, y está motivada por su utilidad en el estudio del Problema de Cauchy para un SDO en forma normal que efectuaremos con posterioridad.

Definición 5.3 *Supongamos que Ω es abierto. Se dice que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es una función localmente lipschitziana respecto de la variable y en Ω, si para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ existe una bola abierta de centro dicho punto, contenida en Ω, y tal que la restricción de f a dicha bola es globalmente lipschitziana respecto de la variable y. Es decir, f es localmente lipschitziana respecto de la variable y en Ω, si para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ existen un $\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, y una constante $L(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, tales que*

$$B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y})) \subset \Omega,$$

y para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y}))$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(\bar{x}, \bar{y}) |y_1 - y_2|. \tag{5.11}$$

Si Ω es abierto, al conjunto de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que sean localmente lipschitzianas respecto de la variable y en Ω, lo denotaremos por $Lip_{loc}(y, \Omega)$. Es inmediato comprobar que $Lip_{loc}(y, \Omega)$, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y que

$$Lip(y, \Omega) \subset Lip_{loc}(y, \Omega),$$

con contenido estricto, como veremos más adelante.

Es también sencillo comprobar el resultado siguiente:

Proposición 5.4 (a) *Si $f \in Lip(y, \Omega)$, entonces f es uniformemente continua respecto de la variable y en Ω, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, dependiente de ε, tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega \text{ tales que } |y_1 - y_2| \leq \delta.$$

(b) *Si* $f \in Lip_{loc}(y, \Omega)$, *entonces* f *es continua respecto de la variable* y *en* Ω, *es decir, para todo* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ *y todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$, *dependiente de* $(\bar{x}, \bar{y})$ *y* ε, *tal que si* $|y - \bar{y}| \leq \delta$, *entonces* $(\bar{x}, y)$ *pertenece a* Ω *y*

$$|f(\bar{x}, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leq \varepsilon.$$

Observación 5.5 *En general, Lip*(y, Ω) *no está contenido en* $C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, *es decir, existen funciones* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *que son globalmente lipschitzianas en* Ω, *pero no son continuas en dicho conjunto. Así, por ejemplo, la función*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x \geq 0, \\ y & si\ x > 0, \end{cases}$$

pertenece a Lip$(y, \mathbb{R}^{N+1})$, *pero no es continua en los puntos de* $\mathbb{R}^{N+1}$ *de la forma* $(0, y)$.

Recíprocamente, una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *que sea continua, no necesariamente es, ni siquiera, localmente lipschitziana en* Ω. *Por ejemplo, la función*

$$f(x, y) = \sqrt{|y|}, \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

es continua en $\mathbb{R}^2$, *pero no pertenece a* $Lip_{loc}(y, \mathbb{R}^2)$, *ya que en caso contrario, en particular existiría un* $\varepsilon > 0$ *tal que la restricción de* f *a* $B((0, 0), \varepsilon)$ *sería globalmente lipschitziana, y por tanto existiría una constante* $L(0, 0) > 0$ *tal que, teniendo en cuenta que* $f(0, 0) = 0$,

$$|f(0, \varepsilon/n)| \leq L(0, 0)(\varepsilon/n), \quad \forall\, n \geq 2,$$

es decir,

$$\sqrt{\varepsilon/n} \leq L(0, 0)(\varepsilon/n), \quad \forall\, n \geq 2,$$

lo cual es un absurdo.

El resultado que sigue es de gran utilidad para decidir en un buen número de situaciones si una función es global o localmente lipschitziana.

Teorema 5.6 *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *un conjunto abierto, y*

$$f = (f_1, ..., f_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N,$$

una función tal que existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, *para todo* $i, j = 1, ..., N$, *y son continuas en* Ω. *En estas condiciones:*

(a) $f \in Lip_{loc}(y, \Omega)$.

(b) *Si además* Ω *es convexo, entonces* $f \in Lip(y, \Omega)$ *si y sólo si todas las derivadas parciales* $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, *están acotadas en* Ω, *es decir,*

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| < +\infty, \quad \forall\, i, j = 1, ..., N. \tag{5.12}$$

Demostración.- (a) Sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$. Como Ω es abierto, existe $\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, tal que la bola cerrada

$$\overline{B} = \overline{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y})),$$

está contenida en Ω. Teniendo en cuenta que $\overline{B}$ es un compacto contenido en Ω, y que en particular las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, ..., N$, son continuas en $\overline{B}$, podemos afirmar que existe una constante $M(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, tal que

$$\max_{(x,y) \in \overline{B}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| \leq M(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall\, i, j = 1, ..., N. \tag{5.13}$$

Por otra parte, por el Teorema del valor medio para funciones reales de varias variables, si $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{B}$, entonces para cada $i = 1, ..., N$, existe un punto $\widehat{y}_i$ en el segmento que une y_1 con y_2, tal que

$$f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \widehat{y}_i)(y_{1_j} - y_{2_j}),$$

y por tanto, teniendo en cuenta (5.13),

$$|f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2)| \leq M(\bar{x}, \bar{y}) \sum_{j=1}^{N} |y_{1_j} - y_{2_j}| \leq M(\bar{x}, \bar{y}) \sqrt{N} |y_1 - y_2|,$$

para todo $i = 1, ..., N$, de donde es inmediato que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M(\bar{x}, \bar{y}) N |y_1 - y_2|,$$

para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{B}$, y en consecuencia f es localmente lipschitziana respecto de y en Ω.

(b) Ahora, supongamos que Ω es convexo.

En primer lugar, si se satisface (5.12), entonces, razonando como en la demostración de (a), pero sustituyendo $\overline{B}$ por Ω, es inmediato demostrar que f es globalmente lipschitziana respecto de y en Ω, con constante de Lipschitz $L = MN$, siendo

$$M = \max_{1 \leq i,j \leq N} \left(\sup_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| \right).$$

Recíprocamente, supongamos que no se satisface (5.12), es decir, que existen $i, j \in \{1, ..., N\}$, tales que

$$\sup_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| = +\infty.$$

En tal caso, para todo entero $n \geq 1$ existe un punto $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \Omega$ tal que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \right| \geq 2n,$$

con lo que, teniendo en cuenta la definición de derivada parcial, si denotamos e_j al vector unitario de $\mathbb{R}^N$ de componentes todas nulas salvo la j-ésima igual a 1, obtenemos que para cada $n \geq 1$ existe un $\varepsilon_n > 0$, tal que

$$\left| \frac{f_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n + \varepsilon_n e_j) - f_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n)}{\varepsilon_n} \right| \geq n,$$

es decir,

$$|f_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n + \varepsilon_n e_j) - f_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n)| \geq n\varepsilon_n = n|(y_n + \varepsilon_n e_j) - y_n|,$$

con lo que f no es globalmente lipschitziana respecto de y en Ω. ■

Observación 5.7 *Consideránse las funciones f_1, f_2 y f_3, definidas todas en $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}$, dadas por*

$$f_1(x,y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{x}{1+y^2}, \quad f_3(x,y) = \begin{cases} xy, & si\ x > 0, \\ y, & si\ x \leq 0. \end{cases}$$

Resulta sencillo comprobar, por aplicación del Teorema precedente, que $f_1 \in Lip(y, \mathbb{R}^2)$, que f_2 no es globalmente lipschitziana en $\mathbb{R}^2$, pero $f_2 \in Lip_{loc}(y, \mathbb{R}^2)$, y $f_2 \in Lip(y, \Omega)$, para todo abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^2$ que sea acotado en la dirección de x.

Finalmente, la función f_3 no satisface las condiciones del Teorema 5.6 en $\mathbb{R}^2$, ya que su derivada parcial respecto de y no es continua en todo $\mathbb{R}^2$, pero es inmediato comprobar que pertenece a $Lip_{loc}(y, \mathbb{R}^2)$, y de hecho es globalmente lipschitziana en todo abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ que sea acotado en la dirección de x.

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado:

Teorema 5.8 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto. Si $f \in Lip_{loc}(y, \Omega)$, y $K \subset \Omega$ es un conjunto compacto no vacío tal que*

$$\sup_{(x,y) \in K} |f(x,y)| < +\infty,$$

entonces

$$f \in Lip(y, K).$$

Demostración.- Fijemos, para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$, un $\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, y una constante $L(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, tales que

$$B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon(\bar{x}, \bar{y})) \subset \Omega,$$

y para todo $(x,y_1),(x,y_2)\in B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon(\bar{x},\bar{y}))$, se satisfaga

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L(\bar{x},\bar{y})|y_1-y_2|. \tag{5.14}$$

Evidentemente,

$$K\subset \bigcup_{(\bar{x},\bar{y})\in K} B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon(\bar{x},\bar{y})/2),$$

y por tanto, al ser K compacto, existe una colección finita

$$\{(\bar{x}_1,\bar{y}_1),...,(\bar{x}_n,\bar{y}_n)\}\subset K,$$

tal que

$$K\subset \bigcup_{k=1}^{n} B((\bar{x}_k,\bar{y}_k),\varepsilon(\bar{x}_k,\bar{y}_k)/2).$$

Ahora, si (x,y_1) y (x,y_2) son dos puntos de K, fijemos un $k\in\{1,...,n\}$ tal que $(x,y_1)\in B((\bar{x}_k,\bar{y}_k),\varepsilon(\bar{x}_k,\bar{y}_k)/2)$. Para (x,y_2) se tiene forzosamente una de las dos situaciones siguientes:

(a) $(x,y_2)\in B((\bar{x}_k,\bar{y}_k),\varepsilon(\bar{x}_k,\bar{y}_k))$. En tal caso, por (5.14),

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L(\bar{x}_k,\bar{y}_k)|y_1-y_2|.$$

(b) $(x,y_2)\notin B((\bar{x}_k,\bar{y}_k),\varepsilon(\bar{x}_k,\bar{y}_k))$. En tal caso,

$$|y_1-y_2|=|(x,y_1)-(x,y_2)|\le \varepsilon(\bar{x}_k,\bar{y}_k))/2,$$

con lo que, si definimos

$$\varepsilon=\min_{1\le k\le n}\left(\varepsilon(\bar{x}_k,\bar{y}_k))/2\right), \quad M=\sup_{(x,y)\in K}|f(x,y)|, \tag{5.15}$$

tenemos

$$|y_1-y_2|\ge\varepsilon,$$

y entonces

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le 2M\le \frac{2M}{\varepsilon}|y_1-y_2|.$$

En consecuencia, f es globalmente lipschitziana respecto de la variable y en K, pudiéndose tomar como constante de Lipschitz,

$$L=\max\left(\max_{1\le k\le n}(L(\bar{x}_k,\bar{y}_k)),\frac{2M}{\varepsilon}\right),$$

con ε y M definidos por (5.15). ■

6 El Teorema de existencia y unicidad local de Picard

Vamos a demostrar en esta sección un resultado de existencia y unicidad de solución, en un intervalo suficientemente pequeño, para el Problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En concreto, vamos a demostrar el siguiente resultado:

Teorema 6.1 (**Teorema de Picard**) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto no vacío, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que*

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega).$$

Con estas condiciones, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe un $\delta > 0$, tal que si denotamos

$$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

existe una y sólo una solución del problema (PC) en I_δ.

Demostración.- Como Ω es abierto y $f \in Lip_{loc}(y, \Omega)$, existen $a_0 > 0$ y $b_0 > 0$, tales que si denotamos

$$R = [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \times \overline{B}(y_0, b_0),$$

se satisfaga

$$R \subset \Omega, \quad \text{y} \quad f \in Lip(y, R).$$

Sea $L > 0$ una constante de Lipschitz para f en R, es decir, tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall\, (x, y_1), (x, y_2) \in R,$$

y denotemos

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x,y)|,$$

máximo que se alcanza por ser f continua y R compacto.

Fijemos un número δ tal que

$$0 < \delta < \min(a_0, b_0/M, 1/L), \tag{6.16}$$

y consideremos el conjunto

$$X = \{\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^N);\ |\varphi(x) - y_0| \leq b_0,\ \forall\, x \in I_\delta\}. \tag{6.17}$$

Evidentemente, X no es más que la bola cerrada en $(C(I_\delta;\mathbb{R}^N),\|\cdot\|_\infty)$, de centro la función $\varphi_0 \equiv y_0$, y radio b_0. En consecuencia, X es un subconjunto cerrado no vacío de $(C(I_\delta;\mathbb{R}^N),\|\cdot\|_\infty)$, y por tanto (X,d), con d definida por

$$d(\varphi,\psi) = \max_{x\in I_\delta} |\varphi(x)-\psi(x)|, \quad \forall\, \varphi,\psi \in X,$$

es un espacio métrico completo.

Nosotros ya hemos visto en el Tema 2 que φ es solución del problema (PC) en I_δ si y sólo si satisface la formulación integral, es decir, es solución del problema

(j) $\varphi \in C(I_\delta;\mathbb{R}^N)$,

(jj) $(x,\varphi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I_\delta$,

(jjj) $\varphi(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds, \quad \forall\, x \in I_\delta$, donde la integral está efectuada componente a componente.

Ahora bien, por la elección de δ, si φ satisface (j), (jj) y (jjj), entonces φ satisface

$$|\varphi(x)-y_0| \le b_0, \quad \forall\, x \in I_\delta,$$

ya que, en caso contrario, como $|\varphi(x_0)-y_0| = 0 < b_0$, por continuidad de la función $|\varphi(x)-y_0|$, existiría un punto $\widehat{x} \in I_\delta$, con $\widehat{x} \neq x_0$, tal que

$$|\varphi(\widehat{x})-y_0| = b_0, \quad \text{y} \quad |\varphi(x)-y_0| < b_0,$$

para todo x en el intervalo abierto de extremos x_0 y $\widehat{x}$. Entonces, por (jjj), se tendría

$$b_0 = |\varphi(\widehat{x})-y_0| = \left|\int_{x_0}^{\widehat{x}} f(s,\varphi(s))\,ds\right| \le M|\widehat{x}-x_0| \le M\delta < b_0,$$

lo cual es un absurdo.

En consecuencia, resulta ahora evidente que φ es solución del problema (PC) en el intervalo I_δ, si y sólo si φ pertenece a X y satisface (jjj).

Denotemos, para cada función $\varphi \in X$, por $T\varphi$ a la función definida por

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds, \quad \forall\, x \in I_\delta.$$

Es inmediato que $T\varphi \in C(I_\delta;\mathbb{R}^N)$. Además, para todo $x \in I_\delta$, se tiene

$$|(T\varphi)(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds\right| \le M|x-x_0| \le M\delta < b_0,$$

y en consecuencia, $T\varphi$ pertenece a X. Es decir, $T: X \to X$.

Está claro de todas las consideraciones precedentes, que φ es solución del problema (PC) en el intervalo I_δ, si y sólo si φ es un punto fijo de la aplicación T. En consecuencia, para terminar con la demostración del teorema, basta con comprobar que T es contractiva. Para ello, sean φ y ψ dos elementos de X, y $x \in I_\delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
|(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))|\, ds \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - \psi(s))|\, ds \right| \leq L|x - x_0| d(\varphi,\psi),
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$d(T\varphi, T\psi) = \max_{x \in I_\delta} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| \leq L\delta d(\varphi,\psi),$$

siendo $L\delta < 1$ por (6.16). ■

Observación 6.2 *Consideremos dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$.*

Se denomina abierto de existencia y unicidad para la EDO $y' = f(x,y)$, a cualquier abierto $\Omega \subset D$ no vacío, tal que $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y,\Omega)$, y se denomina abierto maximal de existencia y unicidad para la citada EDO a la unión de todos los abiertos de existencia y unicidad de la misma. El abierto maximal de existencia y unicidad para $y' = f(x,y)$, es por tanto el mayor abierto de $\mathbb{R}^{N+1}$ donde, para cualquier punto (x_0,y_0) de dicho abierto, se puede aplicar el Teorema de Picard al correspondiente Problema de Cauchy para la citada EDO.

De la misma manera, se denomina dominio de existencia y unicidad para la EDO $y' = f(x,y)$, a cualquier abierto conexo $\Omega \subset D$ no vacío, tal que $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y,\Omega)$, y se denomina dominio maximal de existencia y unicidad para la citada EDO a cualquier dominio de existencia y unicidad de la citada ecuación tal que no exista otro dominio de existencia y unicidad de la misma que lo contenga estríctamente.

