TEMA 1. Introducción a las EDOs. Ejemplos, aplicaciones e integración directa.

1. Determinar el valor del parámetro a en la ecuación $y' = y^2 + ae^x y + e^{2x} + e^x$ sabiendo que $y = e^x$ es una solución de la misma.

2. ¿Existe un parámetro $a \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$ sea solución de la EDO $x(x-1)y' + y = ax^2$?

3. Se considera la EDO $y' = 2xy^2 - 2xy$

   a) Determinar las soluciones constantes.

   b) Admitiendo que por cada punto del plano pasa una única solución, determinar las regiones donde las soluciones son crecientes y decrecientes, y los puntos de máximos y mínimos.

4. Se considera el problema de Cauchy $y' = a\,y(K - y)$, $y(0) = y_0$, con $a, K > 0$, que modela el crecimiento de una población (modelo de Verhulst o ley logística).

   a) Determinar las soluciones constantes de la ecuación.

   b) Admitiendo que por cada punto del plano pasa una única solución del problema de Cauchy, determinar el crecimiento de las soluciones según $y_0 > K$ o $y_0 < K$.

   c) Determinar la concavidad de las soluciones (y los puntos de inflexión) según la posición de y_0 respecto a K.

5. Comprobar que la familia uniparamétrica de funciones $y = -\dfrac{1}{2}\log(Ce^{-2x} - \dfrac{2}{3}e^x)$ es solución de la EDO $y' = e^{x+2y} + 1$.

6. Determinar la EDO cuya solución general es $y = \sin x + C\cos x$.

7. *a*) Comprobar que la familia uniparamétrica de funciones $y = Ce^x + \dfrac{1}{C}$ es solución de la EDO $y' = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4e^x}}{2}$

   b) Comprobar que las funciones $y = 2e^{x/2}$, $y = -2e^{x/2}$ son soluciones de la misma EDO.

   c) Comprobar que estas funciones no están incluidas en la familia uniparamétrica del apartado a).

   d) Comprobar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} (y')^2 - yy' + e^x = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

   tiene dos soluciones.

8. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $y' + y\cos x = 0$. (**Sol.:** $y = Ce^{-\operatorname{sen} x}$).

b) $(1+x^2)y' + xy = (1+x^2)^{5/2}$. (**Sol.:** $y = \left(x + \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + C\right)\left(1+x^2\right)^{-1/2}$).

c) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 1 - \frac{x^3y}{1+x^4}$. (**Sol.:** $y = \left(C + \int (1+x^2)^{1/2}(1+x^4)^{1/4}\,dx\right)\left(1+x^2\right)^{-1/2}\left(1+x^4\right)^{-1/4}$).

d) $y' = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$. (**Sol.:** $y^2 - x^2 = Cy^3,\ y=0$).

9. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(2x+2y-4)y' + (4x+4y-2) = 0$. (**Sol.:** $(x+y+1)^3 = Ce^{2x+y}$).

b) $y' + \frac{1}{x}y = x^3y^3$. (**Sol.:** $y = \frac{\pm 1}{x\sqrt{C-x^2}}$, $y=0$).

c) $4xy^2 + (3x^2y-1)y' = 0$. (Realizar el cambio $y = z^\alpha$). (**Sol.:** $\alpha = -2$, $y(x^2y-1)^2 = C$).

d) Idem al anterior con mismo cambio, con α tal que la ecuación resultante sea exacta.

e) $(3x-7y-3)y' = 3y-7x+7$. (**Sol.:** $(y+x-1)^5(y-x+1)^2 = C$).

10. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $y' = a^{t+y}$, $a>0$. (**Sol.:** $a^t + a^{-y} = C$).

b) $y' + t^2y = 1$. (**Sol.:** $y = e^{-t^3/3}\left(C + \int e^{t^3/3}\,dt\right)$).

c) $y' = \frac{3t^2}{t^3+y+1}$. (**Sol.:** $t^3 = Ce^y - (y+2)$).

d) $y'\operatorname{sen} t - y\cos t = -\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$, con $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. (**Sol.:** $y = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$).

11. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(y^4 - 3t^2)y' = -ty$. (**Sol.:** $t = \pm y^2\sqrt{Cy^2+1}$).

b) $t^2y' + 2t^3y = y^2(1+2t^2)$. (**Sol.:** $y = e^{-t^2}\left(C - \int\left(\frac{1+2t^2}{t^2}\right)e^{-t^2}\,dt\right)^{-1}$).

c) $(t+y)(y'+1) = y'$. (**Sol.:** $y = (1-t) \pm \sqrt{C-2t}$).

12. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $y' = \frac{1}{x\operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y}$. (**Sol.:** $x = 4(1-\cos y) + Ce^{-\cos y}$).

b) $(x-2y-1) = (6y-3x-2)y'$. (**Sol.:** $3(x-2y) + 2\ln|x-2y| = 5x + C$, $y = \frac{x}{2}$).

c) $y' + x\operatorname{sen} 2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$. (Realizar el cambio $u = \operatorname{tg} y$). (**Sol.:** $y = \operatorname{arctg}\left(\left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}\right)$).

d) $\int_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha = n\varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi \in C^1$. (**Sol.:** $\varphi(x) = Cx^{(1-n)/n}$).

