Índice general

Tema 1

Continuidad y derivabilidad de funciones. Representación gráfica

1.1 Una introducción histórica al Cálculo

Los orígenes del Cálculo se remontan al siglo III a. C., cuando los griegos intentaban resolver el problema del cálculo de áreas usando el **método exhaustivo** (inventado por Eudoxio), en el que se aproxima el área de la región que se desea conocer mediante áreas de regiones poligonales inscritas en ella cada vez más precisas. Con este método, Arquímedes (287-212 a.C.) determinó la fórmula exacta del área del círculo y de otras figuras y proporcionó una aproximación muy precisa del número π.

La sustitución de los números romanos por los caracteres arábigos, la aparición de los signos $+$ y $-$, el importante desarrollo de las notaciones matemáticas (a partir del siglo XVI d. C.), la introducción de la notación decimal y los resultados sobre soluciones algebraicas de las ecuaciones cúbica y cuártica estimularon el desarrollo de las Matemáticas. En particular, la introducción de los símbolos algebraicos permitió retomar el interés por el método exhaustivo dando lugar a lo que hoy se conoce como **cálculo integral**.

Sin embargo, el mayor impulso de esta rama de las Matemáticas se dio en el siglo XVII gracias a Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), y continuó su desarrollo hasta que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y Bernhard Riemann (1826-1866) le dieron una formalización matemática firme.

Los aspectos fundamentales (o piedras angulares) que sustentan el Cálculo son el concepto de **derivada** y el concepto de **integral**. Ambos se apoyan en una herramienta fundamental que es el concepto **límite** de una función. Observemos que:

- El **límite** permite estudiar la tendencia de una función cuando su variable independiente se aproxima a un cierto valor.
- La **derivada** de una función permite calcular **tasas de variación** de esa función y, en particular, la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva. Veremos que la derivada de una función usa de nuevo el concepto de límite.
- La **integral** se introduce como límite de una suma "especial" y permite calcular áreas, volúmenes, longitudes de curva, etc.

En este tema haremos un repaso de los conceptos de continuidad y derivabilidad de una función. Para ello, necesitaremos previamente repasar algunos conceptos previos.

1.2 Funciones. Gráficas de funciones elementales

Comencemos recordando el concepto de función real de variable real. La definición es la siguiente:

Definición 1.1
Una ***función real de variable real*** *es una correspondencia del tipo*

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que a cada valor real x del subconjunto de números reales D le asocia un ***único*** *número valor real $y = f(x)$:*

$$f : x \in D \longmapsto y = f(x) \in \mathbb{R}.$$

La expresión $y = f(x)$ expresa en términos matemáticos la dependencia de la magnitud y (que a partir de ahora denominaremos ***variable dependiente****) con respecto a la magnitud x (que denominaremos* ***variable independiente****).*

En la definición anterior, el conjunto D es el llamado **dominio de definición** de la función f y viene definido como el conjunto D de números reales para los cuales está definida la función:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe } f(x)\}.$$

Por otro lado, la **imagen** o **rango** o **recorrido** de la función f, $R(f)$, es el conjunto de valores y que toma la función cuando la variable independiente x se mueve el el dominio $D(f)$.

En general, el dominio de una función f no está dado explícitamente. Tendrá que ser obtenido a partir de la expresión de la función f. Comencemos viendo algunos ejemplos:

Ejemplo 1.2

1. La función $f(x) = x^2 + 3$ tiene como dominio $D(f) = \mathbb{R}$. Efectivamente, obsérvese que la exptresión $x^2 + 3$ está bien definida para cualquier valor real x. Por otro lado, su imagen es el intervalo $[3, \infty)$.

2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no está definida cuando el denominador x se anula. Así, deducimos que su dominio es el conjunto de números reales excepto el valor $x = 0$:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \equiv (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

3. Consideremos las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$. Al tratarse de raíces cuadradas, para calcular sus dominios tenemos que seleccionar los valores en los que el radicando de f o g es positivo o nulo. Así,

$$\begin{cases} D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty), \\ D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \geq 0\} = [-2, \infty). \end{cases}$$

En ambos casos solo consideramos el valor positivo de la raíz. Por tanto, las imágenes de f y g vienen dadas por

$$R(f) = R(g) = [0, \infty).$$

4. La función logaritmo natural o neperiano $f(x) = \log x$ solo está definida cuando x es positivo. Así,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, \infty).$$

También $R(f) = \mathbb{R}$.

5. Calculemos el dominio de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \log\left(\frac{1}{x+2}\right) = -\frac{\log(x+2)}{x^2 - 1}.$$

Por un lado, necesitamos que el denominador $x^2 - 1$ no se anule. Teniendo en cuenta que se anula para los valores $x = 1$ y $x = -1$, deducimos que los valores $\boxed{x = 1}$ y $\boxed{x = -1}$ no están en $D(f)$. Por otro lado, el argumento del logaritmo debe ser positivo, es decir,

$$\frac{1}{x+2} > 0 \iff x + 2 > 0 \iff x > -2.$$

De los dos puntos anteriores deducimos

$$D(f) = (-2, \infty) \setminus \{\pm 1\} \equiv (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

6. Analicemos ahora el dominio de $f(x) = \dfrac{1}{\log(x+2)}$. Como antes, al tratarse de un logaritmo, necesitamos que su argumento sea positivo:

$$x + 2 > 0 \iff x > -2.$$

Por otro lado, tenemos que excluir los puntos que anulan el denominador:

$$\log(x+2) = 0 \iff x + 2 = 1 \iff x = -1.$$

De nuevo, de los puntos anteriores llegamos a la igualdad:

$$D(f) = (-2, \infty) \setminus \{-1\} = (-2, -1) \cup (-1, \infty).$$

7. Por último, analicemos el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. En primer lugar, el denominador del radicando no se puede anular. Por tanto, $1 + x \neq 0$, es decir, $\boxed{x \neq -1}$. Por otro lado, para que la raíz tenga sentido necesitamos que el radicando sea positivo: $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$. Estudiamos el signo de esta expresión teniendo en cuenta las raíces del numerador y del denominador: $x = 1$ y $x = -1$. Así,

$$\begin{cases} \boxed{(-\infty, -1)}: & 1 - x > 0, \quad 1 + x < 0 \Longrightarrow \dfrac{1-x}{1+x} < 0; \\ \boxed{(-1, 1)}: & 1 - x > 0, \quad 1 + x > 0 \Longrightarrow \dfrac{1-x}{1+x} > 0; \\ \boxed{(1, \infty)}: & 1 - x < 0, \quad 1 + x > 0 \Longrightarrow \dfrac{1-x}{1+x} < 0. \end{cases}$$

Si tenemos en cuenta los signos de la anterior tabla y el hecho de que el radicando de f se anula en $x = 1$, de deducimos que el dominio está dado por: $\boxed{D(f) = (-1, 1]}$.

Existen varias formas de representar una función: mediante su fórmula matemática, mediante una tabla de valores, ... Una de las más frecuentes es mediante su **gráfica**, ya que este medio permite hacerse una idea del comportamiento de la función con un sólo golpe de vista.

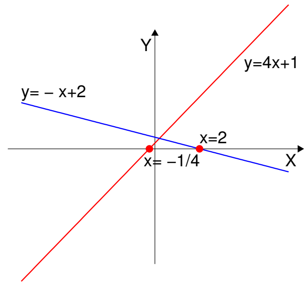
Conocer la gráfica (el comportamiento cualitativo) de las funciones matemáticas elementales ayuda mucho en el análisis y la comprensión de otras funciones más complejas (construidas normalmente a partir de aquéllas) y de los fenómenos representables mediante funciones. Se recuerdan a continuación las principales de ellas.

GRÁFICAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

La gráfica de una función **lineal** $y = mx + b$ es una línea **recta** (m y b son datos). Su dominio es toda la recta real $\mathbb{R}$. m es la **pendiente** de la recta.

$$\begin{cases} \text{Si } m > 0, \text{ la recta es } \textbf{creciente}. \\ \text{Si } m < 0 \text{ la recta es } \textbf{decreciente}. \end{cases}$$

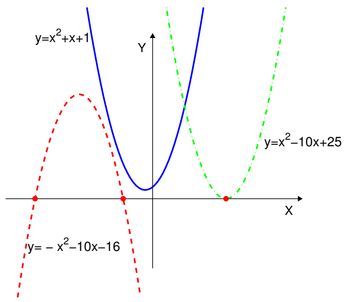
La recta corta al eje OY en $y = b$ y, si $m \neq 0$, corta al eje OX en el punto $x = -\dfrac{b}{m}$.



La gráfica de una función **cuadrática**, $y = ax^2 + bx + c$, es una **parábola** (a, b y c son datos). Su dominio es todo $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \text{Si } a > 0 \text{ la parábola es } \textbf{convexa} \\ \text{Si } a < 0 \text{ la parábola es } \textbf{cóncava} \end{cases}$$

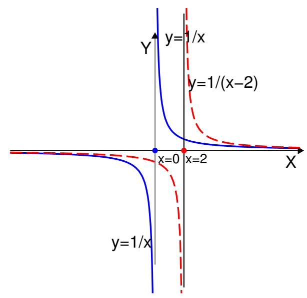
Los puntos de corte con el eje OX son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, si existen. El punto de corte con el eje OY es $(0, c)$.
El eje de la parábola es la recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$; vértice es el punto de intersección de la parábola y su eje.
Las parábolas $y = ax^2 + bx + c$ tienen una rama creciente y otra decreciente.



La gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x}$ es una **hipérbola**.
Su **dominio** es toda la recta real exceptuando el origen:

$$\textbf{Dominio}: \boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)}.$$

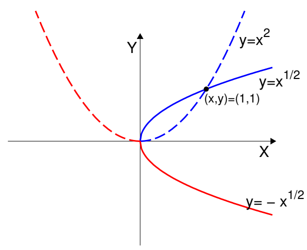
Los límites laterales en $x = 0$ son $-\infty$ (por la izquierda) y $+\infty$ (por la derecha).
Es **decreciente** y no tiene puntos de corte con el eje OX.
Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 0$.
La gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x - a}$ es la misma hipérbola "desplazada" a $x = a$.



La función $y = \sqrt{x}$ es la inversa de $y = x^2$.
Su dominio es la semi-recta real positiva incluyendo el punto 0:

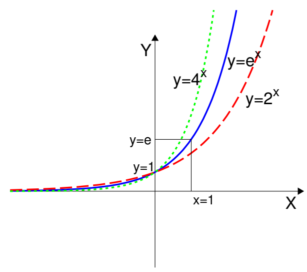
$$\textbf{Dominio}: \boxed{[0, \infty)}.$$

Es una función **creciente**.
Siempre se toma el valor $+$ de la raíz. Así, $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

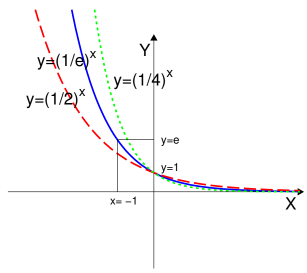


GRÁFICAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

Función **exponencial** con base $\boxed{a > 1}$: $\boxed{y = a^x}$.
Cuando se menciona la función exponencial sin referencia a su base, se refiere siempre a la función de base el número e.
Su dominio es $\mathbb{R}$.
Es una función **positiva** y **creciente**.



Función **exponencial** con base $\boxed{a \in (0, 1)}$: $\boxed{y = a^x}$.
Su dominio es $\mathbb{R}$.
Es una función **positiva** y **decreciente**.

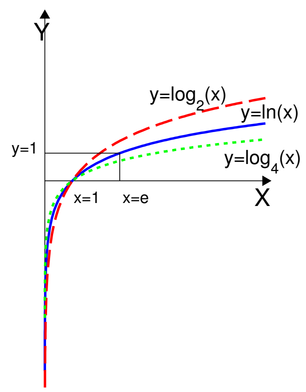


Función **logaritmo** de base $a > 1$, $\boxed{y = \log_a(x)}$: Es la inversa de la función exponencial con la misma base.

$$\boxed{y = \log_a(x)} \Longleftrightarrow \boxed{a^y = x}.$$

El **logaritmo neperiano**, con base el número e, se suele denotar $\log(x)$, aunque también se detona muchas veces por $\ln(x)$.
Su dominio es $\boxed{\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\} = (0, \infty)}$.
Para $a > 1$ es una función **creciente** con una única **raíz**: $\boxed{x = 1}$. Además, podemos escribir:

$$\boxed{\log_a(x) < 0} \text{ si } x \in (0, 1); \quad \boxed{\log_a(x) > 0} \text{ si } x \in (1, \infty).$$

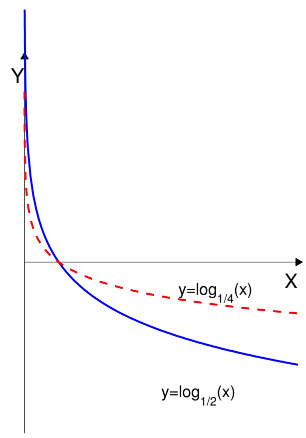


Función **logaritmo** de base $0 < a < 1$, $\boxed{y = \log_a(x)}$: Es la inversa de la función exponencial con la misma base:

$$\boxed{y = \log_a(x)} \Longleftrightarrow \boxed{a^y = x}.$$

Su dominio es $\boxed{\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\} = (0, \infty)}$.
Para $0 < a < 1$ es una función **decreciente** con una única **raíz**: $\boxed{x = 1}$. Además, podemos escribir:

$$\boxed{\log_a(x) > 0} \text{ si } x \in (0, 1); \quad \boxed{\log_a(x) < 0} \text{ si } x \in (1, \infty).$$

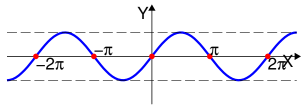


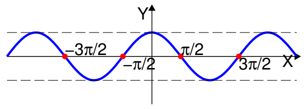
GRÁFICAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

Funciones **seno** y **coseno**:
$\boxed{y = \operatorname{sen}(x)}$ (arriba) y $\boxed{y = \cos(x)}$ (abajo).
Ambas funciones son periódicas de periodo 2π, es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x) \\ \\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \end{array} \right. \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Su dominio es todo $\mathbb{R}$.
¡El ángulo x se mide en radianes!

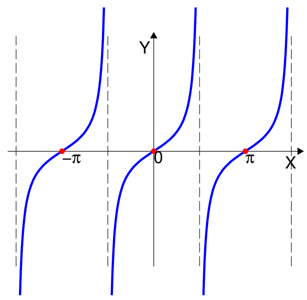




Función **tangente**: $\boxed{y = \tan(x)}$. Es una función periódica de periodo π, es decir,

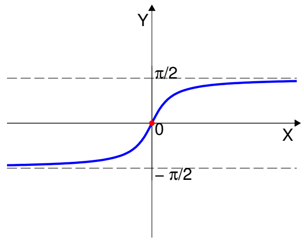
$$\tan(x + \pi) = \tan(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tiene una discontinuidad en cada múltiplo impar de $\pi/2$.
¡El ángulo x se mide en radianes!



La función **arcotangente** $y = \arctan(x)$ es la inversa de la tangente: $\boxed{y = \arctan(x)} \iff \boxed{x = \tan(y)}$.
Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$ y es creciente.
Es una función acotada:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



1.3 Límite de una función. Continuidad

Recordemos que el valor absoluto de un número real $x \in \mathbb{R}$ se representa por $|x|$ y está definido por:

$$|x| = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{array} \right.$$

De la propia definición es posible demostrar las siguientes propiedades:

Propiedades:

1. $|x| \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Además, $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $|\lambda x| = |\lambda||x|$ para cualesquiera números reales λ y x.
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ (**desigualdad triangular**).

4. Dado $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{cases} |x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \\ |x| \geq \varepsilon \iff x \geq \varepsilon \text{ o } x \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

Del mismo modo es posible definir el valor absoluto de una función f:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

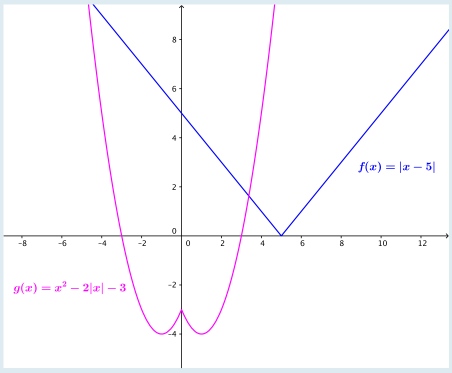
Ejemplo 1.3

- Obsérvese que $|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{si } x-5 \geq 0, \\ -(x-5) & \text{si } x-5 < 0. \end{cases}$, es decir,

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{si } x \geq 5, \\ -(x-5) & \text{si } x < 5. \end{cases}$$

- Del mismo modo, la función $x^2 - 2|x| - 3$ puede ser reescrita como

$$x^2 - 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 0, \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



1.3.1 Límites

Pasemos a continuación a recordar el concepto de límite de una función. Para ello, consideremos un número real $a \in \mathbb{R}$ y supongamos que f es una función definida en un entorno del punto a, salvo posiblemente en a, es decir, existe $\delta_0 > 0$ tal que f está definida en $(a - \delta_0, a + \delta_0) \setminus \{a\}$:

$$f : x \in (a - \delta_0, a + \delta_0) \setminus \{a\} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}.$$

En estas condiciones recordemos que, si L es un número real, la notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se lee "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L", y quiere decir que si x es un número arbitrariamente próximo a a, entonces la imagen de x a través de la función f está arbitrariamente próximo a L.