Así, por ejemplo, si consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y, & si\ y \geq 1, \\ x^3, & si\ y < 1,\ y \geq x^2, \\ xy, & si\ y < 1,\ y < x^2,\ x \geq 0, \\ 0, & si\ y < 1,\ y < x^2,\ x < 0, \end{cases}$$

es sencillo comprobar que los conjuntos Ω_1 y Ω_2 dados por

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y < 1\} \setminus \{(x,x^2);\ x \in [-1,0]\},$$

son los correspondientes dominios maximales de existencia y unicidad, siendo $\Omega_1 \cup \Omega_2$, el abierto maximal de existencia y unicidad para la EDO $y' = f(x,y)$.

Observación 6.3 *Si $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto, pero $f \notin Lip_{loc}(y,\Omega)$, es posible todavía demostrar, para cada $(x_0,y_0) \in \Omega$ dado, la existencia de un $\delta > 0$ tal que existe solución en I_δ del correspondiente Problema de Cauchy (esta afirmación, conocida como Teorema de existencia de Peano, será demostrada en la asignatura Ampliación de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, ver [2]). No obstante, si f no es localmente lipschitziana, en general no está garantizada la unicidad de solución del (PC) en I_δ.*

Así, por ejemplo, si planteamos en $\Omega = \mathbb{R}^2$ el problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = 3y^{2/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

es sencillo comprobar que, fijado $\delta > 0$, si consideramos para cada par α, β satisfaciendo

$$-\delta \le \alpha \le 0 \le \beta \le \delta,$$

la función $\varphi_{\alpha\beta}$ definida por

$$\varphi_{\alpha\beta} = \begin{cases} (x-\alpha)^3, & si\ x \in [-\delta, \alpha), \\ 0, & si\ x \in [\alpha, \beta], \\ (x-\beta)^3, & si\ x \in (\beta, \delta], \end{cases}$$

todas las funciones $\varphi_{\alpha\beta}$ son soluciones de (PC) en $I_\delta = [-\delta, \delta]$.

7 El teorema de Picard para un Problema de Cauchy para una EDO de orden n en forma normal.

Supongamos dado un entero $n \ge 2$, un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, cuyos puntos denotaremos por $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, y una función $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$.

Consideremos la EDO de orden n en forma explícita o normal

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{7.18}$$

siendo g una función dada, definida en un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con valores en $\mathbb{R}$.

Recordemos que una solución de (7.18) es cualquier función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, satisfaciendo:

(i) Existe la derivada n-ésima $\varphi^{(n)}(x)$ en todo punto $x \in I$, donde si x es un extremo de I, $\varphi^{(n)}(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \in \mathcal{O}$, para todo $x \in I$,

(iii) $\varphi^{(n)}(x) = g(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x))$, para todo $x \in I$,

y se dice también en tal caso que la pareja (I, φ) es una solución local de (7.18), o que φ es una solución de (7.18) en el intervalo I.

Definición 7.1 *Denominaremos Problema de Cauchy o de valores iniciales para la EDO* (7.18) *al problema consistente en, fijado un punto* $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ *perteneciente a* $\mathcal{O}$, *hallar una solución local* (I, φ) *de* (7.18) *tal que* $x_0 \in I$ *y*

$$(\varphi(x_0), \varphi'(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0)) = (y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}).$$

En tal caso, se dice que (I, φ) *es una solución local del Problema de Cauchy*

$$(PC)_n \begin{cases} y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \\ \\ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Como vamos a ver a continuación, toda EDO de orden n en forma normal puede ser escrita como un SDO de primer orden y dimensión n en forma explícita, de tal manera que los resultados que hemos obtenido para los SDO, admiten una traducción inmediata al caso de las EDO de orden n.

En efecto, consideremos fijada la EDO (7.18), e introduzcamos las nuevas variables y_i, para $1 \leq i \leq n$, definidas por

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', ..., \quad y_n = y^{(n-1)}. \tag{7.19}$$

Asociado a la EDO (7.18), consideremos el SDO

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ ...., \\ ...., \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = g(x, y_1, ..., y_n). \end{cases} \tag{7.20}$$

Es inmediato comprobar que, con el cambio (7.19), la EDO (7.18) y el SDO (7.20) son equivalentes, y más concretamente que (I, φ) es solución local de (7.18) si y sólo si $(I, \varphi, \varphi', \varphi'', ..., \varphi^{(n-1)})$ es solución local de (7.20).

Resulta ahora sencillo extender el teorema de Picard al caso de un Problema de Cauchy para una EDO de orden n en forma normal.

Diremos que g es globalmente lipschitziana respecto de $(y, y', ..., y^{(n-1)})$, en $\mathcal{O}$, si existe una constante $L_g > 0$ tal que

$$|g(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}) - g(x, y_2, y_2', ..., y_2^{n-1})| \leq L_g \sum_{k=0}^{n-1} |y_1^{(k)} - y_2^{(k)}|,$$

para todo $(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}), (x, y_2, y_2', ..., y_2^{n-1}) \in \mathcal{O}$, donde en el sumatorio hemos usado la notación $y_j = y_j^{(0)}$, $y_j' = y_j^{(1)}$, $y_j'' = y_j^{(2)}$.

Denotaremos $Lip(y, y', ..., y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R})$, al conjunto de todas las funciones $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, que sean globalmente lipschitzianas respecto de $(y, y', ..., y^{n-1})$, en $\mathcal{O}$. Es inmediato comprobar que, con la suma de funciones y producto de un número real por una función usuales, $Lip(y, y', ..., y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

De manera análoga a la Definición 5.3, si $\mathcal{O}$ es abierto, diremos que la función $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es localmente lipschitziana respecto de $(y, y', ..., y^{(n-1)})$, en $\mathcal{O}$, si para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', ..., \bar{y}^{(n-1)}) \in \mathcal{O}$ existe una bola abierta de centro dicho punto, contenida en $\mathcal{O}$, y tal que g es globalmente lipschitziana respecto de la variable $(y, y', ..., y^{(n-1)})$ en dicha bola.

Denotaremos $Lip_{loc}(y, y', ..., y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R})$, al conjunto de todas las funciones $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, que sean localmente lipschitzianas respecto de $(y, y', ..., y^{n-1})$, en $\mathcal{O}$. Es también sencillo comprobar que, con la suma de funciones y producto de un número real por una función usuales, $Lip_{loc}(y, y', ..., y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 7.2 (**Teorema de Picard para una EDO de orden** n) *Sean* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *un conjunto abierto, y* $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *una función tal que*

$$g \in C(\mathcal{O}) \cap Lip_{loc}(y, y', ..., y^{(n-1)}, \mathcal{O}; \mathbb{R}).$$

Entonces, para cada punto $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in \mathcal{O}$ *dado, existe un* $\delta > 0$, *tal que en el intervalo* $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *existe una y sólo una solución del Problema de Cauchy* $(PC)_n$.

Demostración.- Basta introducir las nuevas variables y_i, para $1 \leq i \leq n$, definidas por (7.19), y asociado al problema $(PC)_n$, considerar el Problema de Cauchy para un SDO de primer orden

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ ...., \\ ...., \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = g(x, y_1, ..., y_n), \\ y_1(x_0) = y_0, \ y_2(x_0) = y_0', ..., y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{7.21}$$

Es inmediato comprobar que, con el cambio (7.19), el problema $(PC)_n$ y el problema (7.21) son equivalentes, y más concretamente que φ es solución de $(PC)_n$ en I_δ si y sólo si $(\varphi, \varphi', \varphi'', ..., \varphi^{(n-1)})$ es solución de (7.21).

Basta ahora tener en cuenta que, como se comprueba fácilmente, el problema (7.21) satisface las condiciones del Teorema 6.1. ∎

Referencias

[1] H. Amann: *Ordinary Differential Equations: an introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, New York, 1990.

[2] S. Novo, R. Obaya & J. Rojo: *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, MacGraw & Hill, Madrid, 1995.

[3] N. Rouché & J. Mawhin: *Equations Différentielles Ordinaires*, Tomo 1, Masson, Paris, 1973.

Tema 3

Soluciones maximales del Problema de Cauchy para un SDO

1. El lema de Gronwall

Como hemos visto en el tema anterior, el Teorema de Picard nos garantiza que dados $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ abierto no vacío, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega),$$

y $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe un $\delta > 0$, tal que si denotamos $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, existe una y sólo una solución en I_δ del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En este tema nos vamos a plantear, bajo las mismas condiciones, el análisis de la existencia y unicidad de solución maximal, es decir, definida en un intervalo lo más grande posible.

Para llevar a cabo esta tarea (y otras), nos va a ser gran utilidad el resultado siguiente:

Teorema 1.1 (Lema de Gronwall)

a) Supongamos dados $-\infty < x_0 < x_1 < +\infty$, dos funciones $u, k \in C([x_0, x_1])$, y una constante $h \in \mathbb{R}$, tales que $k(x) \geq 0$, y

$$u(x) \leq h + \int_{x_0}^{x} k(s)u(s)ds, \ \forall x \in [x_0, x_1]. \tag{1.1}$$

En tal caso, también se satisface

$$u(x) \leq h e^{\int_{x_0}^{x} k(s)ds}, \ \forall x \in [x_0, x_1]. \tag{1.2}$$

b) Supongamos dados $-\infty < x_1 < x_0 < +\infty$, dos funciones $u, k \in C([x_1, x_0])$, y una constante $h \in \mathbb{R}$, tales que $k(x) \geq 0$, y

$$u(x) \leq h + \int_x^{x_0} k(s)u(s)ds, \ \forall x \in [x_1, x_0]. \tag{1.3}$$

En tal caso, también se satisface

$$u(x) \leq h e^{\int_x^{x_0} k(s)ds}, \ \forall x \in [x_1, x_0]. \tag{1.4}$$

Demostración. Vamos a demostrar b) (como la demostración de a) es análoga, queda como ejercicio).

Denotemos
$$v(x) = \int_x^{x_0} k(s)u(s)ds, \ \forall x \in [x_1, x_0].$$

Evidentemente, $v \in C^1([x_1, x_0])$, con

$$v'(x) = -k(x)u(x), \ \forall x \in [x_1, x_0]. \tag{1.5}$$

Multiplicando la desigualdad (1.3) por $k(x) \geq 0$, y teniendo en cuenta (1.5), se obtiene
$$-v'(x) - k(x)v(x) \leq hk(x), \ \forall x \in [x_1, x_0]. \tag{1.6}$$

Si multiplicamos la desigualdad (1.6) por $e^{\int_{x_0}^{x} k(\tau)d\tau}$, es inmediato que obtenemos

$$v(x)e^{\int_{x_0}^{x} k(\tau)d\tau} \leq h \int_x^{x_0} k(s)e^{\int_{x_0}^{s} k(\tau)d\tau} ds, \ \forall x \in [x_1, x_0], \tag{1.7}$$

y por consiguiente,

$$v(x) \leq h \int_x^{x_0} k(s)e^{(\int_{x_0}^{s} k(\tau)d\tau - \int_{x_0}^{s} k(\tau)d\tau)} ds = h \int_x^{x_0} k(s)e^{\int_x^s k(\tau)d\tau} ds, \tag{1.8}$$

para todo $x \in [x_1, x_0]$.

Ahora bien, evidentemente,

$$k(s)e^{\int_x^s k(\tau)d\tau} = \frac{d}{ds}\left(e^{\int_x^s k(\tau)d\tau}\right),$$

y por tanto,

$$\int_x^{x_0} k(s)e^{\int_x^s k(\tau)d\tau} ds = e^{\int_x^{x_0} k(\tau)d\tau} - 1, \ \forall x \in [x_1, x_0].$$

Llevando esta última igualdad a (1.8), y teniendo en cuenta la definición de $v(x)$, obtenemos

$$\int_x^{x_0} k(s)u(s)ds \leq h\left(e^{\int_x^{x_0} k(\tau)d\tau} - 1\right), \ \forall x \in [x_1, x_0],$$

con lo que, de (1.3) se tiene de manera inmediata (1.4). ∎

Observación 1.2 *Obsérvese que en el Lema de Gronwall se obtiene, partiendo de una estimación sobre u en la que aparece dicha función en los dos miembros de la desigualdad, otra estimación sobre u en que ésta no aparece en el miembro derecho.*

Reseñemos por otra parte que si $h = 0$, entonces tanto (1.2) como (1.4) se escriben, respectivamente,

$$u(x) \leq he^{k(x-x_0)}, \ \forall x \in [x_0, x_1],$$
$$u(x) \leq he^{k(x_0-x)}, \ \forall x \in [x_1, x_0].$$

Observación 1.3 *El Lema de Gronwall se puede generalizar sin gran dificultad al caso en que h no es contante. Así por ejemplo, en el caso a), si h, k y u pertenecen a $C([x_0, x_1])$, y se satisface que $k(x) \geq 0$ y*

$$u(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^{x} k(s)u(s)ds, \ \forall x \in [x_0, x_1],$$

entonces, razonando de manera similar al caso en que h es constante, se puede obtener que también se satisface

$$u(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^{x} h(s)k(s)e^{\int_s^x k(\tau)d\tau}ds, \ \forall x \in [x_0, x_1].$$

2. Unicidad global de solución

Como una aplicación sencilla del lema de Gronwall, obtenemos el siguiente resultado de unicidad global para el Problema de Cauchy para un SDO de primer orden en forma normal.

Teorema 2.1 (de unicidad global) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un abierto no vacío, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$, y consideremos fijado un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$.*

En estas condiciones, si (I_1, φ_1) e (I_2, φ_2) son dos soluciones locales del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

entonces

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \ \forall x \in I_1 \cap I_2.$$

Demostración. Recordemos que, por definición de solución de (PC), el punto x_0 pertenece a $I_1 \cap I_2$, y

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0.$$

Sea ahora $x_1 \neq x_0$ otro punto perteneciente a $I_1 \cap I_2$, y supongamos, por fijar ideas, que $x_1 < x_0$. En tal caso, el intervalo $[x_1, x_0]$ está contenido en $I_1 \cap I_2$, y en consecuencia,

$$\varphi_j(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_j(s))ds, \ \forall x \in [x_1, x_0], \ \forall j = 1, 2. \tag{2.9}$$

Denotemos

$$K = \{(s, \varphi_1(s)); s \in [x_1, x_0]\} \cup \{(s, \varphi_2(s)); s \in [x_1, x_0]\}.$$

Evidentemente, K es compacto y está contenido en Ω. Denotemos por $L_K > 0$ a una constante de Lipschitz respecto de y para f en K. De (2.9) se obtiene fácilmente para cada $x \in [x_1, x_0]$,

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)))ds \right|$$
$$\leq \int_{x}^{x_0} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))|ds \leq L_K \int_{x}^{x_0} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|ds,$$

y en consecuencia, aplicando el lema de Gronwall con $h = 0$, $k = L_K$, y $u(x) = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$, obtenemos

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq 0, \ \forall x \in [x_1, x_0],$$

y en particular

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = 0.$$

Idéntica conclusión se obtiene, razonando de manera similar, si $x_1 \neq x_0$ es ahora un punto perteneciente a $I_1 \cap I_2$, tal que $x_1 > x_0$. ∎

Observación 2.2 *El razonamiento de la unicidad global a partir del lema de Gronwall no es necesario, ya que también se puede obtener ésta de un argumento local: si $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$ y hay dos soluciones distintas al mismo (PC), nos fijamos en el punto donde ambas soluciones bifurcan. Esto violaría la unicidad garantizada por el Teorema de Picard, llegando a contradicción.*

No obstante, el uso del lema de Gronwall no implica mayores hipótesis (la lipschitzianidad global en el compacto K de f respecto de y se deduce de la lipschitzianidad local). Sin embargo, dicho lema será muy útil en resultados posteriores, y permite obtener la unicidad de manera muy simple, de ahí que haya sido presentado desde el principio del tema.