13. Resolver:

    a) $(x-y+3)+(3x+y-1)y'=0$. (**Sol.:** $y+x-2=C\exp\left(\dfrac{2x+1}{y+x-2}\right)$).

    b) $(1+e^{x/y})+e^{x/y}(1-\frac{x}{y})y'=0$, $y(1)=1$. (**Sol.:** $x+ye^{x/y}=1+e$).

    c) $(x-y^2)+2xyy'=0$. (**Sol.:** $y^2=x\left(C+\ln\dfrac{1}{|x|}\right)$).

14. Resolver:

    a) $(ty+t^2y^3)y'=1$. (**Sol.:** $t=\dfrac{1}{2-y^2+Ce^{-y^2/2}}$).

    b) $y'-y\operatorname{tg}t=\sec t$, $y(0)=0$. (**Sol.:** $y=\dfrac{t}{\cos t}$).

    c) $3t^2-2t-y=(t-2y-3y^2)y'$. (**Sol.:** $t^3+y^3-t^2+y^2-ty=C$).

15. Resolver los problemas con condiciones iniciales:

    a) $y'-2ty=t$, $y(0)=1$. (**Sol.:** $y=\dfrac{1}{2}\left(3e^{t^2}-1\right)$).

    b) $yy'+(1+y^2)\operatorname{sen}t=0$. $y(0)=1$. (**Sol.:** $y=\left(2e^{2(\cos t-1)}-1\right)^{1/2}$).

    c) $(1+t^2)y'+4ty=t$, $y(1)=\dfrac{1}{4}$. (**Sol.:** $y=\dfrac{1}{4}$).

    d) $(1+e^t)yy'=e^t$, $y(0)=1$. (**Sol.:** $y=\left(1+\ln\dfrac{(1+e^t)^2}{4}\right)^{1/2}$).

16. Se considera el problema de Cauchy consistente en encontrar dos funciones y_1,y_2 en $C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ tales que:

$$\begin{cases} m_1y_1''(t)=-k_1y_1(t)+k_2(y_2(t)-y_1(t)) \quad \forall t\geq 0,\\ m_2y_2''(t)=-k_2(y_2(t)-y_1(t)),\\ y_1(0)=y_{10}, \quad y_2(0)=y_{20}, \quad y_1'(0)=y_{10}', \quad y_2'(0)=y_{20}', \end{cases}$$

    con m_i, k_i positivos e y_{i0}, $y_{i0}'\in\mathbb{R}$ dados. Escribir dicho problema como uno equivalente en forma de un (PC) para un sistema de orden 1.

17. Encontrar las curvas planas $y=y(x)$ de clase C^1 tales que:

    a) Todas sus normales pasen por (0,0). (**Sol.:** $x^2+y^2=C$).

    b) El área $S(x)$, limitado por la curva, el eje OX y las rectas $X=0$ y $X=x$ sea $S(x)=a^2\ln\dfrac{y(x)}{a}$ con a constante. (**Sol.:** $y=\dfrac{a^2}{a-x}$).

    c) La pendiente de la tangente en cualquier punto sea n veces la pendiente de la recta que une este punto al origen de coordenadas. (**Sol.:** $y=Cx^n$).

d) El segmento de cualquier tangente a la curva comprendido entre los ejes coordenados se divide por la mitad en el punto de contacto. (**Sol.:** $y = \dfrac{C}{x}$).

e) La distancia del origen a la tangente en cualquier punto de la curva sea igual a la abscisa de dicho punto. (**Sol.:** $y = \pm\sqrt{x(C-x)}$).

18. Hallar las curvas tales que

a) La tangente en cada punto P de la curva corte al eje OX en un punto Q tal que el triángulo OPQ tenga un área constante igual a b^2. (**Sol.:** $x = Cy \pm \dfrac{b^2}{y}$).

b) Pasan por $(0,1)$ y la tangente en cada punto P de la curva corte al eje OX en un punto Q, tal que el punto medio del segmento PQ describe la parábola $y^2 = 2ax$ al variar P. (**Sol.:** $x = \dfrac{-1}{4a}y^2 \ln|y|$).

19. Encontrar las curvas planas que son ortogonales respectivamente a todas las de las familias que se indican:

a) $y = ax^2$, (**Sol.:** $x^2 + 2y^2 = C$).

b) $y^2 + 3x^2 - 2ax = 0$. (**Sol.:** $x^2 = y^2(Cy+1)$).

c) $x^2 - y^2 = a^2$. (**Sol.:** $y = \dfrac{C}{x}$).

d) $y^2 + 2ax = a^2$, $a > 0$. (**Sol.:** $y^2 + 2Cx = C^2$, $C < 0$).

e) $y^2 = 4(x-a)$. (**Sol.:** $y = Ce^{-x/2}$).