De manera formal:

Definición 1.4

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno de un punto a (salvo posiblemente en el punto a). Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $L \in \mathbb{R}$, y lo escribiremos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si se tiene que para cada distancia $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente pequeña), existe una distancia $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| \leq \delta$ (x está próximo al punto a), entonces,

$$|f(x) - L| \leq \varepsilon,$$

es decir, $f(x)$ está cerca del valor L.

Obsérvese que, en el concepto anterior, el punto x se acerca arbitrariamente al punto a. Evidentemente, x se puede acercar a a por su derecha ($x > a$) o por su izquierda ($x < a$). Si fijamos la posición de x, obtenemos los conceptos de límite lateral:

Definición 1.5
Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es $L \in \mathbb{R}$, y lo escribiremos como

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si se tiene que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x - a \leq \delta$, entonces,

$$|f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

De manera análoga se define el concepto $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Ejemplo 1.6
Demostrar la igualdad

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2.$$

Fijemos un valor $\varepsilon > 0$ cualquiera (ε es el dato). Nuestro **objetivo** es calcular $\delta > 0$ (δ es la incógnita) tal que si $0 < |x - 1| \leq \delta$, se tenga $\left|(x^2 + 1) - 2\right| = \left|x^2 - 1\right| \leq \varepsilon$. Razonamos del siguiente modo: En primer lugar, x está cerca de 1, por tanto, podemos suponer que $x \in (1/2, 3/2)$. Así,

$$\left|(x^2 + 1) - 2\right| = \left|x^2 - 1\right| = |(x - 1)(x + 1)| = (x + 1)\,|x - 1| \leq \left(\frac{3}{2} + 1\right)|x - 1| \leq \frac{5}{2}\delta.$$

De la cadena de desigualdades anteriores deducimos que si exigimos que si $\frac{5}{2}\delta = \varepsilon$, es decir, $\delta = \frac{2}{5}\varepsilon$, entonces, si $0 < |x - 1| \leq \delta = \frac{2}{5}\varepsilon$, se tiene,

$$\left|(x^2 + 1) - 2\right| = \left|x^2 - 1\right| = |(x - 1)(x + 1)| \leq \cdots \leq \frac{5}{2}\delta = \varepsilon.$$

Esto termina la prueba.

Siguiendo las mismas ideas expuestas más arriba es posible definir los conceptos de límites infinitos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \in \mathbb{R}.$$

En el apéndice que aparece al final de este tema se pueden consultar definiciones, ejemplos, ejercicios, ..., relativos a cálculo de límites.

1.3.2 Continuidad

En el lenguaje cotidiano, un proceso es continuo si tiene lugar de forma gradual, sin interrupción o cambio abrupto. Con esta idea, se define el concepto de continuidad en un punto a del siguiente modo:

Definición 1.7
Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un entorno de un punto $a \in D$. Se dice que f es ***continua*** *en el punto a si satisface:*

1. *La función f está definida en a, es decir, existe $f(a)$,*

2. *Existe el límite* $\lim_{x\to a} f(x)$, *es decir, existen los límites laterales* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *y*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x),$$

3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Se dice que f es ***continua en un intervalo abierto*** (a,b) *si lo es en todos los puntos del intervalo. Por otro lado, f es* ***continua en un intervalo cerrado*** $[a,b]$ *si lo es en el intervalo abierto* (a,b) *y, además, existen los límites laterales* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ *y* $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Por último, se dice que f es ***discontinua*** *en el punto a si f no es continua en a.*

Teorema 1.8 (Álgebra de funciones continuas)
Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real y $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un entorno de un punto $a \in D$ y continuas en a. Entonces,

1. *Las funciones λf, $f+g$, $f-g$ y fg son continuas en a.*
2. *Si además $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.*

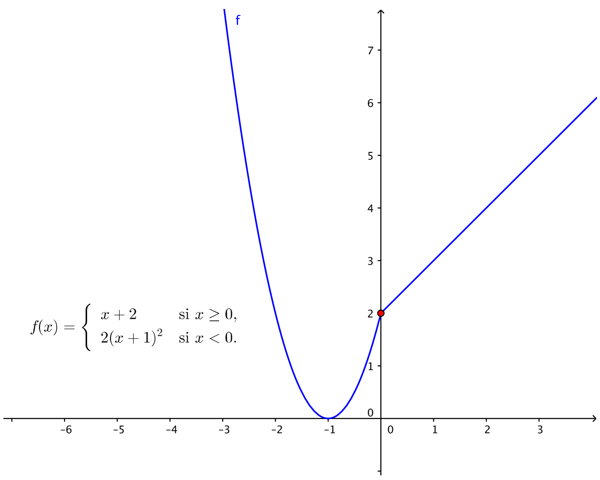


Figura 1.1: Ejemplo 1.9

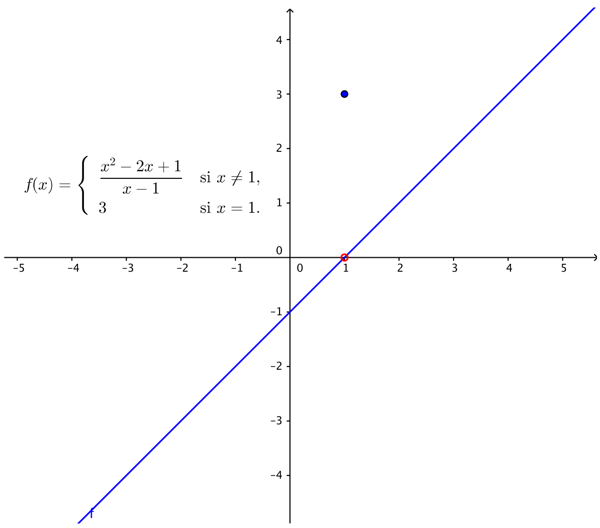


Figura 1.2: Ejemplo 1.10

Ejemplo 1.9
Estúdiese la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \textbf{si } x \geq 0, \\ 2(x+1)^2 & \textbf{si } x < 0. \end{cases}$$

En primer lugar, es fácil comprobar que $D(f) = \mathbb{R}$ (en cada zona f viene dada por un polinomio). Nuestro objetivo es estudiar la continuidad de la función f en todo $\mathbb{R}$. Para este fin, vamos a dividir $\mathbb{R}$ en tres zonas: los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, y el punto $x = 0$ (este punto es fundamental pues la expresión de f cambia a su derecha y a su izquierda).

1. $\boxed{(-\infty, 0)}$: En este intervalo la función f viene dada por el polinomio $f(x) = x + 2$. Como conclusión deducimos que f es continua en $(-\infty, 0)$.

2. $\boxed{(0, +\infty)}$: En este intervalo la función f viene dada también por un polinomio: $f(x) = 2(x+1)^2$. Como conclusión, también deducimos que f es continua en $(0, +\infty)$.

3. $\boxed{x = 0}$: Comprobemos las tres condiciones de la Definición 1.7 para $a = 0$. En primer lugar, f está definida en $x = 0$ y $f(0) = 2$. En segundo lugar, veamos qué ocurre con la segunda condición:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2(x+1)^2 = 2; \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+2) = 2. \end{cases}$$

   Podemos concluir que existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ (segunda condición) y es igual a $f(0) = 2$ (tercera condición). Hemos probado así que f es continua en $x = 0$ y, en consecuencia, en $\mathbb{R}$ (véase la Figura 1.1).

Ejemplo 1.10 (Discontinuidad evitable)
Estúdiese la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \textbf{si } x \neq 1, \\ 3 & \textbf{si } x = 1. \end{cases}$$

Comenzamos calculando el dominio de la función. No es difícil comprobar que $D(f) = \mathbb{R}$ pues la función racional

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

está bien definida si $x \neq 1$ y, además, $f(1) = 3$.

Como en el ejemplo anterior, dividimos nuestro estudio de la continuidad en dos zonas: $x \neq 1$ y $x = 1$.

1. $\boxed{x \neq 1}$: En esta zona f es un cociente de dos funciones continuas (polinomios) donde, además, el denominador no se anula. Del Teorema 1.8 deducimos que f es continua si $x \neq 1$.

2. $\boxed{x = 1}$: De nuevo, comprobaremos las tres condiciones de la Definición 1.7 para $a = 1$. (i) Existe $f(1) = 3$; (ii) veamos si existen los límites laterales en $x = 1$. En este caso, tanto a la derecha como a la izquierda del punto la función f tiene la misma expresión. Así, basta estudiar

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = 0,$$

   (para calcular la indeterminación que aparece en el anterior límite, hemos aplicado la regla de L'Hôpital, regla que se verá en la próxima sección). (iii) Evidentemente, el anterior límite no coincide con $f(1) = 3$. **Conclusión**: la función f es discontinua en el punto $x = 1$, aunque la discontinuidad se podría evitar sin más que definir $f(1) = 0$ (véase la Figura 1.2).

Ejemplo 1.11 (Discontinuidad de salto infinito)
Estúdiese la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \log(x-1) & \textbf{si } x > 1, \\ 1 & \textbf{si } x \leq 1. \end{cases}$$

En primer lugar, se tiene que $D(f) = \mathbb{R}$ (obsérvese que la función $\log(x-1)$ está bien definida en la zona $x > 1$). Siguiendo el razonamiento de los ejemplos anteriores, dividimos nuestro estudio en tres zonas:

1. $\boxed{x < 1}$: La función f está dada por $f(x) = 1$ (constante). Evidentemente, f es continua en $(-\infty, 1)$.

2. $\boxed{x > 1}$: Aquí la función viene definida como $f(x) = \log(x-1)$. Puesto que el argumento del logaritmo es positivo, deducimos que f es continua en $(1, \infty)$.

3. $\boxed{x = 1}$: Comprobemos las condiciones de la Definición 1.7 para $a = 1$. (i) Existe $f(1) = 1$; (ii) estudiemos los límites laterales de f en el punto $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log(x-1) = -\infty.$$

Conclusión: No existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ y, por tanto, f es discontinua en el punto $x = 1$ (véase la Figura 1.3).

Ejemplo 1.12 (Discontinuidad esencial)
Estúdiese la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textbf{si } x \neq 0, \\ 2 & \textbf{si } x = 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $D(f) = \mathbb{R}$ (la función f está definida en $x = 0$ y $f(0) = 2$. Estudiemos su continuidad:

1. $\boxed{x \neq 0}$: En esta zona f es la composición de dos funciones continuas: la función $\operatorname{sen} x$ y la función $1/x$ (su denominador no se anula en esta zona). **Conclusión:** f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. $\boxed{x = 0}$: El estudio en este caso es algo más delicado. Comprobemos las condiciones de la Definición 1.7. (i) Existe $f(0) = 2$. (ii) Habría que estudiar los límites laterales de f en el punto $x = 0$. Aunque no lo vamos a justificar, en este caso no existen ningunos de los límites laterales

$$\nexists \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right); \quad \nexists \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Conclusión: f es discontinua en $x = 0$ (véase la Figura 1.4).

1.4 Estudio asintótico de funciones: Asíntotas

Con frecuencia interesa conocer el comportamiento de una función en las proximidades de los puntos en los que no está definida, o bien en los extremos de su dominio de definición o cuando $x \to \pm\infty$ si la función está definida en un dominio no acotado. Este estudio se llevará a cabo estudiando las llamadas **asíntotas** de la función.

Recordemos que, en general, hay tres tipos de asíntotas asociadas a una función $f(x)$: verticales, horizontales y oblicuas. Veamos en qué consisten cada una de ellas:

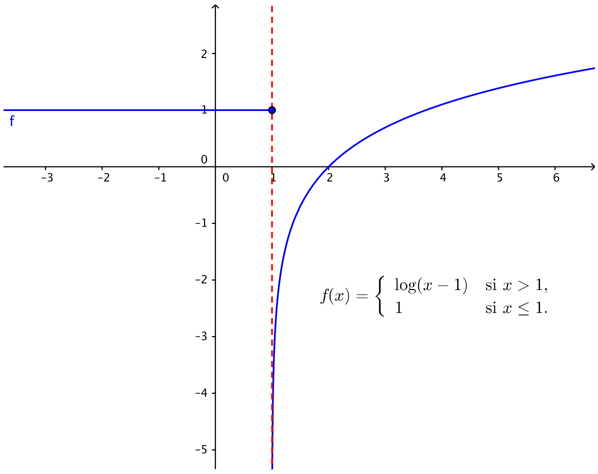


Figura 1.3: Ejemplo 1.11

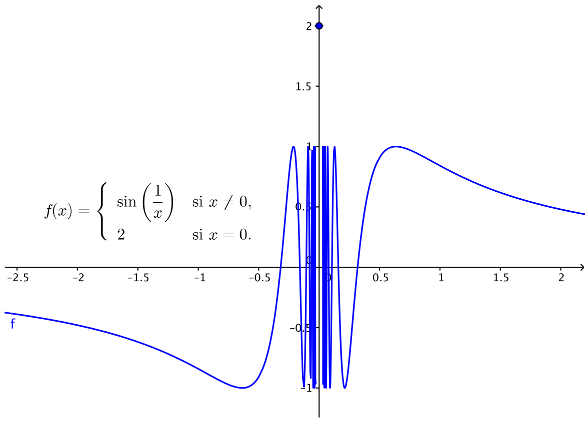


Figura 1.4: Ejemplo 1.12

1.4.1 Asíntotas horizontales

Si, cuando x tiende a $+\infty$, los valores de una función tienden a acercarse a un valor b sin nunca llegar a él, se dice que la función tiene una asíntota horizontal $y = b$ para $x \to +\infty$. Gráficamente, esto significa que la curva $y = f(x)$ se comporta, por la derecha, de forma "parecida" a la recta horizontal $y = b$.

Análogamente, si, cuando x tiende a $-\infty$, los valores de una función tienden a acercarse a un valor b sin nunca llegar a él, se dice que la función tiene una asíntota horizontal $y = b$ para $x \to -\infty$.

Asíntotas horizontales

La recta $y = b$ es una asíntota de la función $y = f(x)$ si se tiene

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

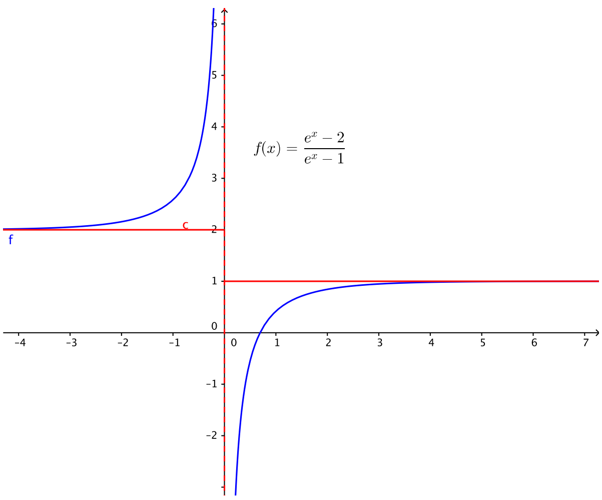


Figura 1.5: Ejemplo 1.13

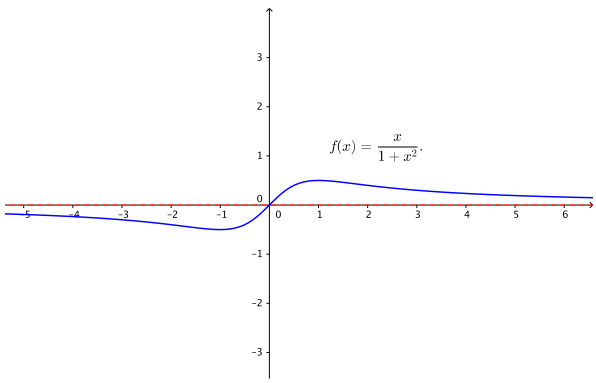


Figura 1.6: Ejemplo 1.14

Es interesante resaltar que una función $f(x)$ puede tener asíntotas horizontales distintas cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. También se tiene que la función puede cortar a su asíntota:

Ejemplo 1.13
Calcular las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}.$$

Se tiene que $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($x = 0$ es la única raíz del denominador). Teniendo en cuenta que la función exponencial tiene un comportamiento distinto cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, separamos nuestro estudio de asíntotas en dos límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indet.)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\,(1 - 2/e^x)}{e^x\,(1 - 1/e^x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 2/e^x}{1 - 1/e^x} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{-2}{-1} = 2 \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que este límite no es indeterminado y puede ser resuelto directamente.

Como conclusión deducimos que f tiene una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$, $\boxed{y = 1}$, y otra cuando $x \to -\infty$, $\boxed{y = 2}$ (véase la Figura 1.5).

Ejemplo 1.14
Calcular las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

En primer lugar, se tiene que $D(f) = \mathbb{R}$ (obsérvese que el denominador no se anula nunca). Por otro lado,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Deducimos que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (hacia $-\infty$ y hacia $+\infty$) de la función f. Además, la curva $y = f(x)$ corta a la asíntota $y = 0$ en el punto $(0, 0)$ (véase la Figura 1.6).

Ejercicio 1.15
Calcular las asíntotas horizontales de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$. (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

1.4.2 Asíntotas verticales

Si, cuando x se "acerca" a un valor a (por su derecha o por su izquierda), los valores de una función f se hacen cada vez más grandes (en valor absoluto; pueden ser positivos o negativos), se dice que la función f tiene una asíntota vertical en $x = a$. Obviamente, para que esto pase, tiene que ocurrir que f no esté definida en $x = a$, pero sí en puntos muy cercanos a a.