3. Prolongación de soluciones. Existencia y unicidad de solución maximal

Supongamos dados $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ abierto no vacío, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega),$$

y consideremos el Problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Para cada punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, denotaremos

$$S(x_0, y_0) = \{(I, \varphi); \varphi \text{ es solución de (PC) en el intervalo } I\}.$$

Teniendo en cuenta el Teorema de Picard, sabemos que, bajo las condiciones precedentes,

$$S(x_0, y_0) \neq \emptyset.$$

Definición 3.1 *Sean $(x_0, y_0) \in \Omega$ e $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$ fijados.*

a) Diremos que (I, φ) es prolongable por la derecha si existe una solución $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$ tal que supI pertenece al interior del intervalo J e $I \subset J$.

b) Diremos que (I, φ) es prolongable por la izquierda si existe una solución $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$ tal que infI pertenece al interior del intervalo J e $I \subset J$.

c) Diremos que (I, φ) es prolongable si es prolongable por la derecha o por la izquierda (o ambas cosas a la vez).

d) Diremos que (I, φ) es una solución maximal del problema (PC) si no es prolongable.

Observación 3.2 *Si $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$ es prolongable por la derecha, y $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$ es tal que supI pertenece al interior del intervalo J e $I \subset J$, es claro que, como consecuencia del teorema de unicidad global, φ y ψ son iguales en I, siendo por tanto ψ una prolongación de φ por el extremo derecho del intervalo I. Cabe hacer una observación similar si (I, φ) es prolongable por la izquierda.*

Demostramos ahora la existencia y unicidad de solución maximal del Problema de Cauchy.

Teorema 3.3 (de existencia y unicidad de solución maximal.) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un abierto no vacío y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$. En estas condiciones, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ dado, existe una y sólo una solución maximal del Problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

que denotaremos $(I(x_0, y_0), \varphi(\cdot; x_0, y_0))$.

Además, el intervalo $I(x_0, y_0)$ de definición de la solución maximal es abierto.

Demostración. La hacemos en tres etapas.

a) El intervalo de definición de toda solución maximal es abierto.

En efecto, si $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$, y si por fijar ideas $\sup I = \beta \in I$, entonces en particular $(\beta, \varphi(\beta)) \in \Omega$, y podemos considerar el Problema de Cauchy

$$(PC)_\beta \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(\beta) = \varphi(\beta), \end{cases}$$

que, por el teorema de Picard, sabemos que posee una solución $\overline{\varphi}$ en un intervalo de la forma $[\beta-\delta, \beta+\delta]$, para algún $\delta > 0$. Obsérvese también que $(I, \varphi) \in S(\beta, \varphi(\beta))$.

Consideramos el intervalo J dado por

$$J = I \cup [\beta - \delta, \beta + \delta],$$

que evidentemente contiene a I, y es tal que β pertenece a su interior.

Tomemos ahora la función $\psi : J \to \mathbb{R}^N$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in I, \\ \overline{\varphi}(x), & \text{si } x \in [\beta - \delta, \beta + \delta]. \end{cases}$$

Es inmediato que la función ψ está bien definida, ya que tanto (I, φ) como $([\beta - \delta, \beta + \delta], \psi)$ pertenecen a $S(\beta, \varphi(\beta))$, y por tanto,

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}(x), \ \forall x \in I \cap [\beta - \delta, \beta + \delta].$$

Además, por esta igualdad, es inmediato comprobar que la pareja (J, ψ) así construida pertenece a $S(x_0, y_0)$, y por consiguiente (I, φ) es prolongable por la derecha.

Razonando de manera similar, se llega a que si $\inf I$ pertenece a I, entonces (I, φ) es prolongable por la izquierda.

En consecuencia, si (I, φ) no es prolongable, es decir, es una solución maximal de (PC), entonces ni $\sup I$ ni $\inf I$ pertenecen a I, y por tanto I es abierto.

b) Unicidad de solución maximal.

Sean (I_1, φ_1) e (I_2, φ_2) pertenecientes a $S(x_0, y_0)$, dos soluciones maximales. En tal caso, I_1 e I_2 son intervalos abiertos, $x_0 \in I_1 \cap I_2$, y por tanto $I_1 \cup I_2$ es un intervalo abierto. Sea $\hat{\varphi} : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^N$, definida por

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ si } x \in I_1, \\ \varphi_2(x) \text{ si } x \in I_2. \end{cases}$$

Por la unicidad global, φ_1 y φ_2 coinciden sobre $I_1 \cap I_2$, y en consecuencia, $\hat{\varphi}$ está bien definida, y es sencillo comprobar que $(I_1 \cup I_2, \hat{\varphi}) \in S(x_0, y_0)$. Entonces, por ser φ_1 maximal, $I_1 \cup I_2 \subset I_1$, es decir, $I_1 \cup I_2 = I_1$. También, por ser φ_2 maximal, $I_1 \cup I_2$, es decir, $I_1 \cup I_2 = I_2$. Así pues, $I_1 = I_2$, y por tanto, por la unicidad global, $(I_1, \varphi_1) = (I_2, \varphi_2)$.

c) Existencia de solución maximal.

Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto fijado. Definamos

$$I(x_0, y_0) = \{x \in \mathbb{R};\ \text{existe } (I, \varphi) \in S(x_0, y_0), \text{ tal que } I \text{ es abierto y } x \in I\}.$$

Se observa en primer lugar que, por el teorema de Picard, $x_0 \in I(x_0, y_0)$, y por tanto también $I(x_0, y_0)$ es un intervalo abierto. Si consideramos la función $\tilde{\varphi} : I(x_0, y_0) \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \text{ si } x \in I, \text{ siendo } (I, \varphi) \in S(x_0, y_0), \text{ tal que } I \text{ es abierto,}$$

es inmediato comprobar que, por el teorema de unicidad global, $\tilde{\varphi}$ está bien definida, y es sencillo ver que $(I(x_0, y_0), \tilde{\varphi}) \in S(x_0, y_0)$, y es maximal por su misma definición.

■

Definición 3.4 *Supongamos satisfechas las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de solución maximal. Para cada* $(x_0, y_0) \in \Omega$*, denotemos por* $(I(x_0, y_0), \varphi(\cdot; x_0, y_0))$ *a la solución maximal del problema (PC). Se definen el conjunto*

$$\Theta = \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{N+2}; (x_0, y_0) \in \Omega, x \in I(x_0, y_0)\},$$

y la función

$$\Theta \ni (x, x_0, y_0) \mapsto \varphi(x; x_0, y_0) \in \mathbb{R}^N.$$

A la función $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}^N$ *así definida se la denomina la solución (maximal) del problema (PC) expresada en función de los datos iniciales.*

Observación 3.5 *Se puede demostrar que bajo las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de solución maximal, el conjunto* Θ *definido antes es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^{N+2}$*, y la función* $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}^N$*, solución (maximal) del problema (PC) expresada en función de los datos iniciales, es continua, es decir,* $\varphi \in C(\Theta; \mathbb{R}^N)$*.*

Observación 3.6 *Aunque más complejo, en el caso en que* $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$*, el uso del Teorema de Peano en lugar del Teorema de Picard también permite hablar de existencia de solución maximal -sin unicidad-. Esto requiere introducir el concepto de conjuntos parcialmente bien ordenados y elementos maximales usando el Lema de Zorn (véase por ejemplo [M. de Guzmán]). La propiedad reflejada en el Teorema 3.3 de que un intervalo de definición de solución maximal ha de ser abierto se concluye análogamente, usando el Teorema de Peano.*

4. Caracterización de soluciones prolongables y maximales

En esta sección suponemos las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de solución maximal. Así sabemos que dados $(x_0, y_0) \in \Omega$ e $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$, si I no es abierto, entonces (I, φ) es prolongable. Ahora vamos a investigar qué sucede si I es un intervalo abierto.

Definición 4.1 *Sean* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *e* $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$*, tal que* $I = (\alpha, \beta)$ *es abierto.*

a) Se denomina semitrayectoria derecha (o positiva) de (I, φ) *al conjunto*

$$\tau_\varphi^+ = \{(x, \varphi(x)); x \in I, x \geq x_0\}.$$

b) Se denomina semitrayectoria izquierda (o negativa) de (I, φ) *al conjunto*

$$\tau_\varphi^- = \{(x, \varphi(x)); x \in I, x \leq x_0\}.$$

c) Se denomina trayectoria de (I, φ) *al conjunto*

$$\tau_\varphi = \tau_\varphi^+ \cup \tau_\varphi^- = \{(x, \varphi(x)); x \in I\}.$$

Podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *Sean* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *e* $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$ *tal que* $I = (\alpha, \beta)$ *es abierto. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) La solución (I, φ) *es prolongable por la derecha.*

b) La semitrayectoria derecha τ_φ^+ *está acotada, siendo* $d(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$.

Demostración.

1. a) implica b).

   Si (I, φ) es prolongable por la derecha, entonces existe una solución $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$, tal que sup$I$ pertenece al interior del intervalo J e $I \subset J$.

   En tal caso,
$$\tau_\varphi^+ \subset \{(x, \psi(x)); x \in [x_0, \beta]\} \subset \tau_\psi^+ \subset \Omega,$$
   y en consecuencia, $\overline{\tau_\varphi^+}$ es un compacto contenido en Ω, con lo que en particular, τ_φ^+ está acotada y $d(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$.

2. b) implica a).

   Si τ_φ^+ está acotada y $d(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$, entonces $\overline{\tau_\varphi^+}$ es un compacto contenido en Ω, y además $\beta < +\infty$. En consecuencia, para todo par de puntos x_1, $x_2 \in [x_0, \beta)$, se satisface

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \left(\max_{(x,y) \in \overline{\tau_\varphi^+}} |f(x, y)| \right) |x_1 - x_2|,$$

   y por tanto (razónese), existe $\lim_{x \uparrow \beta} \varphi(x)$. Denotemos

$$y_\beta = \lim_{x \uparrow \beta} \varphi(x).$$

   Evidentemente,
$$(\beta, y_\beta) \in \overline{\tau_\varphi^+} \subset \Omega,$$

y por ello podemos plantear el Problema de Cauchy

$$(PC)_\beta \left\{ \begin{array}{l} y' = f(x,y), \\ y(\beta) = y_\beta. \end{array} \right.$$

Por el teorema de Picard existe una solución $(I_\delta, \overline{\varphi})$ de $(\mathrm{PC})_\beta$, con $I_\delta = [\beta-\delta, \beta+\delta]$, siendo $\delta > 0$, y que podemos suponer, tomándolo suficientemente pequeño, tal que $[\beta-\delta,\beta) \subset (\alpha,\beta)$.

Definamos

$$J = (\alpha, \beta+\delta),\ \psi(x) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x),\ \text{si } x \in (\alpha,\beta), \\ \overline{\varphi}(x),\ \text{si } x \in [\beta,\beta+\delta). \end{array} \right.$$

Vamos a comprobar que $(J,\psi) \in S(x_0,y_0)$, con lo que quedará demostrado que (I,φ) es prolongable por la derecha.

Desde luego, por construcción $\psi(x_0) = \varphi(x_0) = y_0$, y $(x,\psi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in J$. También por su definición es evidente que ψ es continua en $J \setminus \{\beta\}$. Pero en $x = \beta$ también es la función ψ continua, ya que

$$\psi(\beta) = \overline{\varphi}(\beta) = \lim_{x\downarrow\beta} \overline{\varphi}(x) = \lim_{x\downarrow\beta} \psi(x),$$

y

$$\psi(\beta) = y_\beta = \lim_{x\uparrow\beta} \varphi(x) = \lim_{x\uparrow\beta} \psi(x).$$

En consecuencia, $\psi \in C(J;\mathbb{R}^N)$, y por tanto, para terminar de demostrar que $(J,\psi) \in S(x_0,y_0)$, basta que comprobemos que se satisface

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\psi(s))ds,\ \forall x \in J. \tag{4.10}$$

Es inmediato que (4.10) se satisface para todo $x \in (\alpha,\beta)$. Por otra parte, si $x \in [\beta,\beta+\delta)$,

$$\begin{aligned} \psi(x) = \overline{\varphi}(x) = y_\beta + \textstyle\int_\beta^x f(s,\overline{\varphi}(s))ds = \lim_{t\uparrow\beta} \varphi(t) + \int_\beta^x f(s,\overline{\varphi}(s))ds \\ = y_0 + \textstyle\lim_{t\uparrow\beta} \int_{x_0}^t f(s,\varphi(s))ds + \int_\beta^x f(s,\overline{\varphi}(s))ds \\ = y_0 + \textstyle\lim_{t\uparrow\beta} \int_{x_0}^t f(s,\psi(s))ds + \int_\beta^x f(s,\psi(s))ds = y_0 + \int_{x_0}^x f(s,\psi(s))ds. \end{aligned}$$

■

Observación 4.3 *Una forma equivalente a b) es que exista* $\lim_{x\uparrow\beta^-} \varphi(x) =: y_\beta$ *y que* $(\beta, y_\beta) \in \Omega$.

Con una demostración similar a la del teorema precedente (se deja como ejercicio), se obtiene:

Teorema 4.4 *Sean* $(x_0,y_0) \in \Omega$ *e* $(I,\varphi) \in S(x_0,y_0)$ *tal que* $I = (\alpha,\beta)$ *es abierto. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) *La solución* (I, φ) *es prolongable por la izquierda.*

b) *La semitrayectoria izquierda* τ_φ^- *está acotada y* $d(\tau_\varphi^-, \partial\Omega) > 0$.

Ahora resulta evidente de los dos teoremas precedentes que se satisface el siguiente:

Teorema 4.5 *Sean* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *e* $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$. *Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) *La solución* (I, φ) *es maximal.*

b) *O la semitrayectoria derecha* τ_φ^+ *no está acotada o* $d(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) = 0$ *(o ambas cosas a la vez), y o la semitrayectoria izquierda* τ_φ^- *no está acotada o* $d(\tau_\varphi^-, \partial\Omega) = 0$ *(o ambas cosas a la vez).*

Observación 4.6 *Las nociones y resultados estudiados en esta sección y en las secciones precedentes, pueden ser extendidos fácilmente al caso del Problema de Cauchy para una EDO de orden* n *en forma normal. Para ello basta considerar el correspondiente Problema de Cauchy para el SDO asociado. Se dejan al estudiante el análisis de los detalles (estúdiese, por simplificar, el caso de una EDO de segundo orden).*

Más aún, los resultados de prolongación probados en esta sección sólo usan que la función f *está acotada sobre un compacto, y para ello (T. de Weierstrass) basta que* $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. *Esto es, la caracterización de solución prolongable puede usar el T. de Peano en lugar del T. de Picard, prescindiendo de la hipótesis del carácter localmente lipschitziano para* f *respecto de* y *en* Ω.

5. Caso particular: dominio banda. El fenómeno de explosión en tiempo finito

Analizamos en esta sección algunos casos particulares muy importantes de aplicación de los resultados de la sección anterior. Para ello definamos lo que se denomina un dominio banda:

$$\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^N, \text{ con } -\infty \le a < b \le +\infty.$$

Observación 5.1 *Si* Ω *es un dominio banda,* $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *y* $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^N$ *es una solución maximal con* $\beta < b$, *entonces (por el Teorema 4.5 y la Observación 4.6)*

$$\limsup_{x \uparrow \beta^-} |\varphi(x)| = +\infty.$$

(Igual conclusión cabe esperar si $a < \alpha$, *i.e.* $\limsup_{x \downarrow \alpha^+} |\varphi(x)| = +\infty$.*)*

Si $\beta < +\infty$, *se dice que la solución maximal explota en tiempo finito.*

Así por ejemplo, de acuerdo con lo que vimos en el Tema 1, es sencillo comprobar que el problema

$$(PC)\begin{cases} y' = 1 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

planteado en el dominio banda $\Omega = \mathbb{R}^2$, tiene por solución maximal la función $\varphi(x;0,0) = \operatorname{tg} x$ con intervalo de definición $I(0,0) = (-\pi/2, \pi/2)$, y está claro que la solución se va, en valor absoluto, a infinito en los extremos de $I(0,0)$.

Observación 5.2 *En el caso de un SDO, la explosión a que hace referencia la observación anterior puede producirse en alguna de las componentes; y si se trata de una EDO de orden superior a uno, si hay explosión, puede deberse no sólo a la solución en si misma sino a la de alguna de sus derivadas.*

Los casos que citamos a continuación, bajo hipótesis adicionales, evitan la explosión en cualquier intervalo estrictamente menor que (a,b). Como conclusión, se tendrá que $(\alpha,\beta) = (a,b)$. Veremos que el carácter "globalmente lipschitziano" de f respecto de la variable y juega un papel fundamental.