20. Un depósito de 5.000 litros contiene 1.000 litros de agua pura. Empezando en $t = 0$ comienza a entrar agua, con un 50 % de polución, a razón de 20 litros por minuto y la mezcla, bien disuelta, sale a razón de 10 litros por minuto. ¿Cuál será el porcentaje de polución en el depósito en el momento en que éste rebosa? ¿Cuándo habrá el 30 % de polución en el depósito?

(**Sol.:** 1. Rebosa en 400 minutos, con 48 % de polución. 2. En 58 minutos aproximadamente.)

21. La semivida de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda una cantidad inicial de aquella en reducirse a la mitad (la desintegración de una sustancia radiactiva está regida por la ecuación $C' = -\lambda C$, $\lambda > 0$).

a) Probar que la semivida no depende de la cantidad inicial considerada y que está dada por

$$T = \frac{\log 2}{\lambda}$$

donde λ es la constante de desintegración.

b) Una sustancia radiactiva mantiene al cabo de 50 horas el 95 por 100 de su masa inicial. Determinar su semivida (así se procede experimentalmente para determinar la semivida o, equivalentemente, la constante de desintegración de una sustancia radiactiva) (**Sol.:** $T = 50\log 2/\log(20/19) \sim 675'67$ horas).

22. La ley de enfriamiento de Newton afirma que el ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del aire que le rodea. Si una habitación se mantiene a temperatura constante de $70°F$ y un objeto que estaba a $350°F$ pasa a $150°F$ en 45 minutos. Calcular el tiempo que se necesita para que el objeto adquiera una temperatura de $80°F$. (**Sol.:** $t = 45\log 28/\log 3'5 \sim 119'695$ minutos).

23. Una bola de naftalina tiene un radio de 3 cm. Al cabo de un mes dicho radio ha disminuido en 1 cm. Sabiendo que la velocidad de evaporación es proporcional a la superficie, calcula el radio en función del tiempo. ¿Cuanto tiempo tardará en desaparecer la naftalina? (**Sol.:** 3 meses)

24. Una pequeña bola de acero es lanzada verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial $v_0 > 0$. Se supone que la gravedad g es constante, y que el aire está quieto y ofrece a la bola una fuerza de fricción proporcional a la velocidad de la misma, con constante de proporcionalidad $k > 0$. Calcular la altura máxima y el tiempo que tarda en alcanzarla. (**Sol.:** $T = \frac{m}{k}\log(1+\frac{kv_0}{gm})$, $h = \frac{mv_0}{k} - \frac{gm^2}{k^2}\log(1+\frac{kv_0}{gm})$)

25. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

    a) $y'' = x(y')^3$. (**Sol.:** $y = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{C} + k$, $y = \text{cte.}$).

    b) $xy'' + x(y')^2 = y'$. (**Sol.:** $y = \ln|x^2 + C_1| + C_2$).

    c) $y'' + yy' = 0$. (**Sol.:** $y = C_1 - \dfrac{2C_1}{e^{C_1(x+C_2)} + 1}$, $y = C_1\tan(C_2 - \frac{C_1}{2}x)$, $y = \frac{2}{x+C}$).

    d) $yy'' = (y')^2 + yy'$. (**Sol.:** $y = C_1 e^{C_2 e^x}$).

26. Resolver la ecuación $xy'' + (x-2)y' - 3y = 0$ sabiendo que $y_1 = x^3$ es solución de dicha ecuación. (**Indicación:** Realizar el cambio $y = y_1 u$). (**Sol.:** $y = C_1 x^3 \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{x^4}\,dx + C_2 x^3$).

27. Pasar a SDO. de primer orden los sistemas:

    a) $y'' + ay' + by = g(t)$, donde g es una función dada.

    b) $\begin{cases} y_1''' + y_2''' - 1 = 0, \\ y_2''' + y_3''' + 1 = 0. \end{cases}$

    c) $\begin{cases} y_1'' + \cos(ty_2) = 0, \\ y_2' + \operatorname{sen}(y_1 y_2'') = 0. \end{cases}$

    d) $\begin{cases} y_1^{(n)} = f_1(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(m-1)}), \\ y_2^{(m)} = f_2(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(m-1)}). \end{cases}$

TEMA 2. Análisis local del problema de Cauchy

1. Demostrar que la sucesión $\{\varphi_n\}$, con $\varphi_n(t) = nte^{-nt^2}$, converge puntualmente a cero pero no converge en $C^0([0,1])$ con la norma del máximo. (**Indicación:** Calcular o estimar $\|\varphi_n\|_\infty$).

2. Usando la sucesión de funciones
$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}], \\ -nt + \dfrac{n}{2}, & \text{si } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}], \\ 0, & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$
demostrar que $C^0([0,1])$ con la norma $\|\varphi\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |\varphi(t)|\, dt$ no es un espacio de Banach. (**Indicación:** Demostrar que φ_n es una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|_1$, pero no converge en $\|\cdot\|_1$).

3. Usando la sucesión
$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [-1, 0], \\ nt, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1, & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$
demostrar que $C^0([-1,1])$ con la norma $\|\varphi\|_2 = \left(\displaystyle\int_{-1}^1 |\varphi(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$ no es un espacio de Banach.