Asíntotas verticales
Son de la forma $x = a$ donde $\boxed{a \notin D(f)}$. Existen si se satisface $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. No

pueden cortar a la función f en ningún punto.

Ejemplo 1.16
Calcular las asíntotas verticales de la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Es fácil comprobar que $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (obsérvese que el denominador solo se anula en el punto $x = 1$, valor que hay que excluir del dominio). Por tanto, $x = 1$ es la única candidata a ser asíntota vertical de la función. Comprobémoslo:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

de lo que se deduce que $\boxed{x = 1}$ es una asíntota vertical de la función f (véase la Figura 1.7).

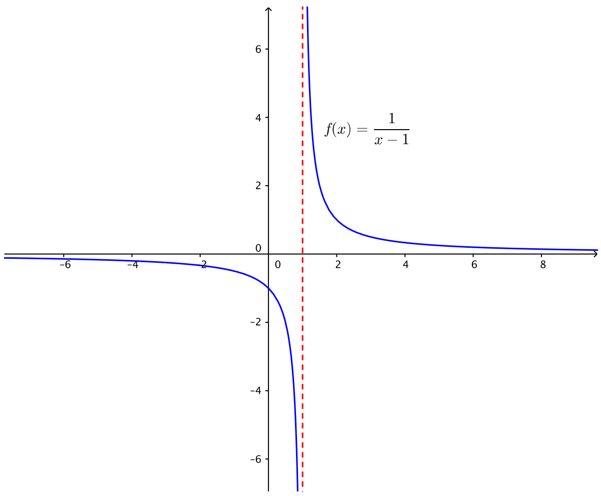


Figura 1.7: Ejemplo 1.16

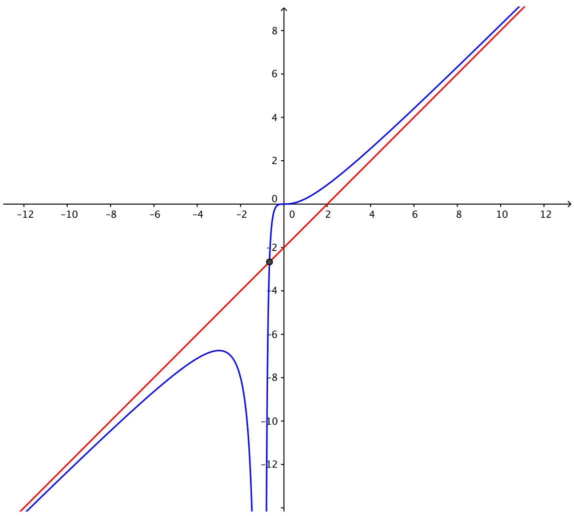


Figura 1.8: Ejemplo 1.17

1.4.3 Asíntotas oblicuas

Si, cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, una función f tiende a "parecerse" a la recta $y = mx + n$ (para algún valor de m y n), se dice que $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de f.

Asíntotas oblicuas
Una recta $y = mx + n$, con $\boxed{m \neq 0}$, es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0, \qquad \text{ó bien} \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Se observa que si se tiene, por ejemplo

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0},$$

entonces también se tiene:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m} \quad \text{y} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=n}$$

Estas igualdades permiten calcular los valores m y n.

> Como se pueden calcular los límites a $+\infty$ o a $-\infty$, pueden existir hasta dos asíntotas oblicuas distintas. Las asíntotas oblicuas pueden cortar a la función en uno o más puntos.
>
> Las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles hacia $-\infty$ y hacia $+\infty$, es decir, si existe asíntota horizontal hacia $+\infty$ no puede existir asíntota oblicua hacia $+\infty$, e igualmente hacia $-\infty$.

Ejemplo 1.17
Calcular las asíntotas oblicuas de la función

$$f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}.$$

Es fácil comprobar que $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (obsérvese que el denominador solo se anula en el punto $x=-1$, valor que hay que excluir del dominio). Calculemos las posibles asíntotas oblicuas $y=mx+n$. El valor m viene dado de la igualdad

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(1+x)^2}=1.$$

Por otro lado,

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{(1+x)^2}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{(1+x)^2}=-2.$$

Deducimos que $y=x-2$ es la asíntota oblicua de f (hacia $+\infty$ y hacia $-\infty$). Además, la función $f(x)$ y la asíntota $y=x-2$ se cortan en el punto $(-\frac{2}{3},-\frac{8}{3})$ (véase la Figura 1.8).

1.5 Derivada de una función

El concepto de derivada es uno de los más importantes de las Matemáticas y, probablemente, el que más aplicaciones tiene. De manera general este concepto resulta imprescindible en todos aquellos casos en que interesa medir la rapidez con que varía una magnitud con respecto a otra. Su utilización es fundamental en Física, Química, Ingeniería, pero también, y cada vez más, en Biología, Ciencias de la Salud, Economía, Sociología, etc. También la derivada tiene muchas aplicaciones en otros campos de las Matemáticas, como por ejemplo en Geometría, para la determinación de propiedades geométricas de los gráficos de funciones o también en Optimización, esto es, el cálculo de máximos y mínimos de funciones.

La definición de derivada de una función en un punto es la siguiente:

Definición 1.18
Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función definida en un entorno de un punto $a\in D$. Se dice que f es derivable en el punto a si existe el

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

En este caso, el anterior límite se denota como $f'(a)$ y se dice que $f'(a)$ es la derivada de la función f en el punto a.

Se dice que f es derivable en D si los es en todos los puntos de D.

Como en el caso de la continuidad, también se tiene el siguiente resultado:

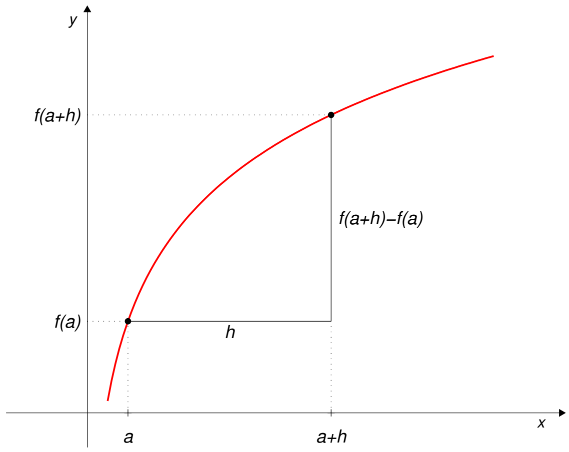


Figura 1.9: La derivada de f en a «mide» el crecimiento de la función en el punto a.

Teorema 1.19 (Álgebra de funciones derivables)
Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real y $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un entorno de un punto $a \in D$ y derivables en a. Entonces,

1. *Las funciones λf, $f+g$, $f-g$ y fg son derivables en a y*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a); \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

2. *Si además $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Damos otro resultado que nos permite calcular la derivada de una función compuesta:

Teorema 1.20 (Regla de la cadena)
Sean f y g dos funciones tales que f es derivable en el punto $g(a)$ y f es derivable en a. Entonces, la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ es derivable en el punto a y se tiene (regla de la cadena):

$$h'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Como es muy lento el cálculo de derivadas a partir de la definición, es conveniente conocer las reglas de derivación más básicas. A continuación mostramos las derivadas de las principales funciones elementales y las correspondientes fórmulas para las funciones compuestas:

TABLA DE DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Funciones elementales		Funciones compuestas (usando la Regla de la Cadena)	
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = a\,x$	$f'(x) = a$	$f(x) = a\,g(x)$	$f'(x) = a\,g'(x)$
$f(x) = a\,x + b$	$f'(x) = a$	$f(x) = a\,g(x) + b$	$f'(x) = a\,g'(x)$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = g(x)^2$	$f'(x) = 2\,g(x)\,g'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\,g'(x)$
$f(x) = x^n \ \ (n \neq 0)$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$f(x) = g(x)^n$	$f'(x) = n\,g(x)^{n-1}\,g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}\,g'(x)$
$f(x) = a^x \ \ (a > 0)$	$f'(x) = a^x\ \log(a)$	$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)}\log(a)g'(x)$
$f(x) = \log(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \log(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)}\,g'(x)$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\ \log(b)}$	$f(x) = \log_b(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)\ \log(b)}\,g'(x)$
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$	$f'(x) = \cos(g(x))\,g'(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$	$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(g(x))g'(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$f(x) = \tan(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))}\,g'(x)$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \arctan(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+g(x)^2}\,g'(x)$

Observación 1.21
Fórmula alternativa de la derivada de la función tangente: Si $f(x) = \tan(x)$, entonces,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Veamos a continuación un resultado (sin prueba) que relaciona los conceptos de continuidad y derivabilidad de una función:

Teorema 1.22
Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a,b)$ un punto. Entonces, si f es derivable en el punto c, entonces, f es continua en c.

El resultado anterior nos dice que las funciones derivables en un punto son forzosamente continuas en el punto. Sin embargo, el resultado contrario es, en general, falso: hay funciones continuas que no son derivables. Veamos un ejemplo de este tipo:

Ejemplo 1.23
Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que f es continua en el punto $x = 0$ (en realidad, f es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$). Veamos que f no es derivable en $x = 0$. Para ello, aplicamos la definición de derivada (Definición 1.18). Tenemos que estudiar el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Veamos cuánto valen los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

A la vista del resultado, podemos concluir que f no es derivable en el punto $x = 0$.

En el Apéndice B que aparece al final del tema se pueden encontrar ejemplos, ejercicios, ..., relacionados con el cálculo de derivadas.

1.6 Aplicaciones de la derivada

Dedicamos esta sección a ver algunas aplicaciones del concepto de derivada.

1.6.1 Recta tangente y recta normal a una curva $y = f(x)$.

Una de las primeras aplicaciones del concepto de derivada nos permite calcular la recta tangente y la recta normal a una función $y = f(x)$ en un punto $x = a$ donde f sea derivable.

Recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto:
Si f es derivable en a, entonces $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, y la ecuación de dicha recta tangente es

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

En las Figuras 1.10 y 1.11 se da una justificación geométrica de la fórmula de la recta tangente.

Como consecuencia a la fórmula de la recta tangente a una función f en un punto, también podemos obtener la fórmula de la recta normal (perpendicular) a la función f en el mismo punto. Obsérvese que la recta normal a f pasa por el punto $(a, f(a))$ y es perpendicular a la recta tangente. Así, su pendiente viene dada por $-1/f'(a)$. Así,

Recta normal a la curva $y = f(x)$ en un punto:

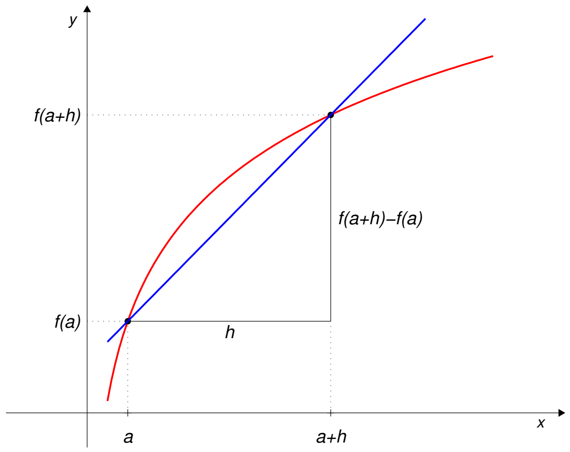


Figura 1.10: La recta secante a la curva en los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ tiene la ecuación
$y = f(a) + \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a)$

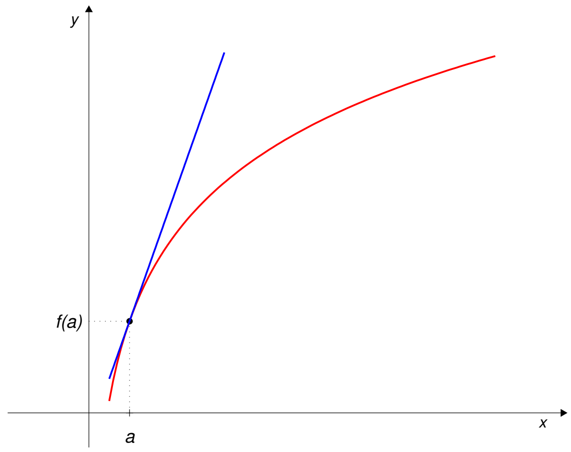


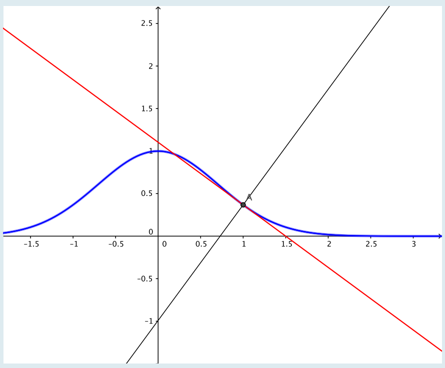
Figura 1.11: Cuando h tiende a 0 el punto $a+h$ se confunde con el punto a y la recta secante se convierte en la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$, de ecuación $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Si f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$, entonces $-1/f'(a)$ es la pendiente de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, y la ecuación de dicha recta normal es

$$\boxed{y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a).}$$

Veamos seguidamente algún ejemplo.

Ejemplo 1.24
Calcular la recta tangente y normal a la función $f(x) = e^{-x^2}$ en el punto $x = 1$.



En primer lugar, es sencillo comprobar que $D(f) = \mathbb{R}$. Por otro lado, f es la composición de dos funciones que son continuas y derivables. Como conclusión deducimos que f es derivable en su dominio. De hecho, aplicando la regla de la cadena deducimos:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

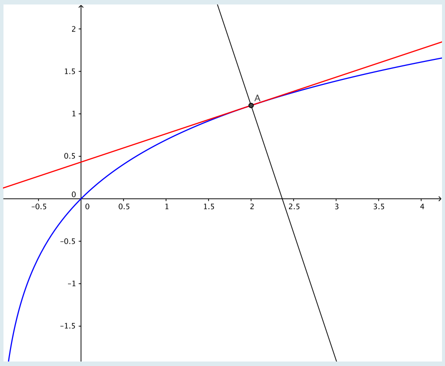
Por tanto, la pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = -2e^{-1} = -2/e$ y pasa por $(1, f(1)) = (1, 1/e)$. Así, la recta tangente a f en el punto $x = 1$ es

$$y = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-1) \iff y = \frac{1}{e}(3-2x).$$

De la anterior fórmula deducimos que la recta normal a f que pasa por el mismo punto viene dada por

$$y = \frac{1}{e} + \frac{e}{2}(x-1).$$

Ejemplo 1.25
Calcular la recta tangente y normal a la función $f(x) = \log(x+1)$ en el punto $x = 2$.



Como en el ejemplo anterior, comenzamos estudiando el dominio de f. Al tratarse de un logaritmo, el argumento debe ser positivo, es decir, $x+1 > 0$. Por tanto, $D(f) = (-1, \infty)$. De nuevo, f es la composición de dos funciones (la función logaritmo y la función $x+1$) que son continuas y derivables. Podemos concluir que f es continua y derivable en $(-1, \infty)$ y (regla de la cadena)

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

La pendiente de la recta tangente es $m = f'(2) = 1/3$ y esta pasa por $(2, f(2)) = (2, \log 3)$. Así, la recta tangente f en el punto $x = 2$ es

$$y = \log 3 + \frac{1}{3}(x-2).$$

De la anterior fórmula deducimos que la recta normal a f que pasa por el mismo punto viene dada por

$$y = \log 3 - 3(x-2).$$

1.6.2 Regla de l'Hôpital.

El cálculo de límites presenta algunos casos de indeterminación que pueden ser dilucidados usando el concepto de derivada. Se trata de la llamada **Regla de l'Hôpital**:[1]

Teorema 1.26 (Regla de L'Hôpital)
Supongamos que $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en en el intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b). Sea $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ si $x \neq c$. Supongamos que existe

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Este resultado permite resolver indeterminaciones del tipo $0/0$. Sin embargo, la regla sigue siendo válida para indeterminaciones del tipo $\pm\infty / \pm\infty$ y para límites del tipo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Esta regla sigue siendo válida para el cálculo de límites laterales.

Observación 1.27
Antes de aplicar la regla de L'Hôpital es importante comprobar que tenemos una indeterminación. Como vimos en el Ejemplo 1.13 la no comprobación de las hipótesis puede llevar a resultados erróneos. Por otro lado, también hay que comprobar que las funciones que aparecen en el numerador y en el denominador son derivables.

[1] La regla de l'Hôpital debe su nombre al Marqués de l'Hôpital (1661-1704), pero fue descubierta por el matemático suizo J. Bernouilli (1667-1748).

Veamos algunos ejemplos de aplicación de la regla de L'Hôpital:

Ejemplo 1.28
Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}; \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to-1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

(a) En primer lugar, comprobamos que las funciones que aparecen en el numerador y el denominador son derivables. En segundo lugar, comprobamos que tenemos una indeterminación del tipo $0/0$ o ∞/∞:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}\,(\text{indet.}).$$

Aplicando la regla de L'Hôpital obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}\,(\text{indet.}) = (\text{L'Hôpital}) \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

(b) Igual que antes, comenzamos comprobando que el numerador y el denominador son funciones derivables. Comprobamos también que tenemos una indeterminación del tipo $0/0$ o ∞/∞. Si es así, podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{0}{0}\,(\text{indet.}) = (\text{L'Hôpital}) \lim_{x\to-1} \frac{2x+2}{1} = 0.$$

Análogamente, las indeterminaciones $0\cdot\infty$ ó $\infty-\infty$ pueden ser resueltas utilizando la regla de L'Hôpital. Para poder aplicarla, previamente habrá que transformar la indeterminación en otra del tipo $0/0$ ó ∞/∞.