Teorema 5.3 *Sean $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\Omega = (a,b) \times \mathbb{R}^N$, $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Lip(y,\Omega)$, $(x_0,y_0) \in \Omega$ y se considera el Problema de Cauchy*

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Entonces, la solución maximal $\varphi(\cdot;x_0,y_0)$ verifica

$$I(x_0,y_0) = I, \tag{5.11}$$

es decir, el intervalo de definición de la solución maximal es todo el intervalo I, cualquiera que sea el dato inicial (x_0,y_0) en la banda.

Demostración. Fijado $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, denotemos el intervalo de existencia de la solución maximal $I(x_0,y_0) = (\alpha,\beta)$. Evidentemente, $(\alpha,\beta) \subset I = (a,b)$, y supongamos, por fijar ideas, que se tiene $\beta < b$. En tal caso, en particular $\beta < +\infty$, y si denotamos $\varphi(x) = \varphi(x;x_0,y_0)$, para todo $x \in [x_0,\beta)$ se satisface

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} (f(s,\varphi(s)) - f(s,y_0))ds \right| + \left| \int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds \right| \\ &\leq M_0(x - x_0) + L\int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - y_0|ds \\ &\leq M_0(\beta - x_0) + L\int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - y_0|ds, \end{aligned}$$

donde $L > 0$ es una constante de Lipschitz respecto de y en Ω para f, y por definición,

$$M_0 = \max_{s\in[x_0,\beta]} |f(s,y_0)|.$$

Entonces, aplicando el lema de Gronwall, obtenemos de la desigualdad anterior

$$|\varphi(x) - y_0| \leq M_0(\beta - x_0)e^{L(\beta - x_0)},\ \forall x \in [x_0, \beta),$$

y en consecuencia, τ_φ^+ está acotada, y de hecho,

$$\tau_\varphi^+ \subset [x_0, \beta] \times \overline{B}(y_0, M_0(\beta - x_0)e^{L(\beta - x_0)}),$$

siendo este último conjunto un compacto contenido en $\Omega = I \times \mathbb{R}^N$. En consecuencia, $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ resulta ser prolongable por la derecha, en contradicción con el hecho de ser maximal. Así pues $\beta = b$.

Razonando de manera similar se llega a la conclusión de que también se ha de tener $\alpha = a$, y en consecuencia se satisface (5.11). ■

Corolario 5.4 *Bajo las condiciones del teorema anterior, si* (a, b) *es acotado y* $\sup_{s\in(a,b)} |f(s, y_0)| < +\infty$, *entonces*

$$\sup_{x\in(a,b)} |\varphi(x; x_0, y_0)| < +\infty.$$

Las consideraciones precedentes se pueden generalizar a un caso bastante común, donde la lipschitzianidad global de f respecto de y no se exige en toda la banda, pero sí en bandas estrictamente contenidas.

Teorema 5.5 *Sea* $\Omega = I \times \mathbb{R}^N$, *con* $I = (a, b)$ *un intervalo, siendo* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, *y supongamos que* $f \in C(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, I \times \mathbb{R}^N)$ *verifica*

$$f \in C(J \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \cap Lip(y, J \times \mathbb{R}^N),$$

para todo intervalo J *tal que* $\overline{J} \subset I$. *Entonces se sigue satisfaciendo (5.11).*

Demostración. En efecto, sea (x_0, y_0) un punto fijado en $\Omega = I \times \mathbb{R}^N$, y sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales, y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de números reales, tales que

$$a < a_n < x_0 < b_n < b,\ \forall n \geq 1,$$

y se satisfaga

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Para cada $n \geq 1$, denotemos $\Omega_n = (a_n, b_n) \times \mathbb{R}^N$, y

$$f_n(x, y) = f(x, y),\ \forall (x, y) \in \Omega_n.$$

De acuerdo con la hipótesis precedente, $f \in C(\Omega_n; \mathbb{R}^N) \cap Lip(y, \Omega_n)$, y $(x_0, y_0) \in \Omega_n$, para todo $n \geq 1$. En consecuencia, tiene sentido considerar el Problema de Cauchy

$$(PC)_n \begin{cases} y' = f_n(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

que, de acuerdo con las consideraciones hechas en el caso globalmente lipschitziano, tiene solución maximal $\varphi_n(\cdot; x_0, y_0)$ definida en el intervalo $I_n(x_0, y_0) = (a_n, b_n)$. Además, por la unicidad global, es evidente que para cada entero $m \geq n$ se satisface

$$\varphi_m(x; x_0, y_0) = \varphi_n(x; x_0, y_0), \ \forall x \in (a_n, b_n).$$

Resulta ahora claro que la solución maximal $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ está definida en

$$I(x_0, y_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = (a, b).$$

■

Con una demostración muy similar a las anteriores, se puede sustituir la condición de Lipschitz de f respecto de y por una hipótesis sobre el crecimiento de $|f|$, global respecto de $y \in \mathbb{R}^N$ y local respecto de $x \in (a, b)$.

Teorema 5.6 *Sean* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in C((a,b) \times \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, (a,b) \times \mathbb{R}^N)$ *y* g_1, $g_2 \in C((a,b); [0, +\infty))$ *tales que*

$$|f(x,y)| \leq g_1(x) + g_2(x)|y|, \ \forall (x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R}^N. \tag{5.12}$$

Entonces se sigue satisfaciendo (5.11).

Demostración. Fijado $(x_0, y_0) \in (a,b) \times \mathbb{R}^N$, denotemos $I(x_0, y_0) = (\alpha, \beta)$. Supongamos por reducción al absurdo que por ejemplo $\beta < b$. Basta demostrar que τ_φ^+ está acotada para entrar en contradicción, gracias al Teorema de caracterización de solución prolongable por la derecha.

Denotemos por brevedad $\varphi(\cdot) = \varphi(\cdot; x_0, y_0)$. Gracias a la formulación integral de la solución del (PC) y a (5.12) se tiene

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &\leq |y_0| + \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s)) ds \right| \\
&\leq |y_0| + K_1(\beta - x_0) + K_2 \int_{x_0}^{x} |\varphi(s)| ds,
\end{aligned}$$

donde $K_i = \max_{x \in [x_0, \beta]} g_i(x)$. Aplicando el Lema de Gronwall,

$$|\varphi(x)| \leq (|y_0| + K_1(\beta - x_0)) e^{K_2(\beta - x_0)}, \ \forall x \in [x_0, \beta).$$

■

Tanto el Teorema 5.6 como el Teorema 5.5 pueden aplicarse a un caso particular muy común, el de los sistemas diferenciales ordinarios lineales, que introducimos a continuación.

Denotemos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ al espacio vectorial de todas las matrices cuadradas $N \times N$ de coeficientes reales. Sobre dicho espacio, consideremos la norma definida por

$$|A| = \sup_{y \in \mathbb{R}^N, y \neq 0} \frac{|Ay|}{|y|}, \ \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{5.13}$$

Observación 5.7 *Es bien conocido que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ dotado de la norma precedente es un espacio de Banach, y que de hecho, al ser $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ un espacio vectorial de dimensión finita igual a N^2, todas las normas definidas en dicho espacio son equivalentes a la norma definida por (5.13).*

Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denotaremos por $C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones

$$I \ni x \mapsto A(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N),$$

que sean continuas. De acuerdo con la observación anterior, es sencillo comprobar que la continuidad de A es equivalente al carácter continuo de cada una de sus componentes.

Definición 5.8 *Se denomina SDO lineal de primer orden y dimensión N a cualquier SDO de la forma*

$$y' = A(x)y + b(x), \tag{5.14}$$

donde $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$ están dados.

A la función matricial A se le denomina la matriz de coeficientes del SDO (5.14), y a b el término independiente de dicho SDO.

Supongamos ahora que I es un intervalo abierto, y denotemos

$$\Omega = I \times \mathbb{R}^N,$$

$$f(x, y) = A(x)y + b(x), \ \forall (x, y) \in \Omega.$$

Se observa entonces que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N),$$

y para todo (x, y), $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| &\leq |A(x)y - A(\tilde{x})\tilde{y}| + |b(x) - b(\tilde{x})| \\ &\leq |A(x)||y - \tilde{y}| + |A(x) - A(\tilde{x})||\tilde{y}| + |b(x) - b(\tilde{x})|, \end{aligned}$$

con lo que resulta inmediato que

$$f \in Lip(y, J \times \mathbb{R}^N)$$

para todo intervalo J tal que $\overline{J} \subset I$. En consecuencia, de acuerdo con el Teorema 5.5 (o más directamente con el Teorema 5.6), dado cualquier dato inicial $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, el intervalo de definición de la solución maximal del Problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

es

$$I(x_0, y_0) = I.$$

6. Comparación de soluciones

Una herramienta también de interés para conocer si una solución maximal está definida en, por ejemplo, todo $\mathbb{R}$, es comparar dicha solución con otras soluciones (cuyo intervalo de definición se conozca) de otros problemas diferenciales y establecer así cotas adecuadas. Dicha argumentación constituye los resultados de comparación.

Damos en esta sección dos resultados principales: uno de un problema diferencial comparado consigo mismo pero con distintos datos iniciales. En particular de este resultado, bajo condiciones más restrictivas deducimos la continuidad de la solución respecto de los datos iniciales (en la línea de la Observación 3.5). El segundo resultado principal es de comparación de dos problemas diferenciales diferentes pero con mismo dato y en dimensión uno.

Teorema 6.1 *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *abierto no vacío,* $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y,\Omega)$ *y* (x_0,y_0), $(x_0,z_0) \in \Omega$. *Si* $(I,\varphi) \in S(x_0,y_0)$ *y* $(J,\psi) \in S(x_0,z_0)$, *entonces para cada* $x_f \in I \cap J$, *existe* $L > 0$, *dependiente de* x_0, x_f, y_0 *y* z_0, *tal que*

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |y_0 - z_0| e^{L(x-x_0)}, \ \forall x \in [x_0, x_f]. \tag{6.15}$$

Demostración. Supongamos que $x_f \in I \cap J$ verifica $x_f > x_0$ (el caso $x_f < x_0$ se analiza análogamente). Restando la formulación integral de los respectivos problemas de Cauchy, podemos acotar para cada $x \in [x_0, x_f]$:

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &\leq |y_0 - z_0| + \int_{x_0}^{x} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))| ds \\ &\leq |y_0 - z_0| + L(x_0, x_f) \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - \psi(s)| ds, \end{aligned}$$

donde $L > 0$ es una constante de Lipschitz de f respecto de y en el compacto

$$K = \{(x,\varphi(x)); x \in [x_0,x_f]\} \cup \{(x,\psi(x)); x \in [x_0,x_f]\} \subset \Omega,$$

de donde se tiene el resultado usando el Lema de Gronwall. ∎

Si al contrario que en la prueba anterior, L no depende del compacto K, inmediatamente deducimos la continuidad de las soluciones respecto de los datos iniciales.

Corolario 6.2 *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *abierto no vacío,* $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Lip(y,\Omega)$, *con* $L > 0$ *una constante de Lipschitz de* f *respecto de* y *en* Ω, *y* (x_0,y_0), $(x_0,z_0) \in \Omega$. *Dados* $(I,\varphi) \in S(x_0,y_0)$ *y* $(J,\psi) \in S(x_0,z_0)$, *entonces se verifica (6.15) para todo* $x_f \in I \cap J$.

El siguiente resultado de comparación, también consecuencia del Lema de Gronwall, sólo es válido para ecuaciones escalares, i.e. $N = 1$.

Teorema 6.3 *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, f, $g \in C(\Omega) \cap Lip_{loc}(y,\Omega)$, $(x_0,y_0) \in \Omega$, *e* (I,φ) *y* (J,ψ) *soluciones respectivas de los problemas de Cauchy*

$$(PC)_f \begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (PC)_g \begin{cases} y' = g(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Si $f \leq g$ *en* Ω, *entonces para todo* $x \in I \cap J$,

$$\varphi(x) \leq \psi(x), \ \forall x \geq x_0; \ \varphi(x) \geq \psi(x), \ \forall x \leq x_0.$$

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos por ejemplo que existen x_1, $x_2 \in I \cap J$ con $x_0 \leq x_1 < x_2$ tales que

$$\varphi(x_1) = \psi(x_1), \ \varphi(x) > \psi(x), \ \forall x \in (x_1, x_2].$$

Restando las formulaciones integrales de φ y ψ como soluciones de los problemas de Cauchy entre x_1 y $x \in [x_1, x_2]$, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \psi(x) &= \int_{x_1}^{x} (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s)))ds \\ &\leq \int_{x_1}^{x} (g(s, \varphi(s)) - g(s, \psi(s)))ds \leq L(x_1, x_2) \int_{x_1}^{x} (\varphi(s) - \psi(s))ds,\end{aligned}$$

donde $L(x_1, x_2) > 0$ denota una constante de Lipschitz de g respecto de y en el compacto

$$K(x_1, x_2) = \{(s, \varphi(s)); s \in [x_1, x_2]\} \cup \{(s, \psi(s)); s \in [x_1, x_2]\} \subset \Omega.$$

Del Lema de Gronwall concluimos que

$$\varphi(x) - \psi(x) \leq 0, \ \forall x \in [x_1, x_2],$$

lo que es contradictorio. El caso en que x_1 y x_2 están a izquierda de x_0 es análogo. ∎

Referencias

[1] H. Amann: *Ordinary Differential Equations: an introduction to Nonlinear Analysis,* Walter de Gruyter, New York, 1990.

[2] C. Corduneanu: *Principles of Differential and Integral Equations,* Chelsea P. Co., The Bronx, New York, 1971.

[3] M. de Guzmán: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control,* Alhambra, Madrid, 1975.

[4] N. Rouché & J. Mawhin: *Equations Différentielles Ordinaires,* Tomo 1, Masson, Paris, 1973.

Tema 4

Sistemas Diferenciales Ordinarios Lineales

1 Consideraciones generales

Denotemos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ al espacio vectorial de todas las matrices cuadradas $N \times N$ de coeficientes reales. Sobre dicho espacio, consideremos la norma definida por

$$|A| = \sup_{y \in \mathbb{R}^N,\, y \neq 0} \frac{|Ay|}{|y|}, \quad \forall\, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{1.1}$$

Para la norma matricial así definida se satisfacen

$$|Ay| \leq |A||y|, \quad |AB| \leq |A||B|, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^N.$$

Observación 1.1 *Es bien conocido que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ dotado de la norma precedente es un espacio de Banach, y que de hecho, al ser $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ un espacio vectorial de dimensión finita igual a $N \times N$, todas las normas definidas en dicho espacio son equivalentes a la norma definida por* (1.1)*, y en particular, es equivalente a esta última la norma*

$$\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq N} |a_{ij}|, \tag{1.2}$$

donde a_{ij} son la componentes de la matriz A.

Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, no necesariamente abierto, de interior no vacío, denotaremos por $C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones

$$A : x \in I \mapsto A(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N),$$

que sean continuas. De acuerdo con la observación anterior, la continuidad de A es equivalente al carácter continuo de cada una de sus componentes.

Definición 1.2 *Se denomina SDO lineal de primer orden y dimensión N, a cualquier SDO de la forma*

$$y' = A(x)y + b(x), \tag{1.3}$$

donde $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$ están dados.