4. Sea $\mathrm{A} = \{f \in C^0([1,4]) : 5-3|t-2| \le f(t) \le 5+\dfrac{1}{2}|t-2|,\ \forall t \in [1,4]\}$. En $(C^0([1,4]), \|\cdot\|_\infty)$, determinar los conjuntos $\overline{\mathrm{A}}$, $\mathring{\mathrm{A}}$, $\partial\mathrm{A}$.

5. Igual que el ejercicio anterior en $C^0([-1,1], \|\cdot\|_\infty)$, para los siguientes conjuntos: M, N, $M \cap N$ y $M \cup N$ siendo:
$$\begin{cases} M = \{f \in C^0([-1,1]) : 1 - t^2 \le f(t) \le 1 + t^2, \quad \forall t \in [-1,1]\} \quad \text{y} \\ N = \{f \in C[-1,1] : t^2 + f(t)^2 \le 1, \quad \forall t \in [-1,1]\}. \end{cases}$$

6. Demuéstrese mediante un contraejemplo que el conjunto
$$K = \{\varphi \in C^0([0,1]) : \|\varphi\|_\infty = 1,\ 0 \le \varphi(t) \le 1 \quad \forall t \in [0,1]\}$$
es un subconjunto de $C^0([0,1])$ que es cerrado y acotado, pero no compacto.

7. Sea $C_b(0,+\infty)$ el espacio vectorial de las funciones $\varphi : (0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ que son continuas y acotadas en $(0,\infty)$ (i.e., existe una constante $M > 0$ tal que $|\varphi(t)| \le M$, $\forall t \in (0,+\infty)$). Consideremos en $C_b(0,+\infty)$ la aplicación $\|\cdot\|_\infty$, definida como
$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in (0,+\infty)} |\varphi(t)|.$$
Probar que $(C_b(0,+\infty), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

8. Se considera la aplicación $T : C([0,1]) \mapsto C([0,1])$, definida por

$$(Tx)(t) = 1 + \int_0^t sx(s)\, ds, \quad \forall\, x \in C([0,1]).$$

Si se toma $x_0(t) = 1$ y $x_{n+1} = Tx_n$, $n \geq 0$, determinar $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

9. Sea $\varphi \in C(I)$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, y sea $t_0 \in I$ tal que

$$\varphi(t) = t^3 + \int_{t_0}^t \varphi^2(s) \ln(s^2+1)\, ds, \quad \forall t \in I.$$

¿Qué problema de Cauchy verifica φ? Justifíquese la respuesta.
(**Sol.:** $y' = 3t^2 + y^2 \ln(t^2+1)$, $y(t_0) = t_0^3$).

10. Demostrar, utilizando la aplicación $T : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$ definida por

$$(T\varphi)(t) = \varphi(t) - \frac{2}{m+M} f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall \varphi \in C^0([0,1]),$$

que, si $f \in C^0([0,1] \times \mathbb{R})$ es continuamente diferenciable respecto de y en todo $[0,1] \times \mathbb{R}$ y además

$$0 < m \leq \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \leq M < +\infty \quad \forall (t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

entonces existe una y sólo una $\varphi \in C^0([0,1])$ que verifica $f(t, \varphi(t)) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$.

11. Sea $T_\lambda : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$ la aplicación definida por $(T_\lambda \varphi)(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+y^2}{1+|\varphi(y)|}\, dy$.
Encontrar un intervalo de valores de λ para los que T_λ sea contractiva. (**Sol.:** $|\lambda| < \dfrac{3}{4}$).

12. Sea $T_\lambda : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$ definida por $(T_\lambda \varphi)(t) = e^t + \lambda \displaystyle\int_0^1 2e^{t+s} \varphi(s)\, ds$.

   a) ¿Para qué valores de λ es T_λ contractiva? ¿Y T_λ^2? (**Sol.:** 1. $|\lambda| < \frac{1}{2e(e-1)}$, 2. $|\lambda|^2 < \frac{1}{2e(e-1)(e^2-1)}$).

   b) Calcular el punto fijo de T_λ. (**Sol.:** $\varphi(t) = Ce^t$, con $C = \frac{1}{1-\lambda(e^2-1)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

13. Sea $f \in C([0,1])$ una función dada. Demostrar que existe una única función $\varphi \in C([0,1])$ tal que

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t \operatorname{sen}^4(\varphi(s))\, ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

14. Sea $T : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$, con $(T\varphi)(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t 2s\varphi(s)\, ds$.

   a) ¿Es T contractiva? ¿Y T^2?

b) Calcular el punto fijo de T (resolviendo directamente el (PC) correspondiente).

15. Sea $K \in C^0([a,b] \times [a,b])$ y consideremos la ecuación integral de Volterra de segunda especie:

$$\varphi \in C^0([a,b]), \quad \varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b],$$

donde $f \in C^0([a,b])$ es dada. Demostrar que esta ecuación tiene una y sólo una solución para cada valor de λ.