Ejemplo 1.29
Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}; \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to+\infty} (e^x - x\log x)$$

(a) En primer lugar, observamos que tenemos una indeterminación del tipo $+\infty\cdot 0$. Por tanto, tendremos que transformar la función para poder aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = +\infty\cdot 0\,(\text{indet.}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = (\text{L'Hôpital}) \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Es importante resaltar que en el proceso anterior hemos podido aplicar la regla de L'Hôpital pues hemos comprobado que: (i) teníamos una indeterminación ∞/∞; (ii) el numerador y el denominador son derivables.

(b) En este segundo límite no podemos aplicar la regla al no tener una indeterminación del tipo $0/0$ o ∞/∞. Por tanto, de nuevo habrá que transformar la función:

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x - x\log x) = +\infty-\infty\,(\text{indet.}) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x\log x}{e^x}\right) = +\infty\cdot\left(1-\frac{+\infty}{+\infty}\right).$$

Obsérvese que en al anterior límite tenemos una indeterminación ∞/∞ a la que podemos ahora aplicar la regla de L'Hôpital (el numerador y el denominador son derivables). Así,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\log x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = (\text{L'Hôpital}) \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log x}{e^x} == \frac{+\infty}{+\infty} = (\text{L'Hôpital}) \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^x} = 0.$$

Volviendo al límite inicial,

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x - x\log x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x\log x}{e^x}\right) = +\infty\cdot(1-0) = +\infty.$$

En el Apéndice que aparece al final de este tema aparecen más ejemplos y ejercicios relacionados con la regla de L'Hôpital.

1.6.3 Monotonía y determinación de extremos.

En esta subsección utilizaremos la derivada para estudiar la monotonía de una función, es decir, dónde la función es creciente o decreciente. Comenzamos recordando el concepto de función creciente o decreciente:

Definición 1.30
Consideremos una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el intervalo (a, b). Entonces,

1. *Se dice que f es* ***creciente*** *en (a, b) si, para cualquier $x_1, x_2 \in (a, b)$, con $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$. Cuando la desigualdad es estricta ($f(x_1) < f(x_2)$), se dice que f es* ***estrictamente creciente*** *en (a, b).*
2. *Se dice que f es* ***decreciente*** *en (a, b) si, para cualquier $x_1, x_2 \in (a, b)$, con $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$. Cuando la desigualdad es estricta ($f(x_1) > f(x_2)$), se dice que f es* ***estrictamente decreciente*** *en (a, b).*

Intuitivamente una función es creciente o decreciente en un intervalo si su pendiente (derivada) es positiva o negativa (respectivamente) en todos los puntos del intervalo. Por tanto, parece natural que si la función es derivable, el signo de la derivada proporcione un criterio para el estudio del crecimiento o decrecimiento de la función. Tenemos así el llamado **criterio de la derivada primera**:

Teorema 1.31
Consideremos una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo (a, b) y derivable en (a, b). Entonces,

1. *Si $f'(x) \geq 0$ en (a, b), entonces f es* ***creciente*** *en (a, b). Si $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces f es* ***estrictamente creciente*** *en (a, b).*
2. *Si $f'(x) \leq 0$ en (a, b), entonces f es* ***decreciente*** *en (a, b). Si $f'(x) < 0$ en (a, b), entonces f es* ***estrictamente decreciente*** *en (a, b).*

Pasamos a definir los conceptos de máximo/mínimo absoluto/relativo (extremos absolutos/relativos) de una función f:

Definición 1.32 (Extremos de una función)
Consideremos una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo. Entonces,

1. *Se dice que $c \in (a, b)$ es un* ***máximo relativo*** *de f en (a, b) si se verifica que $f(c) \geq f(x)$ para cualquier x en un* ***entorno*** *de c. Se dice que $c \in (a, b)$ es un* ***máximo absoluto*** *de f en (a, b) si se verifica que $f(c) \geq f(x)$ para cualquier $x \in (a, b)$.*
2. *Se dice que $c \in (a, b)$ es un* ***mínimo relativo*** *de f en (a, b) si se verifica que $f(c) \leq f(x)$ para cualquier x en un* ***entorno*** *de c. Se dice que $c \in (a, b)$ es un* ***mínimo absoluto*** *de f en (a, b) si se verifica que $f(c) \leq f(x)$ para cualquier $x \in (a, b)$.*

Nuestro próximo objetivo será calcular los posibles extremos absolutos o relativos de una función dada f. Para ello, usaremos de nuevo un criterio que usa la derivada de la función:

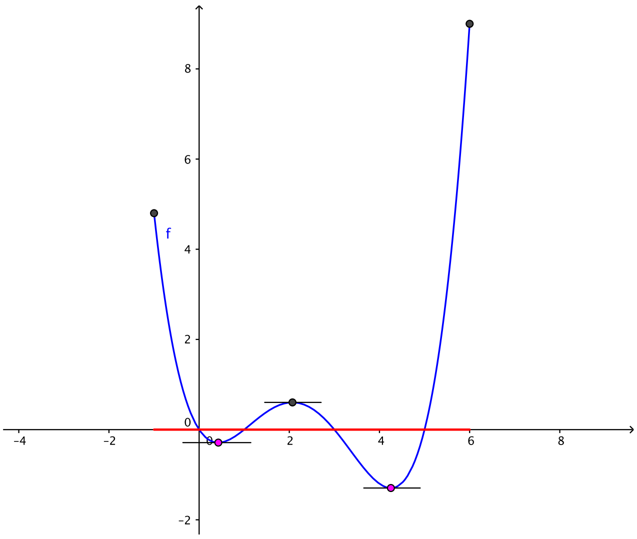


Figura 1.12: Función con tres máximos y dos mínimos relativos en el intervalo $[-1, 6]$.

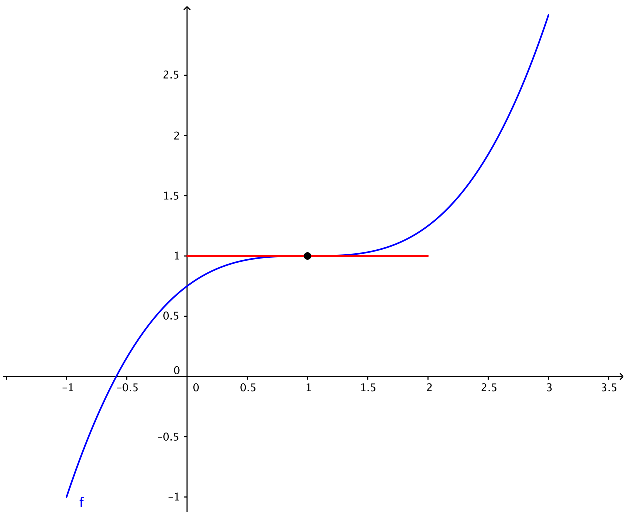


Figura 1.13: En el punto $x = 1$ la derivada de la función se anula, sin embargo el punto $x = 1$ no corresponde a un máximo ni mínimo de la función.

Teorema 1.33
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo (a, b). Entonces, si $x_0 \in (a, b)$ es un ***extremo*** *(máximo o mínimo) relativo de f en (a, b), se tiene:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Observación 1.34
Es importante saber aplicar el resultado anterior. Obsérvese en la Figura 1.12 que hay tres puntos en el intervalo $[-1, 6]$ donde la derivada vale 0 (pendiente 0). Uno de ellos se corresponde al mínimo absoluto de la función en el intervalo. Sin embargo, el máximo absoluto de f en el intervalo se alcanza en el punto $x = 6$. A la vista de la gráfica sabemos que $f'(6) \neq 0$. ¿Hay **contradicción** con el teorema anterior? No, puesto que el teorema solo se puede aplicar a puntos que están en el interior del intervalo.

Los puntos del intervalo en los que la derivada de una función vale cero se llaman **puntos críticos** de dicha función. Estos puntos son los **candidatos** a ser máximos y mínimos de la función (además de los extremos del intervalo, si estos pertenecieran al intervalo). Sin embargo, no todos lo son (pueden también ser puntos de inflexión, véase la Figura 1.13).

Ejemplo 1.35
Estudiar el crecimiento/decrecimiento, máximos/mínimos de la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Comenzamos estudiando el dominio de la función f. Como el denominador de f no se anula (de hecho, es siempre positivo), deducimos que $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$. También, al tratarse de un cociente de funciones continuas y derivables con denominador no nulo en $D(f)$, podemos decir que f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
Estudiemos a continuación el crecimiento y decrecimiento de f y calculemos sus posibles máximos y mínimos. Usaremos la derivada primera de f:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Puntos críticos: Estos salen de la ecuación $f'(x) = 0$, con solución $\boxed{x = -1}$ y $\boxed{x = 1}$. Según el Teorema 1.33, estos son los únicos candidatos a ser máximo o mínimo relativo de f en $\mathbb{R}$.

Crecimiento/decrecimiento: Aplicaremos el Teorema 1.31. Así, nuestro objetivo es estudiar el signo de f'. Obsérvese que el denominador de f' es siempre positivo. Así, el signo de f' solo depende de su numerador:

$$\boxed{\operatorname{sign}(f') = \operatorname{sign}(1 - x^2)}.$$

Comprobando el signo del polinomio $1 - x^2$ (con raíces $x = \pm 1$), obtenemos:

$$\begin{cases} (-\infty, -1): \ 1 - x^2 < 0 \Longrightarrow f' < 0 \Longrightarrow f \text{ es decreciente;} \\ (-1, 1): \ 1 - x^2 > 0 \Longrightarrow f' > 0 \Longrightarrow f \text{ es creciente;} \\ (1, \infty): \ 1 - x^2 < 0 \Longrightarrow f' < 0 \Longrightarrow f \text{ es decreciente.} \end{cases}$$

Además, f posee un mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{2})$ pues f pasa de ser decreciente a creciente en el punto $x = -1$. El mismo razonamiento permite deducir que f tiene un máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$. Viendo la Figura 1.14 también deducimos que los anteriores extremos en realidad son absolutos.

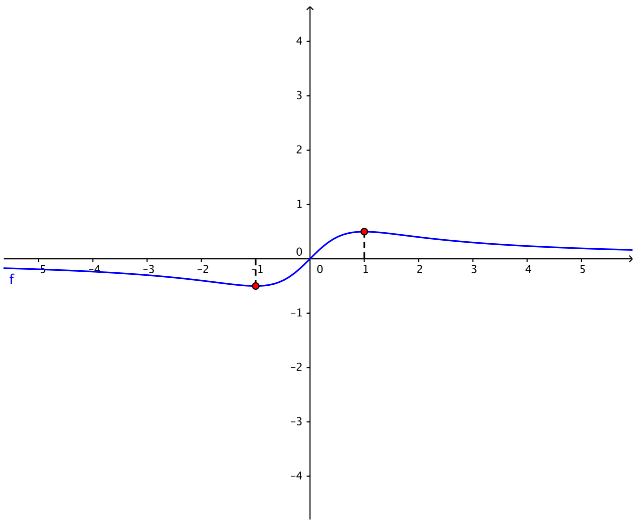


Figura 1.14: Ejemplo 1.35.

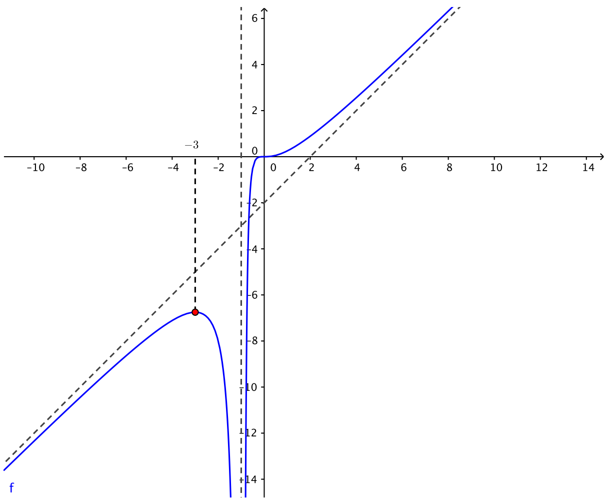


Figura 1.15: Ejemplo 1.36.

Ejemplo 1.36
Estudiar el crecimiento/decrecimiento, máximos/mínimos de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$$

La función f está definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ y, al tratarse de cociente de funciones continuas y derivables con denominador no nulo, es una función continua y derivable en su dominio. La derivada viene dada por:

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}.$$

Puntos críticos: Estos salen de la ecuación $f'(x) = 0$, con solución $\boxed{x = -3}$ y $\boxed{x = 0}$. Según el Teorema 1.33, estos son los únicos candidatos a ser máximo o mínimo relativo de f en $\mathbb{R}$.

Crecimiento/decrecimiento: Aplicaremos el Teorema 1.31. Así, nuestro objetivo es estudiar el signo de f'. Obsérvese que el factor x^2 que aparece en el numerador de f' es siempre positivo. Por otro lado, el signo del denominador coincide con el signo de $(1+x)$. Así, el signo de f' solo depende de las cantidades $(x+3)$ y $(1+x)$. Podemos escribir:

$$\boxed{\operatorname{sign}(f') = \operatorname{sign}\left(\frac{x+3}{1+x}\right)}.$$

Dividimos nuestro estudio en los intervalos que determinan las raíces de ambos monomios, $x = -3$ y $x = -1$. Obtenemos:

$$\begin{cases} (-\infty, -3): \; x+3 < 0; \; 1+x < 0 \Longrightarrow f' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ es creciente;} \\ (-3, -1): \; x+3 > 0; \; 1+x < 0 \Longrightarrow f' \leq 0 \Longrightarrow f \text{ es decreciente;} \\ (1, \infty): \; x+3 > 0; \; 1+x > 0 \Longrightarrow f' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ es creciente.} \end{cases}$$

Además, f posee un máximo relativo en $(-3, f(-3)) = (-3, -27/4)$ pues f pasa de ser creciente a decreciente en el punto $x = -3$. Aunque $x = 0$ es un punto crítico, en $x = 0$ la función f no tiene ni máximo ni mínimo pues f es creciente alrededor del punto (como veremos más adelante, es, en realidad, un punto de inflexión). En el punto $x = -1$ no se tiene máximo ni mínimo pues el punto no está en $D(f)$ (véase la Figura 1.15).

1.7 Derivadas sucesivas. Concavidad y convexidad

En las secciones anteriores hemos introducido el concepto de derivada de una función f. En el caso de que $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sea una función derivable en el intervalo (a, b), hemos definido $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ como la función derivada primera. Por tanto, nos podemos plantear si esta función f' es, a su vez, derivable en (a, b). Si es así, diremos que f es **dos veces derivable** en (a, b) y denotaremos por f'' a la derivada de la función derivada primera de f en (a, b):

$$f''(x) = (f')'(x).$$

Podemos continuar aplicando el anterior proceso y definir, por ejemplo, la derivada tercera de f (f''') en el intervalo (a, b) como la derivada de f'' en (a, b), la derivada cuarta de f ($f^{iv)}$) como la derivada de f''', etc.

Una de las aplicaciones más importantes del concepto de derivada segunda de una función f lo encontramos en el estudio de la **curvatura** (**concavidad/convexidad**) de la función f en un intervalo (a, b). No vamos a dar la definición precisa de los conceptos de función **cóncava** o **convexa** en un intervalo (a, b), pero diremos que ese concepto está relacionado con la posición relativa de la curva $y = f(x)$ y de las rectas secantes a la curva que podamos trazar en el intervalo (a, b) (véanse las Figuras 1.16 y 1.17).

Por otro lado, x_0 es **punto de inflexión** de la función f si la curvatura de f a la izquierda de x_0 es distinta de la curvatura de f a su derecha (la función f pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava al atravesar el punto x_0).

Para calcular los puntos de inflexión de una función f utilizaremos un criterio relacionado con la derivada segunda de la función:

Teorema 1.37 (Condición punto de inflexión)
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el intervalo (a, b). Entonces, si $x_0 \in (a, b)$ es un ***punto de inflexión*** *de f en (a, b), se tiene:*

$$f''(x_0) = 0.$$

Finalmente, la derivada segunda de la función f nos va a permitir estudiar las zonas donde f es cóncava o convexa. Estas zonas quedan determinadas por el signo de f''. Se tiene:

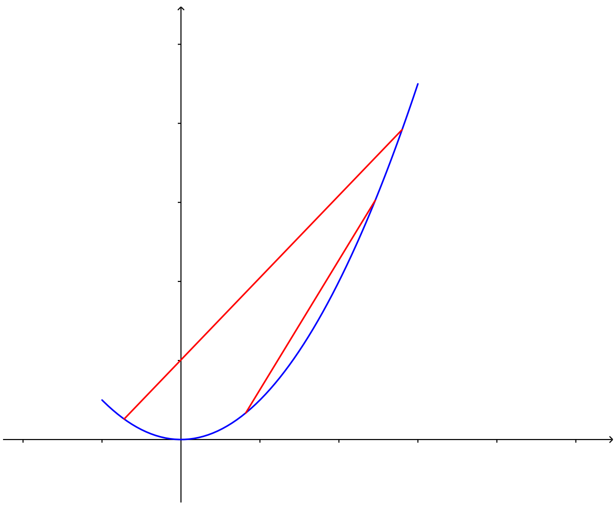


Figura 1.16: Función convexa en un intervalo: las rectas secantes a la curva están por encima de la curva.