A la función matricial A se le denomina la matriz de coeficientes del SDO (1.3)*, y a b el término independiente de dicho SDO. Si $b \equiv 0$, se dice que el SDO lineal* (1.3) *es homogéneo, y en caso contrario, al SDO*

$$y' = A(x)y, \tag{1.4}$$

se le denomina el SDO lineal homogéneo asociado a (1.3)*.*

En primer lugar, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.3 *Sean $I \subset \mathbb{R}$, un intervalo no necesariamente abierto, de interior no vacío, $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$. En estas condiciones, para cada punto $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ existe una y sólo una función $\varphi(\cdot; x_0, y_0) \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ que sea solución en I del Problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Demostración.- Supongamos primero que $I = (\alpha, \beta)$ es un intervalo abierto, y denotemos

$$\Omega = I \times \mathbb{R}^N,$$

$$f(x, y) = A(x)y + b(x), \quad \forall\, (x, y) \in \Omega.$$

Se observa entonces que para todo $(x, y), (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(\widetilde{x}, \widetilde{y})| &\le |A(x)y - A(\widetilde{x})\widetilde{y}| + |b(x) - b(\widetilde{x})| \\ &\le |A(x)||y - \widetilde{y}| + |A(x) - A(\widetilde{x})||\widetilde{y}| + |b(x) - b(\widetilde{x})|, \end{aligned}$$

con lo que resulta inmediato que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip(y, J \times \mathbb{R}^N),$$

para todo intervalo J tal que $\overline{J} \subset I$. En consecuencia, de acuerdo con lo ya demostrado en el Tema 4, dado cualquier dato inicial $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, el intervalo de definición de la solución maximal del Problema de Cauchy (PC) es $I(x_0, y_0) = I$, y por tanto, en este caso está probado el teorema.

Supongamos ahora que I no es un intervalo abierto. Por fijar ideas, vamos a suponer que $I = [\alpha, \beta]$ es un intervalo cerrado (los casos $I = [\alpha, \beta)$ o $I = (\alpha, \beta]$ se tratan de manera similar). En estas condiciones, si definimos $\widetilde{A}:\mathbb{R}\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, y $\widetilde{b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$, por

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases} A(\alpha), & \text{si } x<\alpha,\\ A(x), & \text{si } x\in[\alpha,\beta],\\ A(\beta), & \text{si } x>\beta,\end{cases}\qquad \widetilde{b}(x)=\begin{cases} b(\alpha), & \text{si } x<\alpha,\\ b(x), & \text{si } x\in[\alpha,\beta],\\ b(\beta), & \text{si } x>\beta,\end{cases}$$

es evidente que $\widetilde{A}\in C(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $\widetilde{b}\in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$, con lo que, por ser $\mathbb{R}$ un intervalo abierto, tenemos garantizada la existencia de solución $\widetilde{\varphi}(\cdot;x_0,y_0)$ del Problema de Cauchy

$$(\widetilde{PC})\begin{cases} y'=\widetilde{A}(x)y+\widetilde{b}(x),\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

definida en todo $\mathbb{R}$. En consecuencia, es inmediato que la restricción de $\widetilde{\varphi}(\cdot;x_0,y_0)$ al intervalo $[\alpha,\beta]$ es solución de (PC) en dicho intervalo.

Para la unicidad, se puede razonar como sigue. Si $x_0\in(\alpha,\beta)$, y φ_1 y φ_2 son dos soluciones del problema (PC) en el intervalo $[\alpha,\beta]$, en particular lo son en (α,β), con lo que, por la unicidad de solución en el caso de un intervalo abierto, obtenemos que $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ para todo $x\in(\alpha,\beta)$, y en consecuencia, por ser ambas funciones continuas en $[\alpha,\beta]$, se tiene que $\varphi_1\equiv\varphi_2$ en dicho intervalo.

Finalmente, si $x_0=\alpha$ o si $x_0=\beta$, y φ_1 y φ_2 son dos soluciones del problema (PC) en el intervalo $[\alpha,\beta]$, para demostrar que ambas coinciden en dicho intervalo, basta razonar utilizando el lema de Gronwall como en la demostración del teorema de unicidad global. ■

2 EL SDO lineal homogéneo. Matriz fundamental

En esta sección vamos a estudiar la resolución del SDO lineal homogéneo

$$y'=A(x)y, \tag{2.5}$$

siendo I un intervalo de interior no vacío, y $A\in C(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$.

Denotaremos por $C^1(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones

$$Y: x\in I\mapsto Y(x)=(y_{ij}(x))\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N),$$

tales que $y_{ij}\in C^1(I)$, para todo $1\le i,j\le N$. No es difícil demostrar, utilizando la norma $\|\cdot\|_\infty$, que $Y\in C^1(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ si y sólo si existe una función matricial $Y'\in C(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, tal que para todo $x_0\in I$ se satisfaga

$$\lim_{x\to x_0,\ x\in I}\left|\frac{Y(x)-Y(x_0)}{x-x_0}-Y'(x_0)\right|=0,$$

y en tal caso Y' es única y viene definida por $Y'(x) = (y'_{ij}(x))$ para todo $x \in I$.

Definición 2.1 *Se denomina SDO lineal matricial asociado al SDO* (2.5), *al sistema*

$$Y' = A(x)Y. \tag{2.6}$$

Una solución de (2.6) *es, por definición, cualquier* $Y \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *tal que*

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \quad \forall\, x \in I.$$

Obsérvese que $Y \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ es solución de (2.6) si y sólo si cada uno de los N vectores columna de Y es solución en I del SDO (2.5).

Definición 2.2 *Se denomina matriz fundamental de* (2.5), *a cualquier función matricial* $F \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *que sea solución de* (2.6), *y tal que los* N *vectores columna de* F *sean elementos linealmente independientes de* $C^1(I; \mathbb{R}^N)$.

A partir de ahora, usaremos la notación m.f. como abreviatura de matriz fundamental, y denotaremos por V_0 al conjunto de todas las soluciones en I del SDO (2.5). La existencia de m.f. para (2.5) viene garantizada por el siguiente resultado.

Proposición 2.3 *El conjunto* V_0 *es un subespacio vectorial de* $C^1(I; \mathbb{R}^N)$, *de dimensión* N

Demostración.- Es inmediato comprobar que V_0 es un subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$. Para demostrar que su dimensión es N, consideremos fijados una base $\{e_i;\ 1 \le i \le N\}$ de $\mathbb{R}^N$, y un punto $x_0 \in I$, y para cada $1 \le i \le N$ denotemos por $\varphi^i \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$, a la solución en I del Problema de Cauchy

$$(PC)_i \begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = e_i, \end{cases}$$

cuya existencia y unicidad está garantizada por el Teorema 1.3.

Como vamos ahora a ver, $\{\varphi^i;\ 1 \le i \le N\}$ constituye una base de V_0.

En primer lugar, si una combinación lineal $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i$ es la función cero, entonces, en particular,

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i(x_0) = 0,$$

con lo que, al ser $\{e_i;\ 1 \le i \le N\}$ una base de $\mathbb{R}^N$, obtenemos que todos los λ_i son nulos. Con esto, queda probado que la familia $\{\varphi^i;\ 1 \le i \le N\}$ está formada por funciones linealmente independientes.

Por otra parte, dada $\varphi \in V_0$, como $\varphi(x_0) \in \mathbb{R}^N$, existen N números reales μ_i, $1 \leq i \leq N$, tales que

$$\varphi(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i e_i.$$

Entonces, es inmediato comprobar que la función ψ definida por

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \varphi^i(x),$$

es solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = 0, \end{cases}$$

con lo que, por la unicidad de solución a dicho problema, obtenemos que ψ es la función idénticamente nula, es decir,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \varphi^i.$$

En consecuencia, V_0 coincide con el subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ generado por la familia $\{\varphi^i;\ 1 \leq i \leq N\}$, y es por tanto de dimensión N. ■

Obsérvese que para obtener una m.f. del SDO (2.5), basta tomar una matriz cuyas N columnas sean los elementos de una base cualquiera de V_0. A este respecto, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.4 *Sea $F \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ una solución del sistema matricial* (2.6). *Son equivalentes las tres afirmaciones siguientes:*

a) *F es una m.f. del SDO* (2.5).

b) $\det F(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in I$.

c) *Existe un $x_0 \in I$ tal que* $\det F(x_0) \neq 0$.

Demostración.- Denotemos por φ^i, $1 \leq i \leq N$, a las N columnas de F.

En primer lugar, supongamos que b) no es cierto. En tal caso existe un $x_0 \in I$ tal que $\det F(x_0) = 0$, con lo que los N vectores $\varphi^i(x_0)$, $1 \leq i \leq N$, son linealmente independientes, es decir, existen N números reales, no todos nulos, λ_i, $1 \leq i \leq N$, tales que

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i(x_0) = 0,$$

y en consecuencia, la función $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i$, será solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = 0, \end{cases}$$

con lo que, por la unicidad de solución a dicho problema, φ será idénticamente nula, por tanto las φ^i, $1 \leq i \leq N$, no son linealmente independientes, y en consecuencia no se satisface a). De esta forma, hemos probado que a) implica b).

Que b) implica c), es evidente. Finalmente, para demostrar que c) implica a), supongamos satisfecha c), y sean λ_i, $1 \leq i \leq N$, números reales tales que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i$ sea la función idénticamente nula en I. En tal caso, en particular,

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i(x_0) = 0,$$

con lo que, por c), todos los λ_i son nulos, y por tanto las φ^i, $1 \leq i \leq N$, son linealmente independientes. ■

Observación 2.5 *La equivalencia de las propiedades a), b) y c), se tiene garantizada sólo cuando las N columnas de la función matricial son soluciones de un mismo SDO lineal.*

Es decir, dada una función matricial $Y \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, que su determinante se anule en un punto de I, no implica que se anule en todos los puntos de I, ni esto último implica que sus N columnas sean linealmente dependientes. Así, por ejemplo, la función matricial

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

posee determinante nulo para todo $x \in \mathbb{R}$, pero sus dos columnas son linealmente independientes en cualquier subintervalo.

Asimismo, la función matricial

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

posee determinante que sólo es nulo en $x = 0$, siendo también sus dos columnas linealmente independientes en cualquier subintervalo de $\mathbb{R}$.

Observación 2.6 *Sea* $Y \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *una solución de* (2.6)*. No es difícil demostrar (ver [5]) que se satisface la siguiente igualdad, conocida como Fórmula de Jacobi-Liouville,*

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(s)\, ds}, \quad \forall\, x_0, x \in I,$$

donde por $\operatorname{tr} A(s)$ *denotamos a la traza de la matriz* $A(s)$*.*

Naturalmente, el conocimiento de una m.f. del SDO (2.5), permite resolver de manera completa dicho sistema. En concreto se tiene:

Proposición 2.7 *Sea* $F \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *una m.f. del SDO* (2.5)*. Entonces, se satisfacen las tres propiedades siguientes:*

a) $V_0 = \{F(x)c;\ c \in \mathbb{R}^N\}$.

b) *Si* $\widehat{F} \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *es una solución del sistema matricial* (2.6)*, entonces existe una matriz de coeficientes constantes* $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$*, tal que*

$$\widehat{F}(x) = F(x)C, \quad \forall\, x \in I.$$

Además, $\widehat{F}$ *es en tal caso también una m.f. del SDO* (2.5)*, si y sólo si* $\det C \neq 0$.

c) *Para todo* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$*, la solución del Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

viene dada por

$$\varphi(x; x_0, y_0) = F(x)F^{-1}(x_0)y_0, \quad \forall\, x \in I. \tag{2.7}$$

Demostración.- La propiedad a) no es más que la expresión de que las columnas de F constituyen una base de V_0.

La propiedad b) es una consecuencia inmediata de a), y de la Proposición 2.4, teniendo en cuenta que si $\widehat{F}(x) = F(x)C$, entonces

$$\det \widehat{F}(x) = \det F(x) \det C.$$

Finalmente, para demostrar c), se tiene en cuenta que, por a), existe un vector $c \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\varphi(x; x_0, y_0) = F(x)c, \quad \forall\, x \in I,$$

con lo que, teniendo en cuenta que $\varphi(x_0; x_0, y_0) = y_0$, se obtiene

$$F(x_0)c = y_0,$$

es decir,

$$c = F^{-1}(x_0)y_0.$$

■

3 EL SDO lineal no homogéneo. Método de Lagrange de variación de las constantes

Consideremos ahora el SDO lineal no homogéneo (1.3). Denotemos,

$$V_b = \{\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N);\ \varphi \text{ es solución de (1.3) en } I\}.$$

Nuestro objetivo, es hallar V_b. Para ello, vamos a realizar unas consideraciones similares a las que hicimos en el Tema 1 para el caso de una EDO lineal de primer orden, y en particular vamos a comprobar cómo el conocimiento de una matriz fundamental del SDO lineal homogéneo asociado a (1.3), permite resolver esta último sistema.

En primer lugar, es inmediato comprobar que se satisfacen la dos propiedades siguientes:

a) Si $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ pertenecen a V_b, es decir, son soluciones de (1.3) en I, entonces $\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}$ pertenece a V_0, es decir, es solución de (1.4) en I.

b) Si $\widehat{\varphi}$ pertenece a V_b, es decir, es solución de (1.3) en I, y φ pertenece a V_0, es decir, es solución de (1.4) en I, entonces $\widehat{\varphi} + \varphi$ pertenece a V_b, es decir, es solución de (1.3) en I.

Como consecuencia de a) y b), es inmediato obtener que si $\widehat{\varphi}_p$ es una solución particular de (1.3) en I, entonces

$$V_b = \{\widehat{\varphi}_p + \varphi;\ \varphi \in V_0\}, \tag{3.8}$$

es decir, V_b coincide con la variedad afín $\widehat{\varphi}_p + V_0$.

La igualdad (3.8) se expresa también diciendo que la solución general de (1.3) es igual a la suma de una solución particular de dicha ecuación, más la solución general de (1.4).

El problema es por tanto cómo calcular una solución particular de (1.3). Vamos a ver que, de hecho, en la búsqueda de dicha solución particular encontraremos nuevamente la igualdad (3.8), es decir, hallaremos la solución general de (1.3).

Para el cálculo de una solución particular de (1.3), haremos uso del denominado método de Lagrange de variación de las constantes. La idea del citado método consiste en, supuesto que se ha hallado una m.f. $F(x)$ del SDO lineal homogéneo asociado (1.4), con lo cual

$$\varphi_h(x,c) = F(x)c, \quad c \in \mathbb{R}^N,$$

es la solución general del SDO homogéneo, buscar $\widehat{\varphi}(x)$, solución de (1.3), de la forma

$$\widehat{\varphi}(x) = F(x)c(x), \tag{3.9}$$

con $c(x) \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$ función por determinar. Para hallar $c(x)$, se exige que $\widehat{\varphi}(x)$ satisfaga (1.3), lo que conduce a

$$F'(x)c(x) + F(x)c'(x) = A(x)F(x)c(x) + b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

con lo que, teniendo en cuenta que $F'(x) = A(x)F(x)$, se obtiene

$$F(x)c'(x) = b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

lo que conduce a

$$c'(x) = F^{-1}(x)b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

y por tanto, si fijamos un punto $x_0 \in I$, obtenemos

$$c(x) = \widehat{c} + \int_{x_0}^{x} F^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad \forall\, x \in I,$$

con $\widehat{c} \in \mathbb{R}^N$ un vector constante arbitrario. Llevando esta expresión de $c(x)$ a (3.9), obtenemos

$$\widehat{\varphi}(x) = F(x)\widehat{c} + F(x)\int_{x_0}^{x} F^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad \forall\, x \in I, \tag{3.10}$$

como expresión de la solución general de (1.3). De esta fórmula, se obtiene en particular el siguiente resultado:

Teorema 3.1 *Sea F una m.f. del SDO lineal homogéneo* (1.4). *Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, la solución $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ del Problema de Cauchy*

$$(PC)\begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

viene dada por

$$\varphi(x; x_0, y_0) = F(x)F^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x)F^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad \forall\, x \in I. \tag{3.11}$$

Demostración.- Teniendo en cuenta que

$$F(x)\int_{x_0}^{x} F^{-1}(s)b(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} F(x)F^{-1}(s)b(s)\,ds,$$

de (3.10) tenemos que $\varphi(\cdot;x_0,y_0)$ ha de ser de la forma

$$\varphi(x;x_0,y_0) = F(x)c + \int_{x_0}^{x} F(x)F^{-1}(s)b(s)\,ds,$$

con lo que, imponiendo la condición $\varphi(x_0;x_0,y_0) = y_0$, obtenemos $y_0 = F(x_0)c$, es decir,

$$c = F^{-1}(x_0)y_0.$$

■

4 SDO lineal de coeficientes constantes. Exponencial de una matriz

En esta sección suponemos que el sistema (1.3) es coeficientes constantes, es decir, es de la forma

$$y' = Ay + b(x), \tag{4.12}$$

donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ es una matriz constante dada, y $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ está dado.