(**Indicación:** Fijado λ, demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(T_\lambda)^{n_0}$ es contractiva).

16. Sea $T : C^0([a,b]) \mapsto C^0([a,b])$, definida por $(T\varphi)(t) = \displaystyle\int_a^b \alpha(t)\alpha(s)\varphi(s)\,ds$, con $\alpha \in C^0([a,b])$ dada.

a) Hallar la imagen mediante T del espacio $C^0([a,b])$.

b) ¿Es T continua?

c) ¿Bajo qué condiciones es T contractiva? (**Sol.:** $(b-a)\|\alpha\|_\infty^2 < 1$ es condición suficiente; la óptima es $\|\alpha\|_\infty \int_a^b |\alpha(s)|ds < 1$).

d) Con $[a,b] = [0,1]$ y $\alpha(t) \equiv \frac{1}{2}t$, resolver la ecuación integral: $\varphi(t) = t + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 ts\varphi(s)\,ds.$

17. Sea $f \in C[0,1]$ tal que $f \geq 0$ en el intervalo $[0,1]$. Demuéstrese que existe una y sólo una $\varphi \in C[0,1]$ tal que $\varphi \geq 1$ en $[0,1]$ y además

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t f(s)\,\mathrm{sen}^2\left(\varphi(s)\right)\,ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Indicación: definir una aplicación T adecuada y probar que cierta potencia T^k es contractiva.
Indicación prueba alternativa: Analizar la uniformidad del valor δ con que aplicar el Teorema de Picard al (PC) que verifica el punto fijo de T.

18. (Ejemplo de problema de Cauchy para una EDO con segundo miembro continuo y no lipschitziano, y con infinitas soluciones). Probar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y|^{4/5}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

posee infinitas soluciones en todo intervalo de la forma $[-\delta, \delta]$, con $\delta > 0$.

19. Hallar los dominios maximales de existencia y unicidad de solución para las ecuaciones que siguen, indicando la regularidad de las soluciones:

a) $y' = y^{2/3} + \dfrac{\psi(t)\sqrt{1-t^2}}{t}$, $\psi \in C^5(\mathbb{R})$.

b) $y' = (6-t)^{1/2}(t^2+y^2-9)^{-1/2} + \ln(9-y^2) + \psi(t)$, $\psi \in C^3(\mathbb{R})$.

20. Estudiar los dominios maximales de existencia y unicidad de solución para los siguientes sistemas y ecuaciones diferenciales, indicando la regularidad de las soluciones:

    a) $y_1' = (9 - t^2 - y_1^2 - y_2^2)^{1/2}$, $y_2' = \dfrac{1}{t}$.

    b) $y_1' = |t-1|^3 \ln y_2$, $y_2' = p(t)\dfrac{(2-t-t^2)^{1/2}}{t} + (y_1^2 + y_2^2 - 1)^{2/3}$.

    c) $y_1' = (9-t^2)^{1/2}\ln(1+y_2) + \text{máx}(\operatorname{sen} t, \cos t)$, $y_2' = (4y_1^2 + 9y_2^2 - 36)^{2/3} + |t|^4 f(y_1, y_2)$, con $f \in C^5(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

    d) $y'' = \dfrac{\ln(2-t)}{t+1} + e^{|t|}y + \displaystyle\int_1^t f(s)\,ds$, con $f \in C^2(\mathbb{R})$.

    e) $y''' = \dfrac{3f(t,y')}{y''+1} + 8y^{1/2} + |t|^5$, con $f \in C^5(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

21. Se considera la EDO $y''' = \dfrac{\sqrt{y-t}}{t^3} + \dfrac{\ln y'}{t^3}$. Pasarla a sistema de primer orden equivalente y, para dicho sistema, estudiar los correspondientes dominios maximales de existencia y unicidad.

22. Dada la EDO $y'' = y' + x(y')^2$.

    a) Obtener la solución general.

    b) Expresar la ecuación como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y demostrar que para cada $(x_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$, existe una única solución del (PC) asociado a la EDO y a los datos $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$

23. Se considera el problema de Cauchy

$$(PC) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y' = \dfrac{x^2 - y}{x + y^2 - 1} \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

    a) Determinar los dominios maximales de existencia y unicidad de la EDO.

    b) Obtener la solución general de la EDO. (**Sol.** $yx - x^3/3 + y^3/3 - y = C$)

    c) Calcular explícitamente la primera y segunda derivada en $x = 0$ de la solución del (PC) para $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

TEMA 3. Análisis global del problema de Cauchy

1. Se considera la EDO. $y' = 1 + |(t-y)(t-y-1)| + a\sqrt{3-y} + bt^2|t|$ con $a, b \geq 0$. Se pide:

   a) Dominios maximales de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy.

   b) En el caso $a = b = 0$ obtener las soluciones maximales que pasan por $(0,1)$, $(0, -\frac{1}{2})$ y $(0, -2)$ respectivamente, haciendo una representación gráfica aproximada de las mismas.