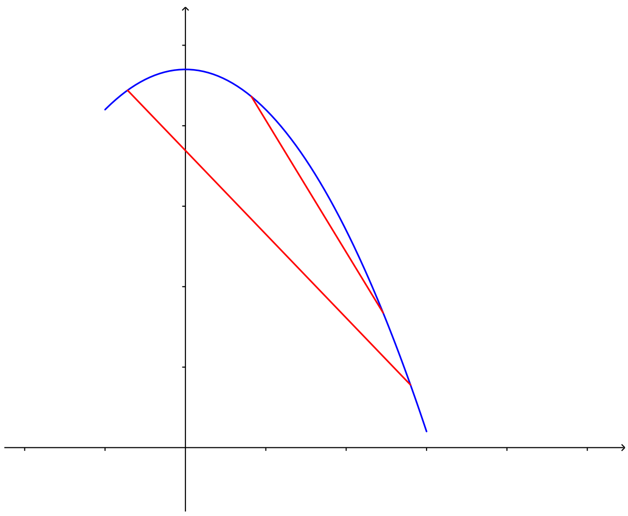


Figura 1.17: Función cóncava en un intervalo las rectas secantes a la curva están por debajo de la curva.

Teorema 1.38 (Criterio de concavidad/convexidad)
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el intervalo (a, b). Entonces,

1. *Si $f''(x) \geq 0$ en (a, b), entonces f es* ***convexa*** *en (a, b).*
2. *Si $f''(x) \leq 0$ en (a, b), entonces f es* ***cóncava*** *en (a, b).*

Ejemplo 1.39
Estudiar la concavidad/convexidad y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Vimos que $D(f) = \mathbb{R}$ y que f es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Además, (Ejemplo 1.35) la derivada primera viene dada como

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Esta función es de nuevo derivable (es cociente de funciones derivables y, además, el denominador no se anula en $\mathbb{R}$) y,

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{(1+x^2)^3}.$$

Puntos de inflexión: Los candidatos a ser puntos de inflexión salen de la ecuación $f''(x) = 0$, es decir,

$$2x\left(x^2-3\right) = 0 \iff \boxed{x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}}.$$

Concavidad/convexidad: Aplicaremos el Teorema 1.38. Para ello, estudiaremos en signo de f''. Observando la expresión de f'', nos percatamos de que el denominador de f'' es siempre positivo. Por tanto, este denominador no influye en el signo de f''. Podemos escribir,

$$\text{sign}\,(f''(x)) = \text{sign}\,\left(x\left(x^2-3\right)\right).$$

Como la expresión $x\left(x^2-3\right)$ se anula en los puntos 0, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$, hacemos nuestro estudio en los intervalos:

$$\begin{cases} (-\infty,-\sqrt{3}): \ x\left(x^2-3\right)<0 \Longrightarrow f''\leq 0 \Longrightarrow f \text{ es cóncava;} \\ (-\sqrt{3},0): \ x\left(x^2-3\right)>0 \Longrightarrow f''\geq 0 \Longrightarrow f \text{ es convexa;} \\ (0,\sqrt{3}): \ x\left(x^2-3\right)<0 \Longrightarrow f''\leq 0 \Longrightarrow f \text{ es cóncava,} \\ (\sqrt{3},\infty): \ x\left(x^2-3\right)>0 \Longrightarrow f''\geq 0 \Longrightarrow f \text{ es convexa.} \end{cases}$$

Los puntos $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=\sqrt{3}$ (que corresponden a los puntos de la gráfica $(-\sqrt{3},f(-\sqrt{3}))$, $(0,f(0))$ y $(\sqrt{3},f(\sqrt{3})))$ son puntos de inflexión de f pues anulan f'' y la función cambia de curvatura al atravesar los puntos (véase la Figura 1.14).

Ejemplo 1.40
Estudiar la concavidad/convexidad y los puntos de inflexión de la función

$$f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}.$$

Vimos en el Ejemplo 1.36 que $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ y que f es continua y derivable en su dominio. De hecho,

$$f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}.$$

La expresión anterior sigue siendo derivable pues, el numerador y el denominador lo son y el denominador no se anula en el dominio. Así, f es derivable dos veces en $D(f)$ con

$$f''(x)=\frac{6x}{(1+x)^4}.$$

Puntos de inflexión: Como sabemos, los candidatos a ser puntos de inflexión salen de la ecuación $f''(x)=0$, es decir, $\boxed{x=0}$.
Concavidad/convexidad: Como en el ejemplo anterior, aplicaremos el Teorema 1.38. Para ello, estudiaremos el signo de f''. De nuevo, el denominador de la función f'' es siempre positivo. Por tanto, este denominador no influye en el signo de f''. Podemos escribir,

$$\text{sign}\ (f''(x))=\text{sign}\ (x)\,.$$

Así:

$$\begin{cases} (-\infty,0): \ x<0 \Longrightarrow f''\leq 0 \Longrightarrow f \text{ es cóncava;} \\ (0,\infty): \ x>0 \Longrightarrow f''\geq 0 \Longrightarrow f \text{ es convexa.} \end{cases}$$

El punto $x=0$ es un punto de inflexión de f (que corresponde a $(0,f(0))=(0,0)$) pues anula f'' y la función es cóncava a su izquierda y convexa a su derecha (véase la Figura 1.15).

1.8 Aproximación de funciones.

Como vimos anteriormente, la recta tangente a una función $y=f(x)$ en un punto x_0 del dominio es una buena aproximación de la función cerca del punto x_0 (véase Subsección 1.6.1). Teniendo en cuenta la expresión de la recta tangente, podemos escribir:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \text{con } x \text{ cerca de } x_0.$$

Esta propiedad nos permite aproximar el valor de una función por el valor de la recta tangente. Veamos un resultado que garantiza la buena aproximación de una función por su recta tangente alrededor de un punto:

Teorema 1.41
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el intervalo (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Entonces,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \forall x \in (a, b),$$

con ξ un valor desconocido, pero situado entre x y x_0. Por tanto, $\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$ para cualquier $x \in (a, b)$, con un error dado por

$$E_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

Veamos algún ejemplo de aplicación del resultado anterior:

Ejemplo 1.42
Utilizando la recta tangente a la función $f(x) = \log(x + 1)$ en el punto $x_0 = 0$, calcular una aproximación del valor $\log 1'1$.

En primer lugar, es fácil comprobar que el dominio de la función f es $\boxed{D(f) = (-1, \infty)}$. En su dominio, la función f es continua y derivable tantas veces como queramos (infinitamente derivable), es decir, f es infinitamente derivable en $(-1, \infty)$. Obsérvese que $\log 1'1 = f(0'1)$. Así, usaremos la recta tangente a f en el punto $(0, f(0))$ para aproximar $f(0'1)$. Comencemos calculando la recta tangente:

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2} \quad \forall x > -1 \Longrightarrow \boxed{f'(0) = 1}.$$

Así, la recta tangente viene dada por $r : y = f(0) + f'(0)(x - 0)$, es decir $\boxed{r : y = x}$. Como conclusión, podemos escribir:

$$\log(x + 1) = f(x) \approx x, \quad \text{cuando } x \text{ está cerca de } 0 \quad \Longrightarrow \boxed{\log 1'1 = f(0'1) \approx 0'1}.$$

Veamos si podemos acotar el valor absoluto del error cometido. Si aplicamos el Teorema 1.41, tenemos que, para un valor $\xi \in (0, 0'1)$, se tiene:

$$|E_1(0'1)| = \frac{1}{2} \left| \frac{-1}{(\xi + 1)^2} 0'1^2 \right| < \frac{1}{2} 0'01 = 0'005.$$

Como conclusión, acabamos de ver que el error en valor absoluto es menor que $0'005$. Eso garantiza que la aproximación que estamos dando tiene, al menos, **dos cifras** decimales exactas.

Usando la calculadora, calculemos el valor real del error en valor absoluto para comprobar que la acotación anterior es buena. Se tiene:

$$|E_1(0'1)| = |\log 1'1 - 0'1| = |0'095310179804325 - 0'1| = 0'00468982019568 < 0'005.$$

En realidad, podemos ir algo más lejos si intentamos construir la parábola que mejor se aproxima a una función dada alrededor de un punto. Esto es posible pues se tiene:

Teorema 1.43
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tres veces derivable en el intervalo (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Entonces,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - x_0)^3, \quad \forall x \in (a, b),$$

con ξ un valor desconocido, pero situado entre x y x_0. Por tanto,

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2}, \quad \forall x \in (a, b),$$

con un error dado por

$$E_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x - x_0)^3.$$

Con el resultado anterior es posible dar una mejor aproximación en el Ejemplo 1.42:

Ejemplo 1.44
Utilizando la parábola que mejor aproxima a la función $f(x) = \log(x+1)$ en el punto $x_0 = 0$, calcular una aproximación del valor $\log 1'1$.

Como sabemos, el dominio de la función f es $\boxed{D(f) = (-1, \infty)}$ y f es continua e infinitamente derivable en $(-1, \infty)$. Utilizando que $\log 1'1 = f(0'1)$, podemos escribir

$$\log(x + 1) = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f''(\xi)x^3, \quad \forall x,$$

con ξ un valor comprendido entre 0 y x. Se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2} \quad \text{y} \quad f'''(x) = \frac{2}{(x + 1)^3} \quad \forall x > -1 \Longrightarrow \boxed{f'(0) = 1}, \quad \boxed{f''(0) = -1}.$$

Así, podemos escribir:

$$\boxed{\log(x + 1) = f(x) \approx x - \frac{1}{2}x^2}, \quad \text{cuando } x \text{ está cerca de } 0 \quad \Longrightarrow \boxed{\log 1'1 = f(0'1) \approx 0'095}.$$

Veamos si podemos acotar el valor absoluto del error cometido. Si aplicamos el Teorema 1.43, tenemos que para un valor $\xi \in (0, 0'1)$, se tiene:

$$|E_2(0'1)| = \frac{1}{6}\left|\frac{2}{(\xi + 1)^3}0'1^3\right| < \frac{1}{3}0'001 = 0'000333333\ldots$$

La anterior acotación del error garantiza que la aproximación que estamos dando tiene, al menos, **tres cifras** decimales exactas. Hagamos la comparación con el valor real del error en valor absoluto:

$$|E_2(0'1)| = |\log 1'1 - 0'1| = |0'095310179804325 - 0'095| = 0'000310179804325 < 0'000333333\ldots.$$

(Véase la Figura 1.18).

Veamos un segundo ejemplo:

Ejemplo 1.45
Utilizando la parábola que mejor aproxima a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $x_0 = 0$, calcular una aproximación del valor $\operatorname{sen} 0'1$.

Seguimos los mismos pasos del ejemplo anterior. En este caso $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$. Además, la función f es continua e infinitamente derivable en $\mathbb{R}$. Obsérvese que $\operatorname{sen} 0'1 = f(0'1)$. Para la aproximación de $f(0'1)$ calculemos la parábola tangente a f en el punto $(0, f(0))$:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad \forall x > -1 \Longrightarrow \boxed{f'(0) = 1}, \quad \boxed{f''(0) = 0}.$$

Como antes, la parábola viene dada por $y = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$, es decir,

$$\boxed{\operatorname{sen} x = f(x) \approx x}, \quad \text{cuando } x \text{ está cerca de } 0 \quad \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 0'1 = f(0'1) \approx 0'1}.$$

(Como $f''(0) = 0$, la parábola es, en realidad, la recta tangente a f en el punto $(0, f(0))$). Si comparamos de nuevo la aproximación y el valor real, el error que estamos cometiendo es

$$|E_2(0'1)| = \frac{1}{6}\,|f'''(\xi)|\,0'1^3 = \frac{1}{6}\left|\cos\xi \cdot 0'1^3\right| < \frac{1}{6}0'001 = 0'000166666\ldots$$

con ξ un valor desconocido que está entre 0 y $0'1$. La anterior acotación nos garantiza que la aproximación de $\operatorname{sen} 0'1$ tiene tres cifras decimales exactas. Comparemos el valor real con la acotación:

$$|E_2(0'1)| = |\operatorname{sen} 0'1 - 0'1| = |0.099833416646828 - 0'1| = 0'00016658335317\ldots < 0'000166666\ldots$$

(Véase la Figura 1.19).

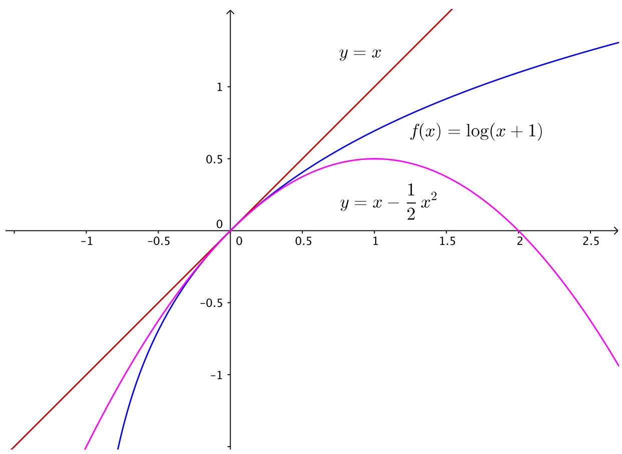


Figura 1.18: Ejemplo 1.44.

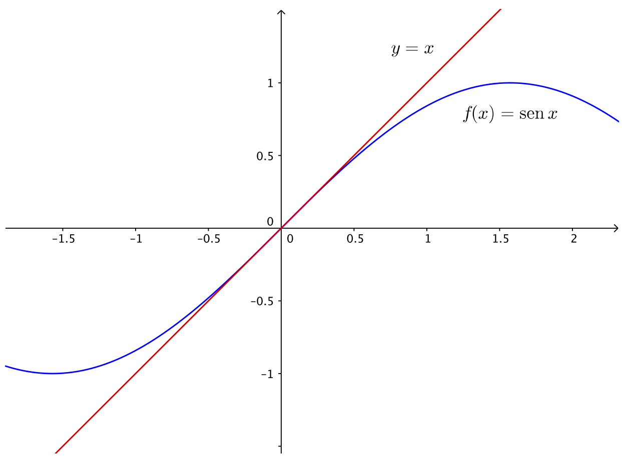


Figura 1.19: Ejemplo 1.45.

1.9 Representación gráfica de funciones.

Dedicaremos esta sección a la representación gráfica de funciones. Para llevar a cabo este propósito, haremos un estudio detallado de la función siguiendo unos pasos determinados. En los primeros puntos solo usaremos los valores de la función f. En los últimos puntos del estudio, también necesitaremos la derivadas primera y segunda de la función. Estos pasos son:

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1. **Dominio**. Estudiaremos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que la función f existe.
2. **Continuidad y derivabilidad**: Comprobaremos los puntos del dominio donde f es continua y derivable.
3. **Simetrías y periodicidad**: Comprobaremos las simetrías y la periodicidad (si las hubiera) de la función f. Recordamos que:

   a) Se dice que la función f es **par** o **simétrica** respecto del eje $\overline{OX}$ si el dominio es simétrico y $\boxed{f(-x) = f(x)}$ (véase la Figura 1.20).

b) Se dice que la función f es **impar** o **simétrica** respecto del origen O si el dominio es simétrico y $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ (véase la Figura 1.21).

c) Se dice que la función f es **periódica** si $D(f) = \mathbb{R}$ y existe $T > 0$ (llamado **periodo** de f) tal que $\boxed{f(x+T) = f(x)}$ (véase la Figura 1.22).

4. **Cortes con los ejes**.

   a) Corte con el eje $\overline{OX}$: Son de la forma $(x_0, 0)$ con x_0 solución de la ecuación $\boxed{f(x) = 0}$.

   b) Corte con el eje $\overline{OY}$: Es el punto $(0, f(0))$, si $0 \in D(f)$.

5. **Signo**: En este punto determinaremos las zonas del dominio donde f es positiva o negativa.

6. **Asíntotas**: Estudiaremos en este punto las posibles asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de la función.

7. **Crecimiento/decrecimiento, extremos**: En este punto haremos un estudio del crecimiento o decrecimiento de la función f así como de sus posibles máximos o mínimos. Para ello usaremos la derivada primera de f.

8. **Concavidad/convexidad, puntos de inflexión**. Mediante la derivada segunda de f determinaremos la curvatura y los posibles puntos de inflexión de la curva $y = f(x)$.

9. **Representación gráfica**. Con la información obtenida previamente, haremos la representación de la curva $y = f(x)$. Para que la representación sea más precisa, podríamos utilizar una tabla de valores.

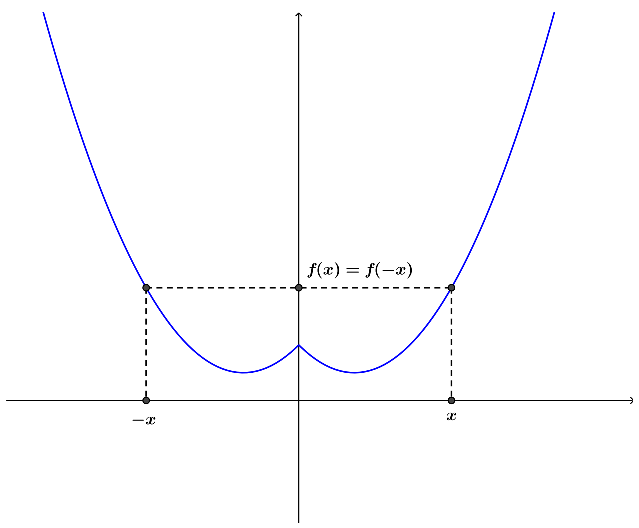


Figura 1.20: Función con **simetría par** (simétrica respecto del eje $\overline{OX}$).