Nuestro objetivo es construir en este caso una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado

$$y' = Ay\,, \tag{4.13}$$

mediante la consideración de la función exponencial de la matriz A.

Consideremos sobre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ la norma definida por (1.1). Dada una sucesión de matrices $\{A_n;\ n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ es convergente, si existe el límite

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} A_n := \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

en el espacio normado $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Es inmediato comprobar que si la serie de matrices converge, entonces

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|. \tag{4.14}$$

Por otra parte, como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach, una condición suficiente para la convergencia de la serie de matrices anterior es que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$ sea convergente.

Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ una matriz fijada, como, evidentemente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A|^n}{n!} = e^{|A|},$$

es convergente, de lo dicho con anterioridad podemos concluir que la definición que sigue tiene sentido:

Definición 4.1 *Se define la matriz exponencial de A como la matriz $e^A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ dada por*

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

donde, por definición, $A^0 := I_N$, la matriz identidad $N \times N$.

Es inmediato, teniendo en cuenta (4.14), que se satisface

$$\left| e^A \right| \leq e^{|A|}, \quad \text{para toda } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{4.15}$$

Observación 4.2 *Obsérvese que si B y P son matrices reales $N \times N$, con P regular, y $A = PBP^{-1}$, entonces como consecuencia de la continuidad de la multiplicación en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, es inmediato comprobar que*

$$e^A = Pe^B P^{-1}.$$

Observación 4.3 *Es sencillo comprobar que la definición de e^A, y la observación precedente, se pueden extender al caso de matrices con coeficientes números complejos.*

Es evidente que

$$e^{\Theta_N} = I_N,$$

donde por Θ_N denotamos a la matriz $N \times N$ idénticamente nula.

También se satisface que e^A siempre es invertible, y de hecho,

$$\left(e^A \right)^{-1} = e^{-A}, \quad \text{para toda } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{4.16}$$

Esta última afirmación es un corolario inmediato del siguiente resultado:

Proposición 4.4 *Si A, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ son dos matrices que conmutan, es decir tales que $AB = BA$, entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A, \tag{4.17}$$

$$Be^A = e^A B \tag{4.18}$$

Demostración.- Supongamos que $A,\ B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ son dos matrices que conmutan. La demostración de que entonces se satisface (4.18) es sencilla, y se deja como ejercicio. Para demostrar (4.17), basta comprobar que

$$\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}\right|=0. \tag{4.19}$$

Ahora bien, evidentemente,

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}=\sum_{n_1,n_2=0}^{m}\frac{A^{n_1}}{n_1!}\frac{B^{n_2}}{n_2!}, \tag{4.20}$$

y como A y B conmutan,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}&=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\right)\\&=\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{A^kB^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)=\sum_{\substack{n_1,n_2=0\\ n_1+n_2>m}}^{m}\frac{A^{n_1}}{n_1!}\frac{B^{n_2}}{n_2!}\end{aligned}$$

De esta última igualdad y de (4.20), concluimos que

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}=\sum_{\substack{n_1,n_2=0\\ n_1+n_2>m}}^{m}\frac{A^{n_1}}{n_1!}\frac{B^{n_2}}{n_2!}, \tag{4.21}$$

y en consecuencia,

$$\left|\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}\right|\le\sum_{\substack{n_1,n_2=0\\ n_1+n_2>m}}^{m}\frac{|A|^{n_1}|B|^{n_2}}{n_1!n_2!} \tag{4.22}$$

Pero, de la misma manera que obtuvimos (4.21), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{|A|^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{|B|^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(|A|+|B|)^n}{n!}=\sum_{\substack{n_1,n_2=0\\ n_1+n_2>m}}^{m}\frac{|A|^{n_1}}{n_1!}\frac{|B|^{n_2}}{n_2!},$$

y por tanto, de (4.22) tenemos

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}\right|\\&\le\sum_{n=0}^{m}\frac{|A|^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{|B|^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(|A|+|B|)^n}{n!},\end{aligned}$$

y por consiguiente,

$$0 \leq \limsup_{m\to\infty} \left| \sum_{n=0}^{m} \frac{A^n}{n!} \sum_{n=0}^{m} \frac{B^n}{n!} - \sum_{n=0}^{m} \frac{(A+B)^n}{n!} \right| \leq e^{|A|}e^{|B|} - e^{|A|+|B|} = 0.$$

■

Dada una matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, denominaremos función exponencial asociada a A, a la función

$$F_A(x) := e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

Proposición 4.5 *La función exponencial asociada a A definida por* (4.23) *satisface:*

a) $F_A \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$,

b) $F_A'(x) = AF_A(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$,

c) F_A *es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo* (4.13).

Demostración.- Para demostrar a) y b), basta comprobar que $F_A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon}(F_A(x+\varepsilon) - F_A(x)) - AF_A(x) \right| = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Ahora bien, en primer lugar, como A conmuta consigo misma, es inmediato que

$$F_A(x+\varepsilon) - F_A(x) = e^{(x+\varepsilon)A} - e^{xA} = e^{xA}\left(e^{\varepsilon A} - I_N\right),$$

y en consecuencia,

$$|F_A(x+\varepsilon) - F_A(x)| \leq |e^{xA}||e^{\varepsilon A} - I_N|. \tag{4.25}$$

Pero

$$\begin{aligned} |e^{\varepsilon A} - I_N| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n A^n}{n!} \right| \\ &\leq |\varepsilon||A| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^{n-1}|A|^{n-1}}{n!} \leq |\varepsilon||A|e^{|\varepsilon||A|}, \end{aligned}$$

con lo que por (4.25), tenemos

$$|F_A(x+\varepsilon) - F_A(x)| \leq |\varepsilon||e^{xA}||A|e^{|\varepsilon||A|},$$

lo que implica que $F_A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$.

Análogamente,

$$\left| \frac{1}{\varepsilon}(F_A(x+\varepsilon) - F_A(x)) - AF_A(x) \right| = \frac{1}{|\varepsilon|} \left| e^{(x+\varepsilon)A} - e^{xA} - \varepsilon A e^{xA} \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\varepsilon|} |e^{xA}||e^{\varepsilon A} - I_N - \varepsilon A| = \frac{1}{|\varepsilon|} |e^{xA}| \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^n A^n}{n!} \right| \leq |\varepsilon||A|^2 |e^{xA}| e^{|\varepsilon||A|},$$

y en consecuencia se satisface (4.24).

Finalmente, que F_A es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo (4.13), es consecuencia inmediata de a), b), y el hecho de que e^{xA} es invertible, con inversa e^{-xA}. ■

Como consecuencia inmediata de la Proposición precedente, y del Teorema 3.1, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.6 *Sean $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, dadas. Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, la solución $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ del Problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} y' = Ay + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

viene dada por

$$\varphi(x; x_0, y_0) = e^{(x-x_0)A} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)A} b(s)\, ds, \quad \text{para todo } x \in I.$$

Cerramos esta sección con algunas consideraciones sobre el cálculo efectivo de e^{xA}, que va estar basado en el Teorema de Jordan, que exponemos a continuación. Previamente, introduzcamos algunas cuestiones de notación.

Denotaremos $I_1 = 1$, e I_n a la matriz identidad $n \times n$, para todo entero $n \geq 2$. Análogamente, denotaremos $H_1 = 0 \in \mathbb{R}$, y para todo entero $n \geq 2$, denotaremos H_n a la matriz $n \times n$ de término general $h_{ij} = \delta_{i+1,j}$, siendo $\delta_{i+1,j}$ la delta de Kronecker, es decir,

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dados λ, número complejo, y $n \geq 1$ entero, llamaremos caja de Jordan de dimensión n asociada al número λ, a

$$J_n(\lambda) := \lambda I_n + H_n.$$

Si $J_{n_r}(\lambda_r)$, $r = 1, ..., k$, son k cajas de Jordan, denotaremos

$$\operatorname{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1), ..., J_{n_k}(\lambda_k)\right),$$

a la matriz $\left(\sum_{r=1}^{k} n_r\right) \times \left(\sum_{r=1}^{k} n_r\right)$ que se obtiene escribiendo las cajas de Jordan $J_{n_r}(\lambda_r)$ en la diagonal, y tomando el resto de las cajas ceros.

Se tiene el resultado siguiente (ver por ejemplo [2]):

Teorema 4.7 (**de Jordan**) *Sea A una matriz cualquiera $N \times N$ de números reales o complejos. Existen una matriz regular $N \times N$ de números complejos, P, y una matriz J de la forma*

$$J = \operatorname{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1), ..., J_{n_k}(\lambda_k)\right), \tag{4.26}$$

para algún $k \geq 1$, de tal manera que

$$A = PJP^{-1}. \tag{4.27}$$

La matriz J está determinada por A de manera unívoca, salvo el orden en que se escriben las cajas de Jordan, y se la denomina la forma canónica de Jordan de la matriz A. A la matriz P se la denomina matriz de paso.

Sobre el teorema precedente, hagamos las siguiente puntualizaciones:

a) Evidentemente, $\sum_{r=1}^{k} n_r = N$.

b) Los λ_r, $r = 1, ..., k$ son todos autovalores de A.

c) Un mismo autovalor puede aparecer en dos o más cajas de Jordan en J, pero en total, el número de veces que aparece en la diagonal de J coincide con la multiplicidad de ese autovalor.

Observemos, que dada $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, si la escribimos en la forma (4.27), entonces tenemos

$$e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

y en consecuencia, para calcular e^{xA} basta conocer la forma canónica de Jordan de la matriz A, una matriz de paso P y su inversa, y saber cómo se calcula e^{xJ}.

Sobre el cálculo de J y de P, se expondrán algunos resultados en clases de problemas. Nos vamos a limitar aquí a indicar cómo se calcula e^{xJ}, cuando se conoce J.

En primer lugar, teniendo en cuenta que para cualquier λ real o complejo, y cualquier entero $n \geq 1$, $\lambda x I_n$ y xH_n conmutan, es inmediato que

$$e^{xJ_n(\lambda)} = e^{x}I_n e^{xH_n}.$$

Pero, como es sencillo comprobar, $H_n^k = \Theta_n$, para todo $k \geq n$, y si $2 \leq k \leq n-1$, H_n^k es la matriz de elemento $h_{ij} = \delta_{i+k,j}$. En consecuencia, es inmediato que

$$e^{xJ_n(\lambda)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & \dfrac{xe^{\lambda x}}{1!} & \dfrac{x^2e^{\lambda x}}{2!} & \dots & \dfrac{x^{n-2}e^{\lambda x}}{(n-2)!} & \dfrac{x^{n-1}e^{\lambda x}}{(n-1)!} \\ 0 & e^{\lambda x} & \dfrac{xe^{\lambda x}}{1!} & \dots & \dfrac{x^{n-3}e^{\lambda x}}{(n-3)!} & \dfrac{x^{n-2}e^{\lambda x}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda x} & \dfrac{xe^{\lambda x}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

Ahora, basta observar que, como es sencillo comprobar, si J es de la forma (4.26), entonces

$$e^{xJ} = \operatorname{diag}\left(e^{xJ_{n_1}(\lambda_1)}, ..., e^{xJ_{n_k}(\lambda_k)}\right).$$

Observación 4.8 *En general, los autovalores de A serán números complejos, y por tanto J y P serán matrices de números complejos, con lo que las funciones exponenciales que aparecerán en e^{xJ} serán funciones con valores complejos. Es posible introducir, una vez conocida J, una matriz $\widetilde{J}$ de coeficientes reales, denominada forma canónica de Jordan real asociada a A, la cual permite efectuar siempre el cálculo de e^{xA} sin salir del cuerpo de los números reales (ver [2])*

Observación 4.9 *En el caso en que los autovalores de A son todos reales, teniendo en cuenta el apartado b) de la Proposición* 2.7, *podemos afirmar que la función matricial*

$$F(x) = Pe^{xJ}, \quad x \in \mathbb{R},$$

es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo (4.13), *y por tanto, para resolver dicho sistema no es necesario el cálculo de P^{-1}.*

5 EDO lineal de orden n

Sea $n \geq 1$ entero. Se denomina EDO lineal de orden n a una ecuación de la forma

$$a_0(x)y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y + b(x), \tag{5.28}$$

con $a_i(x) \in C(I)$, $i = 0, 1, ..., n$, y $b(x) \in C(I)$, funciones dadas, siendo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y donde suponemos que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. A las funciones $a_i(x)$ se las denominan los coeficientes de (5.28), y a $b(x)$ el término independiente de la EDO.

Definición 5.1 *Si $b \equiv 0$, se dice que* (5.28) *es una EDO lineal de orden n homogénea. En el caso en que $b \not\equiv 0$, se dice que la ecuación* (5.28) *es una EDO lineal de orden n no homogénea. En este último caso, se dice que*

$$a_0(x)y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y, \qquad (5.29)$$

es la ecuación homogénea asociada a (5.28).

A partir de ahora, sin pérdida de generalidad, suponemos que $a_0(x) \equiv 1$ (en caso contrario, basta dividir la EDO por $a_0(x)$).

Recordemos que una solución de (5.28) en I es cualquier función $\varphi \in C^n(I)$ tal que

$$\varphi^{(n)}(x) = a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + ... + a_{n-1}(x)\varphi'(x) + a_n(x)\varphi(x) + b(x), \quad \forall\, x \in I.$$

Asociado a la EDO (5.28), se considera el SDO de primer orden y dimensión n,

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ \text{..........,} \\ \text{..........,} \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = a_n(x)y_1 + a_{n-1}(x)y_2 + ... + a_1(x)y_n + b(x), \end{cases} \qquad (5.30)$$

SDO que es evidentemente lineal, y es homogéneo si (5.28) lo es.

De los resultados obtenidos para los SDO lineales de primer orden, podemos afirmar:

Proposición 5.2 *Para cada $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in I \times \mathbb{R}^n$ dado, existe una y sólo una solución en I del Problema de Cauchy*

$$(PC)\begin{cases} y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

dicha solución es denotada $\varphi(\cdot; x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$.

Demostración.- Basta tener en cuenta que φ es solución de (PC) si y sólo si $(\varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)})$ es solución del correspondiente Problema de Cauchy para el SDO asociado (5.30). ■

Denotemos,

$$V_b^n = \{\varphi \in C^n(I);\ \varphi \text{ es solución de (5.28) en } I\},$$

con lo que en particular,

$$V_0^n = \{\varphi \in C^n(I);\ \varphi \text{ es solución de (5.29) en } I\}.$$

Es inmediato comprobar que toda combinación lineal de soluciones de (5.29) en I es también solución de (5.29) en I, es decir, V_0^n es un subespacio vectorial de $C^n(I)$. De hecho, más exactamente, se tiene el siguiente resultado

Proposición 5.3 *El conjunto V_0^n es un subespacio vectorial de $C^n(I)$ de dimensión n.*

Demostración Basta considerar el SDO lineal homogéneo de primer orden asociado a (5.29), y tener en cuenta la Proposición 2.3. ∎

Definición 5.4 *Se denomina sistema fundamental de soluciones de* (5.29), *a cualquier base $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ del espacio vectorial V_0^n.*

A partir de ahora, usaremos s.f. como abreviatura de sistema fundamental. Así pues, para resolver (5.29), basta con hallar un s.f. $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ de soluciones de (5.29), y en tal caso la solución general $y_h(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ de esta ecuación viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2, ..., C_n) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + ... + C_n\varphi_n(x), \quad \forall\, x \in I,$$

siendo $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Obsérvese por otra parte, que, como se comprueba fácilmente, una familia de n funciones $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subset C^n(I)$ es un s.f. de soluciones de (5.29) si y sólo si la matriz

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ..... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ..... & \varphi_n' \\ ... & ... & ..... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ..... & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

denominada matriz wronskiana de la familia $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, es una m.f. del correspondiente SDO lineal homogéneo de primer orden asociado. Por tanto, como consecuencia inmediata de la Proposición 2.4 se obtiene:

Proposición 5.5 *Sean $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ n soluciones en I de la EDO* (5.29). *Dichas soluciones constituyen un s.f. de soluciones de* (5.29) *si y sólo si existe un punto $x_0 \in I$ tal que el determinante de la matriz wronskiana de la familia $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ es distinto de cero en dicho punto, y en tal caso, el citado determinante no se anula en ningún punto del intervalo I.*

Nos planteamos ahora la cuestión de determinar V_b^n cuando $b \not\equiv 0$.