2. Se considera el problema de Cauchy

$$(\text{PC}) \begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad \text{con} \quad f(t,y) = \frac{y^2 + 2(y+t+1) + \dfrac{1}{(t-1)^2}}{2(1-t)y - 2t}.$$

   Se pide:

   a) Estudiar los dominios maximales de existencia y unicidad para $y' = f(t,y)$.

   b) Encontrar la solución maximal de (PC) indicando su intervalo de definición.

3. Se considera el problema de Cauchy

$$(\text{PC}) \begin{cases} y_1' = t \max\{y_1, y_2\} + e^{t^2}, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_1(0) = y_2(0) = 1. \end{cases}$$

   ¿Cuál es el intervalo de definición de su solución maximal? Razónese.

4. Demostrar que, para todo $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ el intervalo $I(t_0, y_0)$ de definición de la solución maximal del problema

$$(\text{PC}) \begin{cases} y' = t \operatorname{sen} y + \cos t, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

   es $I(t_0, y_0) = \mathbb{R}$.

5. Encontrar la solución maximal del problema

$$(\text{PC}) \begin{cases} y' = \dfrac{-3t^2 - 4ty}{2y + 2t^2}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

   en $\Omega = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y + 2t^2 \neq 0\}$, determinando su intervalo de definición $I(0,1)$.

6. Sean $\Omega = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $f \in C(\Omega) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(y; \Omega)$ tal que $0 \leq f(t,y) \leq M$ en Ω. Dado $(t_0, y_0) \in \Omega$, se considera el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

a) Determinar las formas posibles de la semitrayectoria izquierda de la solución maximal de dicho problema.

b) ¿Puede ser $\sup\{I(t_0, y_0)\} < +\infty$? Razónese.

7. Sea $\Omega = (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^N$, con $\delta > 0$ fijado, y sean $f_i \in C\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{Lip}\,(y, \Omega)$, $i = 1, 2$, dos funciones dadas tales que existe $\varepsilon > 0$ satisfaciendo

$$|f_2(t, y) - f_1(t, y)| \leq \varepsilon, \quad \forall (t, y) \in \Omega.$$

Sea $L_2 > 0$ una constante de Lipschitz respecto de y en Ω para f_2. Para $y_0 \in \mathbb{R}^N$ fijado, denotemos por φ_i, $i = 1, 2$, a la solución maximal del Problema de Cauchy

$$(PC)_i \begin{cases} y' = f_i(t, y) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Demuéstrese que entonces

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \leq \varepsilon\, \delta\, e^{L_2 \delta}, \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

8. Se considera el problema de Cauchy: $\begin{cases} y' = 1 + e^{-ty^2}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$ ¿Puede ser $\sup I(1, 0) < +\infty$? Razónese la respuesta.

9. En $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos\left(y^2 \ln t\right), \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Determínese, razonadamente, el intervalo de definición de la solución maximal.

10. En $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t > 0,\ y > 0\}$, se considera el problema

$$\text{(PC)} \begin{cases} y' = \cos^2(\ln y) + \mathrm{sen}^{\,2}(ty) + 1, \\ y(3) = 2. \end{cases}$$

Denotemos por (α, β) el intervalo de definición de la solución maximal de dicho (PC). ¿Es $\beta = +\infty$? ¿Es $\alpha = 0$? Razónese.

11. Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{t} y + y^3, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

a) Probar que la función $f(t, y) = \frac{1}{t} y + y^3$ no es globalmente lipschitziana en la banda $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$.

b) Probar que el anterior problema de Cauchy posee una única solución maximal y calcularla (función e intervalo de definición).

12. Dado el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (y-t)(y-t-2)+1, \\ y(0) = 1/2. \end{cases}$$

a) Probar que el dominio maximal de existencia y unicidad es $\mathbb{R}^2$.

b) Probar que $y = t$ y $y = t+2$ son soluciones de (PC).

c) Probar que la solución maximal está definida en todo $\mathbb{R}$.

13. Dado $(t_0, y_0) \in \Omega = (0,2) \times \mathbb{R}$, se considera el problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{t-2}\cos(y^2 \log t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Probar que posee una única solución maximal y determinar el intervalo $I(t_0, y_0)$ donde está definida.

14. Se considera la EDO.

$$y' = \frac{1}{t}\,\mathrm{sen}^2\left(1 + \frac{1}{y}\right) \tag{1}$$

a) Determinar los dominios maximales de existencia y unicidad.

b) Demostrar que $\sup I(1,1) = +\infty$.

c) Razonar qué posibles formas puede tener la semitrayectoria izquierda, τ_φ^-, del problema anterior.

15. Se considera la función

$$f(t,y) = \cos^2(\log|y-2|) + \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{t}{y-1}\right)}.$$

a) Hállense, razonadamente, los dominios maximales de existencia y unicidad de la EDO $y' = f(t,y)$.

b) Consideremos el problema de Cauchy (PC) $\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$ y denotemos (α, β) al intervalo de definición de la solución maximal. ¿Es $\alpha = -\infty$? ¿Es $\beta = +\infty$? Razónese.