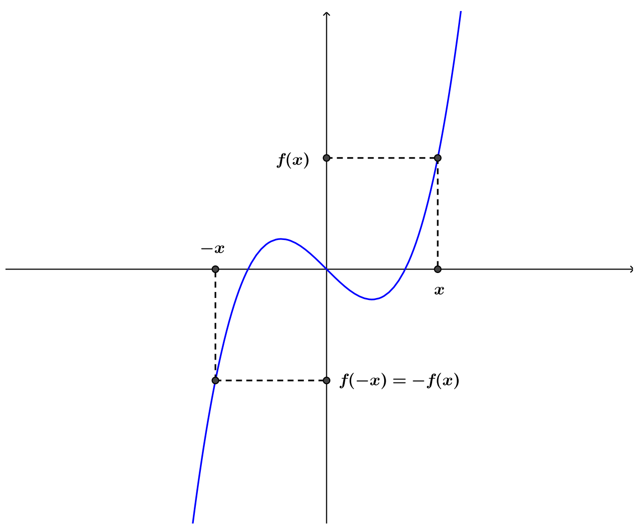


Figura 1.21: Función con **simetría impar** (simétrica respecto del origen O).

Ejemplo 1.46
Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

estudiando previamente: dominio de definición, signo, simetría, cortes con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, y puntos de inflexión.

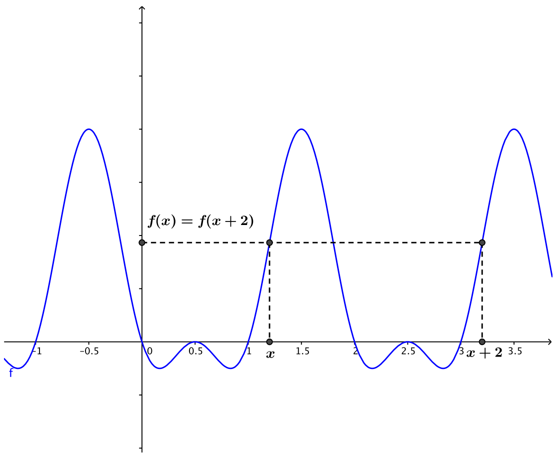


Figura 1.22: Función periódica de periodo $T = 2$.

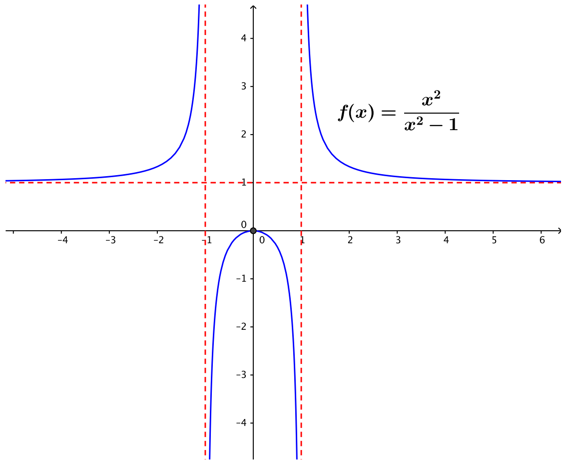


Figura 1.23: Ejemplo 1.46.

Seguimos los puntos que aparecen más arriba:

1. Dominio: Al tratarse de un cociente de polinomios, hay que excluir del dominio los puntos que anulan el denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \iff \boxed{x = \pm 1}.$$

Así, $\boxed{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$.

2. Continuidad/derivabilidad: Teniendo en cuenta que f es un cociente de funciones continuas y derivables (son polinomios) y que el denominador no se anula en $D(f)$, podemos concluir que f es **continua y derivable** en $D(f)$.

3. Simetrías y periodicidad: El dominio $D(f)$ es simétrico. Comprobemos si f tiene simetría par o impar:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x).$$

Conclusión: f tiene simetría par (simétrica respecto del eje $\overline{OX}$).

4. Cortes con los ejes:

- Eje $\overline{OX}$: Los cortes con este eje corresponden a las raíces de f:

$$\boxed{f(x) = 0} \iff \boxed{x^2 = 0} \iff \boxed{x = 0}.$$

  Así, el punto de corte es $\boxed{(0, f(0)) = (0, 0)}$.

- Eje $\overline{OY}$: Corresponde a $(0, f(0))$, es decir, $\boxed{(0, 0)}$.

5. Signo: Observamos que el numerador de la función f es siempre mayor o igual que 0 (es un cuadrado). Así, el signo solo depende del denominador: $\boxed{\text{sign}\,(f(x)) = \text{sign}\,(x^2 - 1)}$. Por tanto, teniendo en cuenta que las raíces de $x^2 - 1$ son $x = \pm 1$, nuestro estudio de signo se reduce a:

$$\begin{cases} (-\infty, -1): \; (x^2 - 1) > 0 \Longrightarrow f \geq 0; \\ (-1, 1): \; (x^2 - 1) < 0 \Longrightarrow f \leq 0; \\ (1, \infty): \; (x^2 - 1) > 0 \Longrightarrow f \geq 0. \end{cases}$$

6. Asíntotas:

- **Verticales**: Son de la forma $x = a$ con a un número fuera del dominio de la función. Como consecuencia, las candidatas son $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=1}$. Estudiemos los límites laterales (hay que tener en cuenta el signo de f estudiado en el punto anterior):

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{x^2}{x^2-1} = +\infty; & \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \dfrac{x^2}{x^2-1} = -\infty; \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{x^2-1} = -\infty; & \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x^2-1} = +\infty. \end{cases}$$

  Conclusión: Hay dos asíntotas verticales: $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=-1}$.

- **Horizontales**: Si existen, son de la forma $y = b$, con b un número real dado por

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1,$$

  (para resolver la indeterminación de este límite hemos aplicado la regla de L'Hôpital). **Conclusión**: Hay una asíntota horizontal: $\boxed{y=1}$. La existencia de asíntotas horizontales impide la existencia de asíntotas oblicuas.

7. Monotonía, extremos: Para este punto utilizaremos la derivada primera de f:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}.$$

Puntos críticos: Son los candidatos a ser máximo o mínimo de f. Se obtienen de la ecuación $\boxed{f'(x)=0}$. En nuestro caso, obtenemos como solución $\boxed{x=0}$. Por tanto, $x = 0$ es el único posible máximo o mínimo de f.
Crecimiento/decrecimiento: Utilizaremos Teorema 1.31. Así, nuestro objetivo es estudiar el signo de f'. Observando la expresión de f' nos damos cuenta de que su signo solo depende del numerador (el denominador es un cuadrado y por tanto es siempre mayor o igual a cero). Podemos escribir:

$$\operatorname{sign}(f'(x)) = \operatorname{sign}(-2x).$$

Por tanto,

$$\begin{cases} (-\infty,0): \ -2x > 0 \Longrightarrow f' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ es creciente;} \\ (0,\infty): \ -2x < 0 \Longrightarrow f' \leq 0 \Longrightarrow f \text{ es decreciente.} \end{cases}$$

En el punto $x = 0$ la función f pasa de creciente a decreciente. Como conclusión deducimos que $x = 0$ es un **máximo relativo** de f (corresponde a $(0, f(0)) = (0,0)$.

8. Curvatura, puntos de inflexión: Usamos en este punto la derivada segunda de f (hay que ser muy preciso en el cálculo de esta segunda derivada):

$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

Puntos de inflexión: Los candidatos a ser puntos de inflexión de f salen de la ecuación $f''(x) = 0$ (Teorema 1.38), es decir, $6x^2 + 2 = 0$. Este polinomio no tiene raíces reales, así, **f no posee puntos de inflexión** (de hecho, el polinomio es siempre positivo $\boxed{6x^2+2>0}$).
Concavidad/convexidad: Aplicaremos el Teorema 1.38. Para ello, estudiaremos el signo de f''. Sabemos que el numerador de f'' es siempre positivo. Por tanto, podemos escribir,

$$\operatorname{sign}(f'') = \operatorname{sign}\left(x^2-1\right)^3 = \operatorname{sign}\left(x^2-1\right).$$

Como este signo ha sido estudiado en el punto 5, obtenemos:

$$\begin{cases} (-\infty,-1): \ \left(x^2-1\right) > 0 \Longrightarrow f'' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ es convexa;} \\ (-1,1): \ \left(x^2-1\right) < 0 \Longrightarrow f'' \leq 0 \Longrightarrow f \text{ es cóncava;} \\ (1,\infty): \ \left(x^2-1\right) > 0 \Longrightarrow f'' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ es convexa.} \end{cases}$$

9. Representación: La gráfica de la función f aparece en la Figura 1.23.

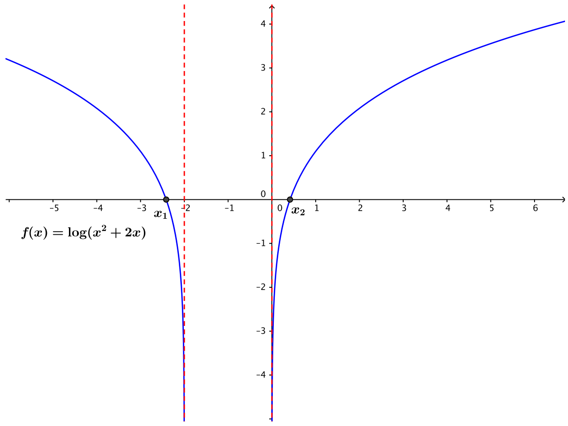


Figura 1.24: Gráfica del Ejemplo 1.47.

Ejemplo 1.47
Representar gráficamente la función

$$f(x) = \log(x^2 + 2x)$$

estudiando previamente: dominio de definición, signo, simetría, cortes con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, y puntos de inflexión.

Seguimos los puntos que aparecen más arriba:

1. Dominio: Al tratarse de un logaritmo el dominio viene dado como

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\},$$

con $p(x)$ el polinomio $\boxed{p(x) = x^2 + 2x}$. Estudiemos el signo de p. Sus raíces son $x = -2$ y $x = 0$. Por tanto,

$$\boxed{(-\infty, -2): \ p(x) = x^2 + 2x > 0}; \quad \boxed{(-2, 0): \ p(x) = x^2 + 2x < 0}; \quad \boxed{(0, \infty): \ p(x) = x^2 + 2x > 0}.$$

Así, $\boxed{D(f) = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)}$.

2. Continuidad/derivabilidad: Teniendo en cuenta que f es composición de funciones continuas y derivables, podemos concluir que f es **continua y derivable** en $D(f)$.

3. Simetrías y periodicidad: El dominio $D(f)$ no es simétrico. Por tanto, no tiene sentido la simetría.

4. Cortes con los ejes:

- Eje $\overline{OX}$: Los cortes con este eje corresponden a las raíces de f:

$$\boxed{\log(x^2 + 2x) = 0} \iff \boxed{x^2 + 2x = 1} \iff \boxed{x^2 + 2x - 1 = 0} \iff \boxed{\begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{2}, \\ x_2 = -1 + \sqrt{2}. \end{cases}}$$

  Así, los puntos de corte son $\boxed{(x_1, 0), \ (x_2, 0)}$.

- Eje $\overline{OY}$: El punto 0 no está en el dominio: $\boxed{0 \notin D(f)}$. Por tanto, f no corta al eje $\overline{OY}$.

5. Signo: Para estudiar el signo de f tenemos que tener en cuenta que la función logaritmo es positiva o negativa dependiendo de si su argumento (en nuestro caso, el polinomio $p(x) = x^2 + 2x$) es mayor o menor de 1. Como $x^2 + 2x = 1$ tenía como raíces x_1 y x_2, estudiamos los intervalos:

$$\begin{cases} (-\infty, x_1): \ \left(x^2 + 2x\right) > 1 \Longrightarrow f(x) = \log\left(x^2 + 2x\right) \geq 0; \\ (x_1, -2): \ \left(x^2 + 2x\right) < 1 \Longrightarrow f(x) = \log\left(x^2 + 2x\right) \leq 0; \\ (0, x_2): \ \left(x^2 + 2x\right) < 1 \Longrightarrow f(x) = \log\left(x^2 + 2x\right) \leq 0; \\ (x_2, \infty): \ \left(x^2 + 2x\right) > 1 \Longrightarrow f(x) = \log\left(x^2 + 2x\right) \geq 0. \end{cases}$$

6. Asíntotas:

- **Verticales**: Son de la forma $x = a$ con a un número fuera del dominio de la función. Como consecuencia, las candidatas son $\boxed{x = -x_1}$ y $\boxed{x = x_2}$. Estudiemos los límites laterales (hay que tener en cuenta el dominio de f, el signo estudiado en el punto anterior y el comportamiento de la función logaritmo):

$$\boxed{\lim_{x\to -2^-} \log\left(x^2+2x\right) = -\infty}; \qquad \boxed{\lim_{x\to 0^+} \log\left(x^2+2x\right) = -\infty};$$

Conclusión: Hay dos asíntotas verticales: $\boxed{x = -2}$ (por su izquierda) y $\boxed{x = 0}$ (por su derecha).

- **Horizontales**: Si existen, son de la forma $y = b$, con b un número real dado por

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \log\left(x^2+2x\right) = +\infty,$$

(en este límite hemos tenido en cuenta el comportamiento de la función logaritmo). **Conclusión**: No hay asíntotas horizontales. Podría haber oblicuas.

- **Oblicuas**: Son de la forma $y = mx + n$ con $m, n \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$. El coeficiente m está dado por:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log\left(x^2+2x\right)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indet.)} = \text{(L'Hôpital)} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x+2}{x^2+2x}}{1} = 0.$$

Como $m = 0$, entonces no hay asíntotas oblicuas.

7. Monotonía, extremos: Para este punto utilizaremos la derivada primera de f:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x}.$$

Puntos críticos: Son los candidatos a ser máximo o mínimo de f. Se obtienen de la ecuación $\boxed{f'(x) = 0}$. En nuestro caso, obtenemos como solución $\boxed{x = -1 \notin D(f)}$. Como este punto no está en el dominio, concluimos que f no tiene máximos ni mínimos.

Crecimiento/decrecimiento: Utilizaremos el Teorema 1.31 y, así, nuestro objetivo es estudiar el signo de f' en el **dominio** de f. Recordemos que en $D(f)$ el polinomio $p(x) = x^2 + 2x > 0$. De aquí deducimos que el denominador de f' es siempre positivo. En consecuencia:

$$\operatorname{sign}(f'(x)) = \operatorname{sign}(2x+2).$$

De aquí,

$$\begin{cases} (-\infty, x_1): \; 2x+2 < 0 \Longrightarrow f' \leq 0 \Longrightarrow f \text{ es decreciente;} \\ (x_2, +\infty): \; 2x+2 > 0 \Longrightarrow f' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ es creciente.} \end{cases}$$

8. Curvatura, puntos de inflexión: Como en el ejemplo anterior, usamos la derivada segunda de f (de nuevo, hay que ser muy preciso en el cálculo):

$$f''(x) = \frac{-2\left(x^2+2x+2\right)}{(x^2+2x)^2}.$$

Puntos de inflexión: Los candidatos a ser puntos de inflexión de f salen de la ecuación $f''(x) = 0$ (Teorema 1.38), es decir, $x^2+2x+2 = 0$. Este polinomio no tiene raíces reales, así, **f no posee puntos de inflexión** (de hecho, el polinomio es siempre positivo $\boxed{x^2+2x+2 > 0}$).

Concavidad/convexidad: Usando el Teorema 1.38, estudiamos el signo de f''. Sabemos que el numerador de f'' es siempre negativo (va multiplicado por -2). Además, el denominador es un cuadrado, por tanto, positivo. Deducimos:

$$f''(x) < 0, \quad \forall x \in D(f) \Longrightarrow f \text{ es cóncava.}$$

9. Representación: La gráfica de la función f aparece en la Figura 1.24.

Tema 2

Cálculo Integral

Dedicaremos este tema a la integración de funciones. Introduciremos el concepto de primitiva o integral indefinida de una función. Estudiaremos sus propiedades y daremos algunas técnicas que nos permitirán realizar el cálculo de algunas primitivas. Introduciremos también el concepto de integral definida y veremos varias aplicaciones de este concepto.

2.1 La integral indefinida

La integral indefinida ó cálculo de primitivas es, en cierto modo, un proceso "inverso" al de calcular la derivada de una función. Dada una función $f(x)$ nos planteamos ¿es f la derivada de alguna función? Y, si lo es, ¿cómo podemos calcularla?