En primer lugar, es inmediato comprobar que se satisfacen la dos propiedades siguientes:

a) Si $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ pertenecen a V_b^n, es decir, son soluciones de (5.28) en I, entonces $\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}$ pertenece a V_0^n, es decir, es solución de (5.29) en I.

b) Si $\widehat{\varphi}$ pertenece a V_b^n, es decir, es solución de (5.28) en I, y φ pertenece a V_0^n, es decir, es solución de (5.29) en I, entonces $\widehat{\varphi} + \varphi$ pertenece a V_b^n, es decir, es solución de (5.28) en I.

Como consecuencia de a) y b), es inmediato obtener el resultado siguiente:

Proposición 5.6 *Si $\widehat{\varphi}_p$ es una solución particular de* (5.28) *en I, entonces*

$$V_b^n = \{\widehat{\varphi}_p + \varphi;\ \varphi \in V_0^n\}, \tag{5.31}$$

es decir, V_b^n coincide con la variedad afín $\widehat{\varphi}_p + V_0^n$.

La igualdad (5.31) se expresa también diciendo que la solución general de (5.28) es igual a la suma de una solución particular de dicha ecuación, más la solución general de la homogénea asociada (5.29).

Si se conoce un s.f. de soluciones de (5.29), se puede calcular una solución particular de (5.28), usando para ello el método de Lagrange de variación de las constantes. En concreto, sea $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ un s.f. de soluciones de (5.29), en tal caso, buscamos una solución particular de (5.28) que sea de la forma

$$\widehat{\varphi}_p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\varphi_i(x), \quad \forall\, x \in I,$$

con las $c_i(x)$ funciones de $C^1(I)$ por determinar. Esto equivale a buscar una función vectorial

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ c_n(x) \end{pmatrix},$$

perteneciente a $C^1(I; \mathbb{R}^n)$, tal que $F(x)c(x)$ sea solución del SDO lineal asociado (5.30), siendo

$$F(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & ..... & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2(x) & ..... & \varphi_n'(x) \\ ... & ... & ..... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & ..... & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, se ha de satisfacer

$$F(x)c'(x) = \widehat{b}(x),$$

con

$$\widehat{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

En resumen, podemos afirmar el siguiente resultado:

Proposición 5.7 *(método de variación de las constantes) Sea* $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *un s.f. de soluciones de* (5.29). *En tal caso, existe una solución particular de* (5.28) *que es de la forma*

$$\widehat{\varphi}_p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\varphi_i(x), \quad \forall\, x \in I,$$

con las $c_i(x)$ *funciones de* $C^1(I)$ *determinadas de manera unívoca salvo constantes aditivas, por el SDO*

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n(x) = 0, \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)\varphi_2^{(n-2)}(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = b(x), \end{cases}$$

para todo $x \in I$.

6 EDO lineal de orden n de coeficientes constantes

Supongamos ahora que la EDO (5.28) es de coeficientes constantes. En este caso, vamos a describir un procedimiento general para hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

En concreto, consideremos la EDO

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)}, \tag{6.32}$$

con $a_k \in \mathbb{R}$, para todo $k = 1, 2, ..., n$.

Se denomina polinomio característico asociado a la ecuación (6.32), al polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}$$

Sean λ_j, $j = 1, 2, ..., n$, las n raices del polinomio característico, es decir, las n soluciones de

$$p(\lambda) = 0,$$

contadas cada una tantas veces como indique su multiplicidad.

De esta forma,

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j).$$

Se pueden presentar tres casos:

i) Las n raices son reales y distintas entre sí.

En tal caso, si definimos

$$\varphi_j(x) = e^{\lambda_j x}, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{6.33}$$

la familia así definida constituye un s.f. de soluciones de (6.32).

En efecto, en primer lugar, teniendo en cuenta que

$$\varphi_j^{(n-k)}(x) = \lambda_j^{n-k} e^{\lambda_j x},$$

es inmediato comprobar que

$$\varphi_j^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_j^{(n-k)} = p(\lambda_j)\varphi_j(x) = 0,$$

y en consecuencia las n funciones definidas por (6.33), son soluciones de (6.32).

Finalmente, para probar que constituyen un sistema fundamental de soluciones de (6.32), basta comprobar que el determinante de la matriz wronskiana correspondiente no se anula.

Ahora bien, teniendo en cuenta la definición de las funciones φ_j,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ..... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ..... & \varphi_n' \\ ... & ... & ..... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ..... & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ..... & \varphi_n \\ \lambda_1\varphi_1 & \lambda_2\varphi_2 & ..... & \lambda_n\varphi_n \\ ... & ... & ..... & ... \\ \lambda_1^{n-1}\varphi_1 & \lambda_2^{n-1}\varphi_2 & ..... & \lambda_n^{n-1}\varphi_n \end{pmatrix},$$

de donde es inmediato que

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ..... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ..... & \varphi_n' \\ ... & ... & ..... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ..... & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = e^{sx} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ..... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ..... & \lambda_n \\ ... & ... & ..... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ..... & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

con

$$s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Basta tener en cuenta ahora que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ..... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ..... & \lambda_n \\ ... & ... & ..... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ..... & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

es la matriz de Vandermonde, de la que es bien sabido que su determinante es distinto de cero si todos los λ_j son distintos.

ii) Todas las raices son reales, pero alguna es de multiplicidad mayor que 1.

En este caso, se procede de manera similar a como ya vimos en el caso de una EDO de segundo orden. En concreto, si, por fijar ideas,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m,$$

es decir, λ_1 es una raiz de $P(\lambda)$ de multiplicidad $m \leq n$, se puede demostrar, ver [4] para los detalles, que las m funciones definidas por

$$\varphi_j(x) = x^{j-1}e^{\lambda_1 x}, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

son soluciones linealmente independientes de (6.32).

iii) Si $p(\lambda)$ posee raices complejas.

Supongamos, por fijar ideas, que

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, y $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es raiz de $p(\lambda)$. En tal caso, reordenando si es preciso,

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

es también raiz de $p(\lambda)$, y si λ_1 es raiz de multiplicidad m, también lo es λ_2.

Razonando como en el caso ii), se puede comprobar que las funciones $\varphi_{1j}(x) = x^{j-1}e^{\lambda_1 x}$ y $\varphi_{2j}(x) = x^{j-1}e^{\lambda_2 x}$, $j = 1, 2, ..., m$, son soluciones de (6.32), pero toman valores complejos. Para solventar este problema, y limitarnos al caso de funciones con valores reales, se toman como soluciones de (6.32), las funciones parte real y parte imaginaria de $\varphi_{1j}(x)$, es decir, las $2m$ funciones

$$x^{j-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad x^{j-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \quad j = 1, 2, ..., m,$$

que, también se puede demostrar que son linealmente independientes.

Procediendo en la manera previamente descrita, es posible demostrar el siguiente resultado (ver [4] para los detalles):

Teorema 6.1 *Sean $\lambda_1, ..., \lambda_q$, las raices reales distintas de $P(\lambda)$, de multiplicidades respectivas $m_1, ..., m_q$. Sean $\lambda_{q+1}, ..., \lambda_{q+s}$, las raices no reales distintas de $P(\lambda)$, agrupadas por conjugadas, es decir,*

$$\lambda_{q+j} = \alpha_{q+j} \pm \beta_{q+j} i,$$

con $\alpha_{q+j} \in \mathbb{R}$, y $\beta_{q+j} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con multiplicidades respectivas $m_{q+1}, ..., m_{q+s}$ (luego $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} m_j + 2\sum_{j=1}^{s} m_{q+j} = n$).

Definamos $\varphi_{jk}(x) = x^k e^{\lambda_j x}$, para todo $1 \leq j \leq q$, y todo $0 \leq k \leq m_j - 1$,

$$\begin{cases} \varphi^1_{jk}(x) = x^k e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\ \varphi^2_{jk}(x) = x^k e^{\alpha_j x} \operatorname{sen} \beta_j x, \\ \textit{para todo } q+1 \leq j \leq q+s, \textit{ y todo } 0 \leq k \leq m_j - 1. \end{cases}$$

Entonces, el conjunto de las n funciones así definidas, constituye un sistema fundamental de soluciones de (6.32).

7 Problemas de contorno para un SDO lineal. El caso de una EDO lineal de segundo orden.

En esta sección vamos a considerar un tipo de problemas para los SDO lineales, y muy especialmente para la EDO lineal de segundo orden, que no son problemas de valores iniciales. En concreto, sean $\alpha < \beta$ números reales, y denotemos

$$I = [\alpha, \beta].$$

Supongamos dados $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$, $B, C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, y $h \in \mathbb{R}^N$, y consideremos el siguiente Problema de Contorno:

$$\begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \text{ en } I, \\ By(\alpha) + Cy(\beta) = h. \end{cases} \tag{7.34}$$

Definición 7.1 *Una solución de* (7.34) *es cualquier función $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + b(x), \qquad \textit{para todo } x \in I,$$

y satisfaga la condición de contorno:

$$B\varphi(\alpha) + C\varphi(\beta) = h.$$

Se denomina Problema de Contorno homogéneo asociado a (7.34) al problema

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \text{ en } I, \\ By(\alpha) + Cy(\beta) = 0. \end{cases} \tag{7.35}$$

Evidentemente, la función idénticamente nula es siempre solución de (7.35), pero pueden existir más soluciones de este último problema, como ya veremos en los ejercicios. Como primer resultado se tiene:

Proposición 7.2 *El conjunto W_0 de todas las soluciones de* (7.35) *es un subespacio vectorial de dimensión menor o igual que N del espacio $C^1(I;\mathbb{R}^N)$, y de hecho,*

$$\dim(W_0) = N - \mathrm{rango}(BF(\alpha) + CF(\beta)), \tag{7.36}$$

siendo $F(x)$ cualquier matriz fundamental del SDO $y' = A(x)y$.

Demostración.- Sea $F(x)$ cualquier matriz fundamental del SDO $y' = A(x)y$. Es evidente que

$$W_0 = \{\varphi : \ \varphi(x) = F(x)a, \ a \in \mathbb{R}^N, \ BF(\alpha) + CF(\beta) = 0\},$$

es decir,

$$W_0 = \{\varphi : \ \varphi(x) = F(x)a, \ a \in \ker(BF(\alpha) + CF(\beta))\},$$

y en consecuencia, como las columnas de $F(x)$ son linealmente independientes en $C^1(I;\mathbb{R}^N)$,

$$\dim(W_0) = \dim(\ker(BF(\alpha) + CF(\beta))) = N - \mathrm{rango}(BF(\alpha) + CF(\beta)).$$

■

Observación 7.3 *Como consecuencia de la Proposición precedente, obtenemos que* $\mathrm{rango}(BF(\alpha)+CF(\beta))$ *es independiente de la matriz fundamental $F(x)$ del SDO $y' = A(x)y$ que se elija. Además, decir que el Problema de Contorno homogéneo* (7.35) *sólo tiene la solución idénticamente nula, es equivalente a afirmar que* $\mathrm{rango}(BF(\alpha) + CF(\beta)) = N$.

A diferencia de (7.35), el problema (7.34) puede no tener solución. En concreto se tiene el siguiente resultado:

Teorema 7.4 (**de alternativa**) *Sea $F(x)$ una matriz fundamental del SDO homogéneo $y' = A(x)y$. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) *El Problema de Contorno* (7.34) *posee solución si y sólo si*

$$\begin{aligned} &\mathrm{rango}(BF(\alpha) + CF(\beta)) \\ &= \mathrm{rango}((BF(\alpha) + CF(\beta) \mid h - CF(\beta)\int_\alpha^\beta F^{-1}(s)b(s)\,ds)). \end{aligned} \tag{7.37}$$

b) *Si el problema* (7.35) *posee únicamente la solución idénticamente nula, entonces para cada* $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ *y* $h \in \mathbb{R}^N$ *dados, existe una y sólo una solución del Problema de Contorno* (7.34)*.*

c) *Si el problema* (7.35) *posee soluciones distintas de la idénticamente nula, entonces para un* $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ *y un* $h \in \mathbb{R}^N$ *dados, puede existir o no existir solución de* (7.34)*, pero si existe, hay infinitas soluciones.*

Demostración.-
a) Evidentemente, (7.34) posee solución si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}^N$ tal que la función $\varphi(x) = F(x)a + F(x)\displaystyle\int_\alpha^x F^{-1}(s)b(s)\,ds$, satisface la condición de contorno $B\varphi(\alpha) + C\varphi(\beta) = h$. Es decir, el problema (7.34) posee solución si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}^N$ solución del sistema algebráico de ecuaciones lineales

$$(BF(\alpha) + CF(\beta))a = h - CF(\beta)\int_\alpha^\beta F^{-1}(s)b(s)\,ds. \tag{7.38}$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, (7.38) posee solución si y sólo si se satisface (7.37).

b) Si el problema (7.35) posee únicamente la solución idénticamente nula, entonces rango$(BF(\alpha)+CF(\beta)) = N$, y en consecuencia, para cada $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$ dados, (7.38) posee una y sólo una solución $a \in \mathbb{R}^N$, lo que equivale a que existe una y sólo una solución del correspondiente problema (7.34).

c) Esta útima afirmación es consecuencia evidente del Teorema de Rouché-Frobenius, ya que por la Proposición 7.2, la dimensión de W_0 es mayor o igual que 1 si y sólo si rango$(BF(\alpha) + CF(\beta)) < N$. ■

Como ejercicio, se propone que se encuentren los $h \in \mathbb{R}^2$ para los que existe solución del Problema de contorno

$$\begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}, \quad \text{en } [0,1], \\[2mm] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y(1) = h, \end{cases}$$

y que se calculen las soluciones de este problema para tales h.

La noción de Problema de Contorno, y las consideraciones precedentes, pueden ser extendidas al caso de una EDO lineal de orden n, sin más que considerar el SDO lineal de primer orden asociado. No obstante, nosotros vamos a considerar y analizar de manera directa una clase particular de Problemas de Contorno para las EDO lineales de segundo orden, los problemas con condiciones de contorno separadas, que aparecen en la práctica, por ejemplo, cuando se aplica el denominado Método de Separación de Variables para la resolución de problemas mixtos para las EDP del calor y de ondas unidimensionales (dicho método se estudia en la asignatura Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional).

Supongamos dadas tres funciones $p = p(x)$, $q = q(x)$ y $b = b(x)$, tales que

$$p \in C^1(I), \quad q, b \in C(I), \quad p(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in I, \tag{7.39}$$

y seis números reales c_1, d_1, c_2, d_2, h_1, h_2, tales que

$$c_k^2 + d_k^2 > 0, \quad k = 1, 2. \tag{7.40}$$

Asociados a estos datos, consideremos el Problema de Contorno

$$(PCo) \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = b(x), & \text{en } I, \\ c_1 y(\alpha) + d_1 y'(\alpha) = h_1, \\ c_2 y(\beta) + d_2 y'(\beta) = h_2. \end{cases}$$

A las dos condiciones que aparecen asociadas a la EDO en (PCo) se las denominan las condiciones de contorno.

Definición 7.5 *Una solución de* (PCo) *es cualquier función* $\varphi \in C^2(I)$ *tal que*

$$p(x)\varphi''(x) + p'(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x) = b(x), \quad \text{para todo } x \in I,$$

y se satisfagan las dos condiciones de contorno:

$$\begin{cases} c_1\varphi(\alpha) + d_1\varphi'(\alpha) = h_1, \\ c_2\varphi(\beta) + d_2\varphi'(\beta) = h_2. \end{cases}$$

Observación 7.6 *Toda EDO lineal de segundo orden*

$$y'' = a_1(x)y' + a_2(x)y + a_3(x),$$

con las $a_k \in C(I)$, $k = 1, 2, 3$, *puede ser escrita en la forma* $(p(x)y')' + q(x)y = b(x)$, *sin más que multiplicar la EDO de partida por* $e^{-A_1(x)}$, *siendo* $A_1(x) := \int_\alpha^x a_1(s)\, ds$, *para todo* $x \in I$.