16. Se considera la EDO.

$$y'' = \frac{1}{1 + 2\log y'}.$$

a) Encontrar los dominios maximales de existencia y unicidad.

b) Se denota por (α, β) el intervalo de definición de la solución maximal de la anterior ecuación con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Hállese β razonadamente.

17. Se considera la EDO
$$y' = \frac{2t + y^2}{2 - 2ty}.$$

a) Determinar los dominios maximales de existencia y unicidad para dicha EDO.

b) Hallar la solución maximal de problema de Cauchy correspondiente al dato inicial $(0, 0)$, así como su intervalo de definición (es decir, hallar $\varphi(t; 0, 0)$ e $I(0, 0)$).

18. Se considera la EDO:
$$y' = \frac{y}{t} + \operatorname{sen} y$$
en $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Demuéstrese que $I(t_0, y_0) = (0, +\infty)$ para todo $(t_0, y_0) \in \Omega$.

19. Se considera $((\alpha, \beta), \varphi)$ la solución maximal del problema de Cauchy
$$\begin{cases} y' = -(e^t + y)y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

a) Calcular las soluciones constantes de la ecuación diferencial.

b) Probar que $\beta = +\infty$.

c) Probar que $\alpha > -\infty$ (Indicación: Encontrar un PC minorante de la semitrayectoria izquierda que explote en tiempo finito).

20. Se considera la EDO de segundo orden del péndulo $L\,\theta''(t) + g\,sen(\theta) = 0$ con $L > 0$ la longitud del péndulo y $g > 0$ la aceleración de la gravedad. Obtener los dominios maximales de existencia y unicidad y probar que todo (P.C) asociado tiene la solución maximal definida en todo $\mathbb{R}$.

21. Dado el SDO de Lotka-Volterra (presa-depredador)
$$\begin{cases} p'(t) = a\,p(t) - b\,p(t)\,q(t) \\ q'(t) = -c\,q(t) + d\,p(t)\,q(t), \end{cases}$$
con $a, c, b, c > 0$, probar que existe una única solución maximal asociada al dato de Cauchy $p(0) = p_0, q(0) = q_0$ con $p_0 \geq 0$ y $q_0 \geq 0$. Usando las soluciones semitriviales $(0, Ke^{-ct})$ y $(Ke^{at}, 0)$ con $K \geq 0$, probar que si $p_0 > 0$ y $q_0 > 0$ entonces $p(t) > 0$ y $q(t) > 0$ para todo $t \in I(0; p_0, q_0)$. Además, acotando superiormente $p(t)$ y $q(t)$ con determinadas exponenciales, deducir que $I(0; p_0, q_0) = \mathbb{R}$.

TEMA 4. Ecuaciones y sistema lineales

1. Dado el SDO $y' = \begin{pmatrix} -1+\cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. Encontrar una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado así como la solución del SDO que pasa por $(\pi; 1, 0)$.

2. Dado el SDO $y' = \begin{pmatrix} -2t+1 & 0 \\ 0 & -2t+1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado y la solución del SDO que pasa por (0;1,0).

3. Sea $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ solución del SDO $y' = Ay$, con $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Demuéstrese que $t\varphi(t)$ es solución de $y' = Ay + \varphi(t)$ y aplíquese este resultado a resolver
$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

4. Sean $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ y $b \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$. Se considera el SDO $y' = \frac{1}{t}Ay + b(t)$ con $t \in \mathbb{R}_+$.
   a) Encontrar una matriz fundamental para el SDO homogéneo asociado.
   b) Calcular la solución general del SDO así como la que pasa por (1;1,1) cuando
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

5. Calcúlense las soluciones de los SDO que se indican, así como las que pasan por los puntos dados.
   (a) $y' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y; \quad (0; 1, 0, 1).$ (b) $y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} y.$
   (c) $y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} y; \quad (0; 2, 1, 1).$ (d) $y' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} y; \quad (0; 0, 0, 1).$
   (e) $y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} y.$ (f) $y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y; \quad (0; 0, 0, 1/2, 1).$

6. Hállese una matriz fundamental del SDO
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

7. Calcúlense las soluciones generales de los sistemas $y' = Ay + b(t)$, así como las soluciones particulares que pasan por (t_0, y_0), con:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad (t_0, y_0) = (0; 1, 0, 1).$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3t}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (t_0, y_0) = (0; 1, 2, 3).$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t_0, y_0) = (0; 1, 0, 1).$

d) $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 13 & -12 & 9 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t_0, y_0) = (0; 1, 1, 0).$

e) $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t_0, y_0) = (0; 1, 0, 0).$

8. Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

   a) $y'' + 5y' + 6y = 5 \operatorname{sen} t$. **Sol.:** $y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t) + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$.

   b) $ay''' + y'' + 9ay' + 9y = \frac{37}{2} e^{-t/a} + 6 - 12 \operatorname{sen}^2 \frac{3t}{2}$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   Sol.: $\frac{1}{1+9a^2}\left(\frac{37}{2} at\, e^{-t/a} + t\cos 3t - 3at \operatorname{sen} 3t\right) + C_1 e^{-t/a} + C_2 \cos 3t + C_3 \operatorname{sen} 3t$.