Definición 2.1 (Primitivas)
Sean $F, f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas en el intervalo (a, b). Se dice que F es una **primitiva** *de f si F es derivable en (a, b) y se satisface $\boxed{F'(x) = f(x)}$ para cualquier $x \in (a, b)$. En este caso escribiremos*

$$\int f(x)\, dx = F(x).$$

Ejemplo 2.2

1. La función $F_1(x) = 1$ es una **primitiva** de la función $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}$ puesto que F_1 es derivable en $\mathbb{R}$ y $F_1'(x) = f(x) = 0$. Por otro lado, la función $F_2(x) = 5$ es también una primitiva de f en $\mathbb{R}$. Efectivamente, F_2 es derivable en $\mathbb{R}$ y $F_2'(x) = 0 = f(x)$.
2. La función $G_1(x) = 3x$ es una primitiva de $g(x) = 3$ en $\mathbb{R}$. En efecto, G_1 es derivable en $\mathbb{R}$ y $G_1'(x) = 3 = g(x)$. Podemos escribir,
$$\int 3\, dx = 3x.$$
Obsérvese que, como en el anterior ejemplo, podemos obtener otras primitivas de la función g. No es difícil comprobar que cualquier función $G(x) = 3x + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una **constante**, es una primitiva de g en $\mathbb{R}$. También podemos escribir
$$\int 3\, dx = 3x + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$
3. Finalmente, la función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una **primitiva** de $f(x) = \cos x$ en $\mathbb{R}$. También, cualquier función de la forma $F(x) = \operatorname{sen} x + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una **constante**, es una primitiva de f en $\mathbb{R}$. Escribiremos:
$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

Teorema 2.3
Sean $F_1, F_2 : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos **primitivas** *de $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ en (a,b). Entonces, su diferencia es una función constante en (a,b):*

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \text{ con } C \in \mathbb{R} \text{ una constante.}$$

De este resultado deducimos que si conocemos una primitiva F de la función f, entonces cualquier otra primitiva de f es de la forma $F(x) + C$, siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. Escribiremos a partir de ahora:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

y diremos que $F(x) + C$ es la **integral indefinida** de f.

Ejemplo 2.4

1. $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante.
2. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante.
3. $\displaystyle\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante.
4. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante.

Ejemplo 2.5
Comprobar

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Comprobemos la igualdad anterior. Para ello, consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ con dominio $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Consideremos también la función

$$F(x) = \log|x| = \begin{cases} \log(-x) & \text{si } x \in (-\infty, 0), \\ \log(x) & \text{si } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Es fácil comprobar que F es continua y derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Además,

$$F'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{-1}{-x} & \text{si } x \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (0, \infty) \end{array} \right\} = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Deducimos de aquí la igualdad que aparece en el enunciado.

2.2 Integrales inmediatas. Cambio de variable

Como hemos dicho más arriba, el cálculo de primitivas es el proceso inverso al cálculo de derivadas. Por tanto, sin más que consultar la tabla de derivadas de las funciones elementales dada en el Tema 1, podemos obtener una lista de **integrales inmediatas** (ver más abajo). Complementamos la lista de integrales inmediatas con otra lista (que también consideraremos integrales inmediatas) que es consecuencia de la Regla de la Cadena:

Funciones compuestas. Supongamos que F es una primitiva de la función f, es decir, se tiene que $F'(x) = f(x)$. Sea h la función compuesta $h(x) = F(g(x))$. Aplicando la Regla de la Cadena, se tiene

$$h'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Esta igualdad se puede reescribir en términos de integrales indefinidas como:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int h'(x)\, dx = h(x) + C = F(g(x)) + C.$$

La fórmula anterior puede ser entendida como una fórmula de **cambio de variable** en la integral original. Seguidamente introduciremos una nueva notación para designar la derivada de una función que hará que el cambio de variable en la integral sea más sencillo. Si $y = g(x)$ es una función derivable, introducimos la notación:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}(x) = g'(x)} \iff \boxed{dy = g'(x)\, dx}.$$

Con esta nueva notación podemos reescribir la anterior propiedad:

Cambio de variable. Supongamos que f y g son dos funciones dadas, con g derivable. Entonces en la integral

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

podemos llevar a cabo el **cambio de variable** $\boxed{t = g(x)}$ que nos proporciona $\boxed{dt = g'(x)\, dx}$. Así, la integral anterior se transforma en

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ dt = g'(x)\, dx \end{bmatrix} = \int f(t)\, dt}.$$

Veamos dos propiedades de la integral indefinida que serán muy útiles en el cálculo de primitivas:

Propiedades:

1. Si $k \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces $\displaystyle\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$.
2. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

Funciones elementales	Funciones compuestas
$\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$	$\displaystyle\int g(x)^\alpha\, g'(x)\,dx = \frac{g(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{g(x)} g'(x)\,dx = \log\lvert g(x)\rvert + C$
$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$	$\displaystyle\int e^{g(x)} g'(x)\,dx = e^{g(x)} + C$
$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}\,a^x + C$	$\displaystyle\int a^{g(x)} g'(x)\,dx = \frac{1}{\log a}\,a^{g(x)} + C$
$\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\displaystyle\int \operatorname{sen}(g(x))\,g'(x)\,dx = -\cos(g(x)) + C$
$\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\displaystyle\int \cos(g(x))\,g'(x)\,dx = \operatorname{sen}(g(x)) + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(g(x))}\,g'(x)\,dx = \operatorname{tg}(g(x)) + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(g(x))}\,g'(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(g(x)) + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{1+g(x)^2}\,g'(x)\,dx = \operatorname{arc\,tg}(g(x)) + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)\,dx = \operatorname{arc\,sen}(g(x)) + C$

Mostramos a continuación diferentes ejemplos de cálculo:

Ejemplo 2.6
Calcular las siguientes integrales de tipo polinómico:

1. $\displaystyle\int \left(x^3 - 2x^2 + 3x - 7\right)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 7x + C.$
2. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2\right)\,dx = \int \left(x^{-2} + 4x^{-3/2} + 2\right)\,dx = -\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx = \int \left(x - 4x^{\frac{1}{3}-2}\right)\,dx = \int \left(x - 4x^{-\frac{5}{3}}\right)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - 4\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-2/3} + C = \frac{1}{2}x^2 + 6x^{-\frac{2}{3}} + C.$

Ejemplo 2.7
Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int 3e^{2x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=2x \\ dt = 2\,dx \end{array}\right] = \frac{3}{2}\int e^t\,dt = \frac{3}{2}e^t + C = \frac{3}{2}e^{2x} + C.$
2. $\displaystyle\int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^2\sqrt{x}}\right)dx = 3\int e^{-2x}\,dx + \int x^{-2}\,dx + 4\int x^{-5/2}\,dx = -\frac{3}{2}e^{-2x} - \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{8}{3}x^{-3/2} + C.$
3. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt = -\operatorname{sen} x\,dx \end{array}\right] = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{e^x}{3+4e^x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=3+4e^x \\ dt = 4e^x\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{4}\log|t| = \frac{1}{4}\log|3+4e^x| + C = \frac{1}{4}\log(3+4e^x) + C.$

Ejemplo 2.8
Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \cos(5+2x)\,dx = \left[\begin{array}{c} t=5+2x \\ dt = 2\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(5+2x) + C.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(7x)}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=7x \\ dt = 7\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{7}\int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{7}\operatorname{tg} t + C = \frac{1}{7}\operatorname{tg}(7x) + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+2x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}\,x\right)^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{2}\,x \\ dt = \sqrt{2}\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} t = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\,x\right) + C.$
4. $\displaystyle\int x\sqrt{5+3x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=5+3x^2 \\ dt = 6x\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{6}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{6}\frac{t^{3/2}}{(3/2)} = \frac{1}{9}\left(5+3x^2\right)^{3/2} + C.$

Ejemplo 2.9
Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int (x^2-1)^4\,x\,dx = \left[\begin{array}{c} t=x^2-1 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int t^4\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^5}{5} = \frac{1}{10}\left(x^2-1\right)^5 + C.$
2. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\sec^2 x\,dx = \int \operatorname{tg} x\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\operatorname{tg} x \\ dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C.$
3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,\cos x\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\operatorname{sen} x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{4x}{2+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=2+x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right] = 2\int \frac{1}{t}\,dt = 2\log|t| + C = 2\log\left|2+x^2\right| + C = 2\log\left(2+x^2\right) + C.$

Ejemplo 2.10
Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{3}{2x+1}\,x\,dx = \left[\begin{array}{c} t=2x+1 \\ dt = 2\,dx \end{array}\right] = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{3}{2}\log|t| = \frac{3}{2}\log|2x+1| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=x-2 \\ dt = dx \end{array}\right] = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -t^{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^3}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=2x+3 \\ dt = 2\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+3)^2} + C.$

4. $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{3}{3x^2+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x \\ dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\,dx \end{array}\right] = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ \displaystyle\qquad = \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arc\,tg} t + C = \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) + C. \end{array}\right.$$

A veces el cambio de variable que hay que practicar en una integral no es demasiado evidente. Solo la práctica hace que, a veces, se identifique el cambio más apropiado. Una regla sencilla que funciona en muchas ocasiones es: hacer el cambio que elimine «lo que más molesta». Los siguientes ejemplos ilustran esta regla.

Ejemplo 2.11
Calcular la integral:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx.$$

En esta integral el término que complica la expresión del integrando es $\sqrt[3]{1+2x}$. Por tanto, podemos intentar aplicar un cambio que elimine la raíz cúbica que aparece en el denominador. Así, hacemos el cambio

$$\sqrt[3]{1+2x} = t \iff t^3 = 1+2x \iff \boxed{x = \frac{1}{2}\left(t^3-1\right)} \implies \boxed{dx = \frac{3}{2}t^2\,dt}$$

Con el cambio anterior, la integral queda así:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}\left(t^3-1\right)^2}{t}\,\frac{3}{2}\,t^2\,dt = \frac{3}{8}\int t\,\left(t^3-1\right)^2\,dt = \frac{3}{8}\int \left(t^7 - 2t^4 + t\right)\,dt \\ \displaystyle\qquad = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}t^8 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^2\right) + C = \frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8 - \frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5 + \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2 + C. \end{array}\right.$$

Importante: Una vez que se establece el cambio de variable, en la nueva integral **solo puede aparecer la nueva variable**. Al finalizar el proceso de integración, hay que retornar a la variable original deshaciendo el cambio.

Ejemplo 2.12
Calcular la integral:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx.$$

En esta integral aparecen varias funciones exponencial con distinto exponente. Parece razonable intentar un cambio que haga desaparecer las exponenciales. Así, hacemos el cambio:

$$e^x = t \iff \boxed{x = \log t} \implies \boxed{dx = \frac{1}{t}\,dt}.$$

Con este cambio anterior, se tiene $\boxed{e^{3x} = t^3}$ y $\boxed{e^{2x} = t^2}$. Por tanto, la integral se transforma en:

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx &= \int \frac{t^3}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\,dt \\ &= t - \operatorname{arc\,tg} t + C = e^x - \operatorname{arc\,tg}\left(e^x\right) + C. \end{aligned} \right.$$

Para terminar esta sección incluimos algún ejemplo más que combina el cambio de variable con las integrales inmediatas:

Ejemplo 2.13
Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$. **2.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx$. **3.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$. **4.** $\displaystyle\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\,dx$.

1. En esta integral el problema procede de la raíz que aparece en el denominador del integrando. Vamos a hacer un cambio de variable que eliminará esa raíz: $\boxed{\sqrt{x-1} = t} \iff \boxed{x - 1 = t^2}$. Con este cambio obtenemos

$$\boxed{x = 1 + t^2} \Longrightarrow \boxed{dx = 2t\,dt},$$

y la integral se convierte en

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t} 2t\,dt = 2\int \left(1+t^2\right)^3\,dt = 2\int \left(1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6\right)\,dt \\ &= 2\left(t + t^3 + \frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7\right) + C = 2\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)^3} + \frac{3}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{1}{7}\sqrt{(x-1)^7}\right) + C. \end{aligned} \right.$$

2. En esta integral aparece una función $(\log x)$ y su derivada $(1/x)$ multiplicando a dx. Así, el cambio más sencillo es: $\boxed{t = \log x}$:

$$\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \log x \\ dt = \dfrac{1}{x}\,dx \end{array} \right] = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \frac{1}{3/2}\,t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\left(\log x\right)^{3/2} + C.$$

3. Como en el punto 1 de este ejemplo, la dificultad surge de la presencia de la raíz cuarta y de la raíz cuadrada. Vamos a proponer un cambio de variable que elimine ambas raíces: $\boxed{x = t^4}$. De esta manera,

$$\boxed{x = t^4} \Longrightarrow \boxed{dx = 4t^3\,dt}, \quad \boxed{\sqrt[4]{x} = t}, \quad \boxed{\sqrt{x} = t^2}.$$

Podemos ya aplicar el cambio a la integral:

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{t}{1+t^2}\,4t^3\,dt = 4\int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt = 4\int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt \\ &= 4\left(\frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{arc\,tg} t\right) + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x} + 4\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt[4]{x}\right) + C. \end{aligned} \right.$$

4. Razonamos como en el Ejemplo 2.12 y llevamos a cabo un cambio que haga desaparecer las exponenciales que aparecen en el integrando:

$$e^x = t \iff \boxed{x = \log t} \Longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{t}\,dt}.$$

Con este cambio anterior, se tiene $\boxed{e^{2x} = t^2}$. Por tanto, la integral se convierte en:

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{t-3t^2}{1+t}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1-3t}{1+t}\,dt = \int \left(-3 + \frac{4}{t+1}\right) dt \\ &= -3t + 4\log(t+1) + C = -3e^x + 4\log(e^x+1) + C. \end{aligned} \right.$$

2.3 Integración de funciones racionales: método de las fracciones simples.

En esta sección daremos un método para calcular integrales racionales. Estas tienen la forma

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

donde p y q son polinomios. Si se tiene que $\boxed{\text{grado}\, p \geq \text{grado}\, q}$, entonces lo primero que hay que hacer es dividir ambos polinomios y obtener

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$c(x)$ (el cociente) y $r(x)$ (el resto) son dos nuevos polinomios que satisfacen $\boxed{\text{grado}\, r < \text{grado}\, q}$. Así, la integral original se transforma en:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx.$$

Veamos un ejemplo

Ejemplo 2.14
Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{2x^2-3x+2}{2x-1}\,dx$$

Como hemos dicho más arriba, se trata de una integral racional donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Por tanto, hay que realizar el cociente, obteniendo una integral más sencilla:

$$\int \frac{2x^2-3x+2}{2x-1}\,dx = \int \left[x - 1 + \frac{1}{2x-1}\right] dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\log|2x-1| + C$$

Por tanto, a partir de ahora supondremos que en la integral racional el numerador tiene un grado menor que el denominador:

$$\boxed{\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \quad \text{con grado}\, p < \text{grado}\, q}.$$

Descomposición en fracciones simples:

Para resolver integrales racionales $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, con $p(x)$ y $q(x)$ polinomios tales que $\boxed{\text{grado}\, p < \text{grado}\, q}$, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Factorizamos el denominador $q(x)$, es decir, expresamos $q(x)$ como producto de polinomios irreducibles.

2. Siguiendo los factores de $q(x)$, escribimos el cociente $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como **suma de fracciones simples**, es decir, como suma de fracciones sencillas que responden a la forma

$$\boxed{\frac{A}{(ax+b)^n}}, \quad \boxed{\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}}, \quad n \geq 1.$$

En los ejemplos que vienen a continuación veremos cómo se aplica el método y resolveremos las integrales de las fracciones simples (salvo en el caso de la segunda fracción simple cuando $n > 1$, que no será considerada en este curso).

El método de descomposición en fracciones simples cambia en función de las raíces de la función $q(x)$ (denominador). Para que resulte más sencillo, lo mostraremos en ejemplos concretos:

Ejemplo 2.15 (Raíces reales simples)
Calcular la integral

$$\int \frac{x}{2x^2-3x+1}\,dx$$

Se trata de una integral racional donde el grado del denominador es menor que el grado del denominador. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el **método de descomposición en fracciones simples**:

1. **Factorización**: En este primer paso el punto clave está en **factorizar** el polinomio que aparece en el denominador: $\boxed{q(x) = 2x^2 - 3x + 1}$.