Observación 7.7 *El problema* (PCo) *puede no tener solución, o tener infinitas soluciones. Así por ejemplo, es inmediato comprobar, por resolución directa, que el problema de contorno*

$$\begin{cases} y'' + y = 1, & \text{en } [0, \pi], \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0, \end{cases}$$

no tiene solución, mientras que el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & \text{en } [0, \pi], \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0, \end{cases}$$

posee infinitas soluciones.

Se denomina Problema de Contorno homogéneo asociado a (PCo) al problema resultante de tomar $b \equiv 0$ y $h_1 = h_2 = 0$ en este último, es decir,

$$(PCo)_{hom} \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & \text{en } I, \\ c_1 y(\alpha) + d_1 y'(\alpha) = 0, \\ c_2 y(\beta) + d_2 y'(\beta) = 0. \end{cases}$$

Es evidente que la función $\varphi \equiv 0$ es solución de $(PCo)_{hom}$, pero que no necesariamente es la única, como pone de manifiesto el segundo ejemplo de la Observación 7.7. De hecho se tiene el resultado siguiente:

Proposición 7.8 *Si se satisfacen las condiciones* (7.39) *y* (7.40), *el conjunto de soluciones de* $(PCo)_{hom}$ *es un subespacio vectorial de* $C^2(I)$ *de dimensión menor o igual a* 1.

Demostración.- Es inmediato comprobar que el conjunto de soluciones de $(PCo)_{hom}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de dimensión 2 formado por todas las soluciones en I de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$. En consecuencia, si la afirmación de la Proposición no es cierta, entonces toda solución en I de dicha EDO es solución de $(PCo)_{hom}$. Pero en tal caso, en particular las soluciones de los Problemas de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & \text{en } I, \\ y(\alpha) = 1, \\ y'(\alpha) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & \text{en } I, \\ y(\alpha) = 0, \\ y'(\alpha) = 1, \end{cases}$$

serán ambas soluciones de $(PCo)_{hom}$, lo que implica que $c_1 = d_1 = 0$, en contradicción con (7.40). ■

A partir de ahora vamos a realizar la siguiente hipótesis:

$$\text{la función } \varphi \equiv 0 \text{ es la única solución del problema } (PCo)_{hom}. \tag{7.41}$$

Obsérvese que, como es inmediato comprobar, la diferencia de dos soluciones de (PCo) es solución de $(PCo)_{hom}$, y en consecuencia, bajo la hipótesis (7.41), para cada $b \in C(I)$ dada el problema (PCo) posee, a lo más, una solución. En lo que sigue vamos a demostrar que de hecho, bajo la hipótesis anterior, para cada $b \in C(I)$ dada el problema (PCo) posee exactamente una solución, y vamos a obtener una fórmula para construir ésta. Como paso previo, tenemos el resultado siguiente:

Proposición 7.9 *Supongamos que se satisfacen las condiciones* (7.39), (7.40) *y* (7.41). *Entonces existen dos soluciones φ_1, φ_2 de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en el intervalo I, tales que*

i) $c_1\varphi_1(\alpha) + d_1\varphi_1'(\alpha) = 0$,

ii) $c_2\varphi_2(\beta) + d_2\varphi_2'(\beta) = 0$,

iii) $\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = \dfrac{1}{p(x)}$, *para todo $x \in I$.*

Demostración.- Si $d_1 \neq 0$, tomemos como ψ_1 la solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)\psi_1')' + q(x)\psi_1 = 0, & \text{en } I, \\ \psi_1(\alpha) = 1, \quad \psi_1'(\alpha) = -\dfrac{c_1}{d_1}. \end{cases}$$

Si $d_1 = 0$, tomemos como ψ_1 la solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)\psi_1')' + q(x)\psi_1 = 0, & \text{en } I, \\ \psi_1(\alpha) = 0, \quad \psi_1'(\alpha) = 1. \end{cases}$$

De esta forma, en cualquiera de los dos casos obtenemos una función ψ_1 no idénticamente nula, que es solución de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en el intervalo I, y que satisface i).

De manera análoga, cambiando c_1 por c_2, d_1 por d_2, y α por β en la argumentación anterior, podemos obtener una función ψ_2 no idénticamente nula, que es solución de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en el intervalo I, y que satisface ii).

Pero entonces, para todo $x \in I$ se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[p(x)(\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x))] \\ &= (p(x)\psi_2'(x))'\psi_1(x) + p(x)\psi_1'(x)\psi_2'(x) - p(x)\psi_1'(x)\psi_2'(x) - (p(x)\psi_1'(x))'\psi_2(x) \\ &= p(x)\psi_2'(x))'\psi_1(x) - (p(x)\psi_1'(x))'\psi_2(x) \\ &= -q(x)\psi_2(x)\psi_1(x) + q(x)\psi_1(x)\psi_2(x) = 0, \end{aligned}$$

y por consiguiente, existe una constante $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$p(x)(\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x)) = r, \quad \text{para todo } x \in I.$$

Si demostramos que $r \neq 0$, entonces, tomando por ejemplo $\varphi_1 = \psi_1$ y $\varphi_2 = \psi_2/r$, tendremos dos funciones que satisfacen las condiciones del Teorema.

Demostremos por consiguiente que $r \neq 0$. Si r fuese cero, como $p(x) > 0$ en todo $x \in I$, tendríamos que

$$\det \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{pmatrix} = 0, \quad \text{para todo } x \in I,$$

y por tanto ψ_2 sería un múltiplo de ψ_1, con lo que ψ_2 sería una solución no nula de $(PCo)_{hom}$, en contra de la hipótesis (7.41). ■

Observación 7.10 *Obsérvese que las funciones φ_1 y φ_2 obtenidas en la Proposición precedente son soluciones en I de la EDO homogénea $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, tales que, por iii) y* (7.39),

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \textit{para todo } x \in I,$$

y en consecuencia constituyen un sistema fundamental de soluciones de la citada EDO homogénea.

Además, por la hipótesis (7.41), *se satisfacen*

$$c_1\varphi_2(\alpha) + d_1\varphi_2'(\alpha) \neq 0,$$

$$c_2\varphi_1(\beta) + d_2\varphi_1'(\beta) \neq 0,$$

y es inmediato comprobar entonces que la función

$$\varphi_{h_1h_2}(x) := \frac{h_2}{c_2\varphi_1(\beta) + d_2\varphi_1'(\beta)}\varphi_1(x) + \frac{h_1}{c_1\varphi_2(\alpha) + d_1\varphi_2'(\alpha)}\varphi_2(x), \tag{7.42}$$

es la solución del problema de contorno

$$(PCo)_{h_1h_2} \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & \text{en } I, \\ c_1y(\alpha) + d_1y'(\alpha) = h_1, \\ c_2y(\beta) + d_2y'(\beta) = h_2. \end{cases}$$

Téngase en cuenta que, como es inmediato comprobar, si φ_b es solución del problema de contorno

$$(PCo)_b \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = b(x), & \text{en } I, \\ c_1y(\alpha) + d_1y'(\alpha) = 0, \\ c_2y(\beta) + d_2y'(\beta) = 0, \end{cases}$$

entonces la función

$$\varphi(x) = \varphi_b(x) + \varphi_{h_1h_2}(x), \quad x \in I, \tag{7.43}$$

con $\varphi_{h_1h_2}$ definida por (7.42), es solución del problema (PCo). Podemos ahora demostrar el siguiente resultado:

Teorema 7.11 *Supongamos que se satisfacen las condiciones* (7.39), (7.40), (7.41), *y sean φ_1, φ_2, dos soluciones de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en el* *intervalo I, que satisfagan las propiedades* i), ii), iii) *de la Proposición* 7.9. *Consideremos la función $g : (x,s) \in I \times I \mapsto g(x,s) \in \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x,s) = \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(s), & si\ x \leq s, \\ \varphi_1(s)\varphi_2(x), & si\ x > s. \end{cases} \tag{7.44}$$

En estas condiciones, para cada $b \in C(I)$, h_1, $h_2 \in \mathbb{R}$ dados, existe una y sólo una solución φ de (PCo), que viene dada por la igualdad (7.43), *siendo*

$$\varphi_b(x) = \int_\alpha^\beta g(x,s)b(s)\,ds, \quad para\ todo\ x \in I, \tag{7.45}$$

y $\varphi_{h_1h_2}$ la función definida por (7.42).

Demostración.- Fijemos $b \in C(I)$, y consideremos la función φ_b definida por (7.45). Lo único que hemos de probar es que φ_b es solución de $(PCo)_b$. Es evidente que

$$\varphi_b(x) = \varphi_2(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds, \tag{7.46}$$

para todo $x \in I$, por consiguiente $\varphi_b \in C^2(I)$, y derivando en esta última igualdad,

$$\begin{aligned} \varphi_b'(x) &= \varphi_2'(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_2(x)\varphi_1(x)b(x) \\ &\quad +\varphi_1'(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds - \varphi_1(x)\varphi_2(x)b(x) \\ &= \varphi_2'(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1'(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds, \end{aligned} \tag{7.47}$$

para todo $x \in I$. Derivando nuevamente en (7.47), obtenemos,

$$\begin{aligned} \varphi_b''(x) &= \varphi_2''(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1''(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds \\ &\quad +[\varphi_2'(x)\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)]b(x), \end{aligned} \tag{7.48}$$

para todo $x \in I$.

Multiplicando (7.46) por $q(x)$, (7.47) por $p'(x)$, (7.48) por $p(x)$, sumando las tres igualdades resultantes, y teniendo en cuenta que φ_1 y φ_2 son soluciones en I de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, y satisfacen la propiedad iii), se obtiene fácilmente que φ_b satisface la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = b(x)$ en I.

Por otra parte, de (7.46) y (7.47) se deducen

$$c_1\varphi_b(\alpha) + d_1\varphi_b'(\alpha) = [c_1\varphi_1(\alpha) + d_1\varphi_1'(\alpha)]\int_\alpha^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds = 0,$$

$$c_2\varphi_b(\beta) + d_2\varphi_b'(\beta) = [c_2\varphi_2(\beta) + d_2\varphi_2'(\beta)] \int_\alpha^\beta \varphi_1(s)b(s)\,ds = 0.$$

■

Observación 7.12 *Evidentemente, la función g construida por la fórmula* (7.44) *es continua en $I \times I$. Es inmediato comprobar que es la única función continua en $I \times I$ que satisfaga* (7.45) *para toda función $b \in C^0(I)$. A g se le denomina el núcleo de Green para el problema* (PCo).

Como ejercicio, cálculese el núcleo de Green para el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' = b(x), & \text{en } [0,1], \\ y(0) = h_1, \\ y(1) = h_2, \end{cases}$$

y encuéntrese la expresión general de la solución de dicho problema de contorno.

Observación 7.13 *Para el problema* (PCo) *se presenta la siguiente alternativa:*

a) La única solución del problema homogéneo asociado es la idénticamente nula.

En este caso, como ya hemos demostrado, para cada $b \in C(I)$, h_1, $h_2 \in \mathbb{R}$, dados, existe una y sólo una solución de (PCo).

b) El problema homogéneo asociado posee soluciones distintas de la idénticamente nula.

En tal caso, por la Proposición 7.8, *el conjunto de soluciones de $(PCo)_{hom}$ es un subespacio vectorial de $C^2(I)$ de dimensión* 1, *por otra parte, es inmediato comprobar que la suma de una solución de $(PCo)_{hom}$ y otra de (PCo) es una solución de (PCo), y ya sabemos que la diferencia de dos soluciones de (PCo) es solución de $(PCo)_{hom}$. En consecuencia, en este caso, para $b \in C(I)$, h_1, $h_2 \in \mathbb{R}$, dados, si existe solución del problema (PCo) correspondiente, existen infinitas, de hecho una variedad afín de $C^2(I)$ de dimensión* 1.

Observación 7.14 *El concepto de núcleo de Green y la construcción del mismo, pueden ser generalizados al caso del Problema de Contorno para un SDO lineal,* (7.34), *en el caso en que el homogéneo asociado* (7.35) *posee únicamente la solución idénticamente nula.*

Para terminar con este tema, consideremos el denominado Problema de Sturm-Liouville, consistente en hallar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que exista solución no idénticamente nula del problema de contorno

$$(SL) \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, & \text{en } I, \\ c_1 y(\alpha) + d_1 y'(\alpha) = 0, \\ c_2 y(\beta) + d_2 y'(\beta) = 0, \end{cases}$$

donde I, $p(x)$, $q(x)$, c_k, d_k, son los mismos que en la formulación de (PCo).

A los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que exista solución no idénticamente nula de (SL) se les denomina autovalores del Problema de Sturm-Liouville, y a cualquier función $\varphi_\lambda \in C^2(I)$, no idénticamente nula, que sea solución de (SL) para dicho valor de λ, se le denomina una autofunción asociada al autovalor λ.

Así por ejemplo, para el problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \quad \text{en } [0,1], \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

es un sencillo ejercicio comprobar que los autovalores vienen dados por la sucesión de números

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots..,$$

siendo las autofunciones asociadas a λ_n de la forma

$$\varphi_n(x) = a_n \operatorname{sen}(n\pi x), \quad n = 1, 2, \ldots..,$$

con $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, arbitrario.

No es difícil demostrar (hágase como ejercicio) que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son dos autovalores distintos del Problema de Sturm-Liouville, y φ_1 y φ_2 son autofunciones asociadas a λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces

$$\int_\alpha^\beta \varphi_1(s)\varphi_2(s)\, ds = 0. \tag{7.49}$$

Como consecuencia de la Proposición 7.8, es evidente que bajo las condiciones (7.39) y (7.40), el conjunto de autofunciones asociadas a un autovalor cualquiera del Problema de Sturm-Liouville es un subespacio vectorial de $C^2(I)$ de dimensión 1 (esta propiedad se expresan diciendo que los autovalores del Problema de Sturm-Liouville son simples). Teniendo en cuenta (7.49), que expresa la ortogonalidad de las autofunciones asociadas a autovalores distintos del Problema de Sturm-Liouville, para cada autovalor λ se toma como autofunción asociada la normalizada, es decir, aquella autofunción φ_λ (única) asociada a λ que satisface

$$\int_\alpha^\beta \varphi_\lambda^2(s)\, ds = 1. \tag{7.50}$$

Con esta elección, si denotamos Λ al conjunto de los autovalores del Problema de Sturm-Liouville, podemos afirmar que el conjunto $\{\varphi_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ es un sistema ortonormal de $C(I)$ dotado del producto escalar $(\varphi, \psi)_2 = \int_\alpha^\beta \varphi(s)\psi(s)\, ds$.

El Problema de Sturm-Liouville es estudiado con más detalle en la asignatura Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional. Aquí nos vamos a limitar a comprobar que dicho Problema está relacionado con la Teoría de Ecuaciones Integrales. En concreto, supongamos que $\lambda = 0$ no es autovalor del Problema de Sturm-Liouville, es decir que se satisface la hipótesis (7.41). En tal caso, si consideramos el núcleo de Green $g(x,s)$ construido en el Teorema 7.11, es inmediato comprobar que dado $\lambda \in \mathbb{R}$, una función φ es solución de (SL) si y sólo si es solución de la ecuación integral

$$\begin{cases} \varphi \in C(I), \\ \varphi(x) = \lambda \displaystyle\int_\alpha^\beta g(x,s)\varphi(s)\,ds, \quad \text{para todo } x \in I. \end{cases} \tag{7.51}$$

A la ecuación (7.51) se la denomina ecuación integral de Fredholm con núcleo $g(x,s)$.

Referencias

[1] H. Amann: *Ordinary Differential Equations: an introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, New York, 1990.

[2] M. de Guzmán: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control*, Ed. Alhambra, Madrid, 1975.

[3] S. Novo, R. Obaya & J. Rojo: *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, Mac-Graw & Hill, Madrid, 1995.

[4] L. Pontriaguine: *Equations Différentielles Ordinaires*, Ed. Mir, Moscou, 1975.

[5] N. Rouché & J. Mawhin: *Equations Différentielles Ordinaires*, Tomo 1, Masson, Paris, 1973.