   c) $y'' - 2y' + 5y = 1 + e^t \cos 2t$. **Sol.:** $y = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} t\, e^t \operatorname{sen} 2t + e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t)$.

   d) $y''' = t + \cos t$. **Sol.:** $y = \frac{t^4}{24} - \operatorname{sen} t + C_1 t^2 + C_2 t + C_3$.

   e) $y'' - 8y' + 16y = (1-t)e^{4t}$. **Sol.:** $y = e^{4t}\left(\frac{1}{6} t^2 (3-t) + C_1 + C_2 t\right)$.

   f) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t+1}$. **Sol.:** $y = e^{-t}((t+1)\ln|t+1| + C_1 + C_2 t)$.

   g) $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$. **Sol.:** $y = \cos t \ln|\cos t| + t \operatorname{sen} t + C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$.

9. Resolver los problemas de valores iniciales siguientes:

   a) $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

   b) $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

   c) $y'' + 4y = 4t, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 4.$

10. Hállense las soluciones de:

    a) $t^2 y'' + \frac{5}{2} t y' - y = 0.$

b) $t^2y'' + ty' + y = 0$.

c) $t^2y'' + 3ty' - 3y = 5t^2$.

d) $t^2y'' + 5ty' + 3y = 8t\ln t$.

11. Hállense EDOs cuyas soluciones generales vienen dadas por:

a) $y = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{-t}$.

b) $y = e^{-t}\,(C_1\cos t + C_2 \operatorname{sen} t)$.

c) $y = C_1e^{C_2t}$.

12. Dado el SDO. $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$, se pide analizar la existencia y/o unicidad de solución de los problemas de contorno en $[0,1]$ siguientes:

(a) $By(0) + Cy(1) = 0$, (b) $By(0) + Cy(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \dfrac{1}{e}I_3$. Hallar los valores de a para los que el problema correspondiente posee solución única. Para $a = 3$, obtener las soluciones, si existen, de ambos problemas.

13. Dada $b \in C(\mathbb{R})$, determínense los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que existe solución de

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = b(x), \quad x \in [0,a], \\ y'(0) - y(0) = y'(a) - ey(0) = 0. \end{cases}$$

Calcúlese la solución para $b(x) = 4x - 2$ y $a = 1$.

14. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide estudiar los problemas de contorno

$$\begin{cases} y' = Ay, \\ By(0) + Cy(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = Ay + b(x), \\ By(0) + Cy(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = Ay + b(x), \\ By(0) + Cy(1) = h, \end{cases}$$

y obtener sus soluciones cuando existan.

15. Dado el SDO: (1) $y' = \begin{pmatrix} t+1 & 2(t-1) \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener una m.f. para el SDO homogéneo asociado.

b) Calcular la solución general del SDO no homogéneo.

c) Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema de contorno relativo a (1) y a la condición

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} y(-2) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(0) = 0,$$

posee solución única.

d) Calcular la o las soluciones, si existen, para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

16. Dado el SDO: (1) $y' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$, se pide:

    a) Determinar su solución general, así como la que pasa por $(0; 0, 1, 1)$.

    b) Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que posee solución el problema de contorno asociado a (1) y a la condición $\begin{pmatrix} \alpha & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    En particular, si es posible, resolver el problema para $\alpha = 0$.

17. Inicialmente el tanque I contiene 100 litros de agua salada a una concentración de 1 kg por litro; el tanque II tiene 100 litros de agua pura. El líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 1 litro por minuto, y del tanque II al I a una velocidad de 2 litros por minuto. Los tanques se agitan constantemente. ¿Cuál es la concentración en el tanque I después de 10 minutos?

18. En el interior de La Tierra, la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviese la Tierra pasando por el centro, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?.

19. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} y \in C^3[0, \pi/2], \\ y''' + y' = b(x) \text{ en } [0, \pi/2], \\ y(0) + y'(\pi/2) = y'(0) + y''(0) = y''(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

    Demuéstrese que dicho problema posee una y sólo una solución φ_b para cada $b \in C([0, \pi/2])$.

20. Dado el problema de contorno $\begin{cases} y'' + y = b(x) \text{ en } [0, \pi], \\ y(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$

    a) Demostrar que posee una y sólo una solución para cada $b \in C([0, \pi])$.

    b) Expresar la solución del problema en función de b.

21. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' - y = b(x) \text{ en } [0, 1], \\ y'(0) = 0, \\ y(1) + y'(1) = 0. \end{cases}$$

    a) Demostrar que, para cada $b \in C([0, 1])$, dicho problema posee una única solución.

    b) Expresar la solución del problema en función de b.

22. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + y = 1 \quad \text{en } [0, 2\pi], \\ y(0) + y'(0) = 0, \\ y(2\pi) + \alpha y'(2\pi) = 0, \end{cases}$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro.

a) Hallar la solución general de la EDO $y'' + y = 1$.

b) Encontrar los valores de α para los que el problema de contorno posee una única solución.

c) Resolver el problema anterior en el caso $\alpha = 1$.