   Llevemos a cabo la factorización de $q(x)$. Obsérvese que las raíces de este polinomio son $x = 1$ y $x = 1/2$. Teniendo en cuenta además que el **coeficiente líder** de q es 2, la factorización queda:

$$q(x) = \boxed{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = (2x-1)(x-1).$$

2. **Fracciones simples**: Con la anterior factorización, escribimos el integrando como:

$$\frac{x}{2x^2-3x+1} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1}$$

   donde A y B son dos coeficientes a determinar. Operando en la anterior igualdad, deducimos:

$$\frac{x}{2x^2-3x+1} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(2x-1)}{(2x-1)(x-1)} \iff \boxed{x = A(x-1)+B(2x-1)}.$$

   Para determinar los dos coeficientes A y B damos valores a la variable x. La resolución se simplifica si damos los valores correspondientes a las raíces de $q(x)$. Hacemos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \implies \dfrac{1}{2} = -\dfrac{A}{2} \iff \boxed{A = -1}, \\ x = 1 \implies 1 = B \iff \boxed{B = 1}. \end{cases}$$

De los dos puntos anteriores obtenemos:

$$\frac{x}{2x^2-3x+1} = \frac{-1}{2x-1} + \frac{1}{x-1}.$$

Integrando,

$$\int \frac{x}{2x^2-3x+1}\,dx = \int \frac{-1}{2x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = -\frac{1}{2}\log|2x-1| + \log|x-1| + C$$
$$= \log\left(\frac{|x-1|}{\sqrt{|2x-1|}}\right) + C.$$

Ejemplo 2.16 (Raíces reales simples)
Calcular la integral

$$\int \frac{1}{4x - x^2}\,dx.$$

De nuevo, el grado del denominador es menor que el grado del numerador. Podemos seguir los mismos pasos que en el ejemplo anterior:

1. **Factorización**: Factorizamos el denominador $\boxed{q(x) = 4x - x^2}$ directamente:

$$\boxed{q(x) = 4x - x^2 = x\,(4 - x)}$$

2. **Fracciones simples**: Con la anterior factorización, escribimos el integrando como:

$$\frac{1}{4x - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{4 - x}$$

donde A y B son dos coeficientes a determinar. Operando en la anterior igualdad, deducimos:

$$\frac{1}{4x - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{4 - x} = \frac{A(4 - x) + Bx}{x(4 - x)} \iff \boxed{1 = A(4 - x) + Bx}.$$

De nuevo, para determinar los dos coeficientes A y B damos valores a la variable x. La resolución se simplifica si damos los valores correspondientes a las raíces de $q(x)$. Hacemos:

$$\begin{cases} x = 0 \implies 1 = 4A \iff \boxed{A = \dfrac{1}{4}}, \\ x = 4 \implies 1 = 4B \iff \boxed{B = \dfrac{1}{4}}. \end{cases}$$

De los dos puntos anteriores obtenemos:

$$\frac{1}{4x - x^2} = \frac{1/4}{x} + \frac{1/4}{4 - x}.$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4x - x^2}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{4 - x}\,dx = \frac{1}{4}\log|x| - \frac{1}{4}\log|4 - x| + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left(\frac{|x|}{|4 - x|}\right) + C = \log\left(\sqrt[4]{\frac{|x|}{|4 - x|}}\right) + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.17 (Raíces reales simples y raíces reales múltiples)
Calcular la integral

$$\int \frac{x}{(2 + 3x)^2}\,dx.$$

Comprobamos que se trata de una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador. Así, podemos aplicar el **método de descomposición en fracciones simples**, aunque, al aparecer raíces dobles en el denominador ($x = -2/3$), el método cambia ligeramente:

1. **Factorización**: El denominador está ya factorizado:

$$\boxed{q(x) = (2 + 3x)^2}$$

2. **Fracciones simples**: Con la anterior factorización, escribimos el integrando como:

$$\frac{x}{(2+3x)^2} = \frac{A}{2+3x} + \frac{B}{(2+3x)^2}$$

donde A y B son dos coeficientes a determinar. Operando en la anterior igualdad, deducimos:

$$\frac{x}{(2+3x)^2} = \frac{A}{2+3x} + \frac{B}{(2+3x)^2} = \frac{A(2+3x)+B}{(2+3x)^2} \iff \boxed{A(2+3x)+B=x}.$$

De nuevo, para determinar los dos coeficientes A y B damos valores a la variable x. Como antes, elegimos como primer valor la raíz de $q(x)$. El segundo valor puede ser cualquier otro. Hacemos:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \implies B=-\dfrac{2}{3} \iff \boxed{B=-\dfrac{2}{3}}, \\ x=0 \implies 2A+B=0 \iff \boxed{A=\dfrac{1}{3}}. \end{cases}$$

De los dos puntos anteriores obtenemos:

$$\frac{x}{(2+3x)^2} = \frac{1/3}{2+3x} - \frac{2/3}{(2+3x)^2}.$$

Integrando,

$$\int \frac{x}{(2+3x)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+3x}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{(2+3x)^2}\,dx = \frac{1}{9}\log|2+3x| + \frac{2}{9}\,\frac{1}{2+3x} + C.$$

Ejemplo 2.18 (Raíces reales simples y raíces reales múltiples)
Calcular la integral:

$$\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx$$

Como en los ejemplos anteriores, se trata de una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador. Aplicamos el **método de descomposición en fracciones simples**:

1. **Factorización**: Podemos factorizar el denominador de manera sencilla:

$$\boxed{q(x)=x^3+x^2=x^2(x+1)}.$$

2. **Fracciones simples**: Con la anterior factorización, escribimos el integrando como:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

con A, B y C coeficientes a determinar. Operando en la anterior igualdad, deducimos:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)} \iff \boxed{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=1}.$$

Como antes, determinamos los dos coeficientes A, B y C dando valores a la variable x. Elegimos como valores las raíces de $q(x)$. El tercer valor puede ser cualquier otro. Hacemos:

$$\begin{cases} x=0 \implies B=1 \iff \boxed{B=1}, \\ x=-1 \implies C=1 \iff \boxed{C=1}, \\ x=1 \implies 2A+2B+C=1 \iff \boxed{A=-1}. \end{cases}$$

De los dos puntos anteriores obtenemos:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

Integrando,

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = -\log|x| - \frac{1}{x} + \log|x+1| + C$$
$$= \log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C.$$

Ejemplo 2.19 (Raíces reales simples y raíces reales múltiples)
Calcular la integral:

$$\int \frac{x}{4x^3-3x-1}\,dx$$

Se trata de una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador. Aplicamos el **método de descomposición en fracciones simples**:

1. **Factorización**: Factorizar el denominador $q(x)$ calculando sus raíces. Es fácil ver que q tiene como raíces $x=-1/2$ (doble) y $x=1$. Así,

$$\boxed{q(x) = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x-1) = (2x+1)^2(x-1)}.$$

2. **Fracciones simples**: Escribimos el integrando como:

$$\frac{x}{4x^3-3x-1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

con A, B y C coeficientes a determinar. Operando en la anterior igualdad, deducimos:

$$\frac{x}{4x^3-3x-1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(2x+1)(x-1)+B(x-1)+C(2x+1)^2}{(2x+1)^2(x-1)},$$

o, de manera equivalente,

$$x = A(2x+1)(x-1)+B(x-1)+C(2x+1)^2.$$

Determinamos los dos coeficientes A, B y C dando valores a la variable x (elegimos como valores las raíces de $q(x)$ y un tercer valor arbitrario). Hacemos:

$$\left\{\begin{array}{llll} x=-\frac{1}{2} & \Longrightarrow & -\frac{3}{2}B = -\frac{1}{2} & \Longleftrightarrow \boxed{B=\frac{1}{3}}, \\ x=1 & \Longrightarrow & 9C=1 & \Longleftrightarrow \boxed{C=\frac{1}{9}}, \\ x=0 & \Longrightarrow & -A-B+C=0 & \Longleftrightarrow \boxed{A=-\frac{2}{9}}. \end{array}\right.$$

De los dos puntos anteriores obtenemos:

$$\frac{x}{4x^3-3x-1} = \frac{-2/9}{2x+1} + \frac{1/3}{(2x+1)^2} + \frac{1/9}{x-1}$$

Integrando,

$$\int \frac{x}{4x^3-3x-1}\,dx = -\frac{2}{9}\int \frac{1}{2x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$
$$= -\frac{1}{9}\log|2x+1| - \frac{1}{6}\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{9}\log|x-1| + C.$$

Ejemplo 2.20 (Factor irreducible cuadrático)
Calcular la integral:

$$\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx.$$

Se trata de una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador. Aplicamos el **método de descomposición en fracciones simples**:

1. **Factorización**: El denominador $q(x)$ ya está factorizado. Obsérvese que el factor x^2+1 no tiene raíces y, por tanto, no se puede factorizar: es un factor irreducible cuadrático.

2. **Fracciones simples**: La presencia del factor irreducible cuadrático hace que las fracciones simples cambien ligeramente. En este caso escribimos el integrando como:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

con A, B y C coeficientes a determinar. Operando en la anterior igualdad, deducimos:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)},$$

o, de manera equivalente,

$$2x-1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x.$$

Como en los ejemplos anteriores, eterminamos los dos coeficientes A, B y C dando valores a la variable x (elegimos como valores la raíz de $q(x)$ y un dos valores arbitrarios). Hacemos:

$$\begin{cases} x=0 & \Longrightarrow \quad -1 = A & \Longleftrightarrow \quad \boxed{A=-1}, \\ x=1 & \Longrightarrow \quad 1 = 2A+B+C & \Longleftrightarrow \quad \boxed{B+C=3}, \\ x=-1 & \Longrightarrow \quad -3 = 2A+B-C & \Longleftrightarrow \quad \boxed{B-C=-1}. \end{cases}$$

El sistema de dos ecuaciones es fácilmente resoluble dando $\boxed{B=1}$ y $\boxed{C=2}$

De los dos puntos anteriores obtenemos:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx &= -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx \\ &= -\log|x| + \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + 2\operatorname{arc\,tg} x + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.21
Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{(2+\operatorname{sen} t)^2}\,dt.$$

Se trata de una integral que no es racional, pero que se puede convertir en racional si hacemos un cambio de variable. Hacemos el cambio $\boxed{x=\operatorname{sen} t}$ (la variable original es t y la nueva variable es x) que hace $\boxed{dx=\cos t\,dt}$. De esta manera,

$$\int \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{(2+\operatorname{sen} t)^2}\,dt = \int \frac{x}{(2+x)^2}\,dx.$$

Ahora ya tenemos una integral racional donde el grado del numerador es menor que el del denominador. Aplicamos el **método de descomposición en fracciones simples**:

1. **Factorización**: El denominador está ya factorizado:

$$\boxed{q(x) = (2+x)^2}$$

2. **Fracciones simples**: Con la anterior factorización, escribimos el integrando como:

$$\frac{x}{(2+x)^2} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{(2+x)^2} = \frac{A(2+x)+B}{(2+x)^2} \iff \boxed{A(2+x)+B = x},$$

donde A y B son los coeficientes que tenemos que determinar. De nuevo, damos valores a la variable x. Como antes, elegimos como primer valor la raíz de $q(x)$. El segundo valor puede ser cualquier otro. Hacemos:

$$\begin{cases} x = -2 \implies B = -2 \iff \boxed{B = -2}, \\ x = 0 \implies 2A + B = 0 \iff \boxed{A = 1}. \end{cases}$$

De los dos puntos anteriores obtenemos:

$$\frac{x}{(2+x)^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{-2}{(2+x)^2}.$$

Integrando,

$$\int \frac{x}{(2+x)^2}\,dx = \int \frac{1}{2+x}\,dx - 2\int \frac{1}{(2+x)^2}\,dx = \log|2+x| + \frac{2}{2+x} + C.$$

Deshaciendo el cambio introducido más arriba obtenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{(2+\operatorname{sen} t)^2}\,dt = \log|2+\operatorname{sen} t| + \frac{2}{2+\operatorname{sen} t} + C.$$

2.4 Integración por partes

En esta sección vamos a estudiar una técnica de integración que, en algunas situaciones, es bastante efectiva. Está basada en la fórmula de la derivada de un producto. Consideremos dos funciones derivables $u(x)$ y $v(x)$. Entonces, el producto $h(x) = u(x)\cdot v(x)$ es derivable y

$$h'(x) = (u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Si integramos esta expresión, obtenemos

$$\int h'(x)\,dx = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx \iff h(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx.$$

Teniendo en cuenta que $h(x) = u(x)\cdot v(x)$, deducimos

Fórmula de integración por partes:
Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables, se tiene:

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx}.$$

Con la notación $dv = v'(x)\,dx$ y $du = u'(x)\,dx$, a veces esta fórmula se escribe como

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}.$$

Obsérvese que en en la fórmula anterior hay una función que juega el papel de función “a derivar” (la función u) y otra ($v'(x)$) que juega el papel de función “a integrar”. La dificultad en su aplicación radica en identificar quién es u y quién dv bajo el signo integral.

Ejemplo 2.22
Calcular las integrales:

1. $\displaystyle\int \log x\, dx$. **2.** $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.

1. En este caso, elegimos (no parece haber otra elección)

$$\begin{cases} u = \log x & \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = dx & \Longrightarrow v = x. \end{cases}$$

Aplicando la fórmula deducimos,

$$\int \log x\, dx = x\, \log x - \int dx = x\, \log x - x + C = x(\log x - 1) + C.$$

2. Repetimos el argumento anterior y tomamos (no parece haber mejor opción):

$$\begin{cases} u = \operatorname{arc\,tg} x & \Longrightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \\ dv = dx & \Longrightarrow v = x \end{cases}$$

De nuevo, de la fórmula de integración por partes deducimos

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x\, \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x\, \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\, \log\left(1+x^2\right) + C.$$

Veamos algún ejemplo más:

Ejemplo 2.23
Calcular las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int x\, e^x\, dx$. **2.** $\displaystyle\int x\, \log x\, dx$. **3.** $\displaystyle\int x^2\, \operatorname{sen}(3x)\, dx$. **4.** $\displaystyle\int e^x\, \cos x\, dx$.

1. Aplicamos la fórmula de integración por partes eligiendo

$$\begin{cases} u = x & \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x\, dx & \Longrightarrow v = e^x. \end{cases}$$

Con esta elección obtenemos:

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C = e^x\, (x-1) + C.$$

Es importante resaltar que también podríamos haber aplicado la fórmula de integración por partes eligiendo:

$$\begin{cases} u = e^x & \Longrightarrow du = e^x\, dx \\ dv = x\, dx & \Longrightarrow v = \dfrac{1}{2} x^2. \end{cases}$$

Es evidente que con este cambio la nueva integral resultante es más difícil que la original (se dejan los detalles al lector).

2. De nuevo, aplicamos la fórmula de integración por partes con:

$$\begin{cases} u = \log x & \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx & \Longrightarrow v = \dfrac{1}{2}x^2. \end{cases}$$

Así:

$$\int x\,\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\log x - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\left(\log x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Es importante resaltar que también podríamos haber aplicado la fórmula de integración por partes eligiendo:

$$\begin{cases} u = x & \Longrightarrow du = dx \\ dv = \log x\,dx & \Longrightarrow v = ?? \end{cases}$$

En este caso no parece sencillo obtener la función v.

3. Para resolver completamente una integral, a veces, hay que aplicar la fórmula de integración por partes varias veces. Esto ocurre en este ejemplo. Comenzamos haciendo:

$$\begin{cases} u = x^2 & \Longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = \operatorname{sen}(3x)\,dx & \Longrightarrow v = -\dfrac{1}{3}\cos(3x). \end{cases}$$

Así:

$$\int x^2\,\operatorname{sen}(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\,x^2\cos(3x) + \frac{2}{3}\int x\,\cos(3x)\,dx.$$

Hacemos ahora

$$\begin{cases} u = x & \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos(3x)\,dx & \Longrightarrow v = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3x). \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int x^2\,\operatorname{sen}(3x)\,dx &= -\frac{1}{3}\,x^2\cos(3x) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\,x\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x)\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{3}\,x^2\cos(3x) + \frac{2}{9}\,x\operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{27}\,\cos(3x) + C. \end{aligned}$$

4. Volvemos a aplicar la fórmula de integración por partes haciendo:

$$\begin{cases} u = e^x & \Longrightarrow du = e^x\,dx \\ dv = \cos x\,dx & \Longrightarrow v = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Si llamamos I a la integral que estamos calculando, obtenemos:

$$I = \int e^x\,\cos x\,dx = e^x\,\operatorname{sen} x - \int e^x\,\operatorname{sen} x\,dx.$$

Volvemos a integrar por partes haciendo

$$\begin{cases} u = e^x & \Longrightarrow du = e^x\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx & \Longrightarrow v = -\cos x. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I = \int e^x\,\cos x\,dx &= e^x\,\operatorname{sen} x - \left(-e^x\,\cos x + \int e^x\,\cos x\,dx\right) \\ &= e^x\,(\operatorname{sen} x + \cos x) - I + C. \end{aligned}$$

Obsérvese que hemos obtenido la misma integral I que queremos calcular y, por tanto, una igualdad donde aparece I. De la igualdad podemos despejar obteniendo:

$$2I = e^x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) \iff I = \frac{1}{2}e^x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right).$$

Así,

$$\int e^x\, \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) + C.$$

Ejercicio 2.24
Calcular las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int x^2\, e^x\, dx.$
2. $\displaystyle\int x\, \operatorname{sen} x\, dx.$
3. $\displaystyle\int e^x\, \operatorname{sen} x\, dx.$

2.5 Integral definida. El Teorema Fundamental del Cálculo.

El concepto de integral definida está íntimamente relacionado con el problema de calcular áreas de regiones planas, concretamente, con el de calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de una curva, $y = f(x)$, el eje $\overline{OX}$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (véase Figura 2.1).

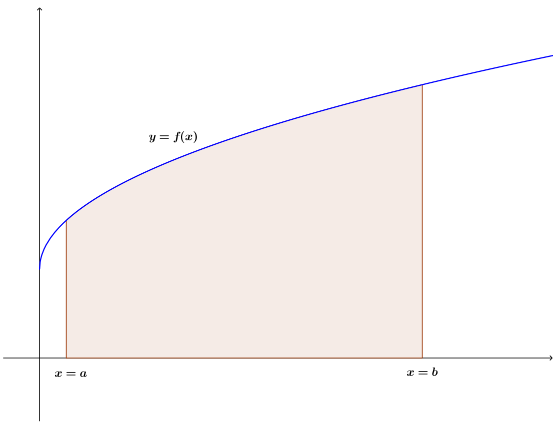


Figura 2.1: Área de la región plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje $\overline{OX}$, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

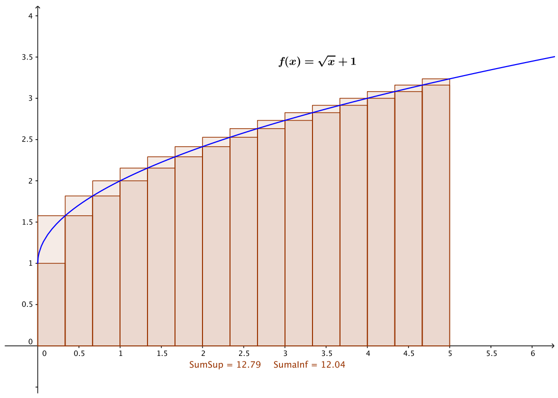


Figura 2.2: Aproximación del área (integral) de la función $f(x) = \sqrt{x} + 1$ entre $x = 0$ y $x = 5$ utilizando sumas inferiores y sumas superiores con $n = 15$ subintervalos. Área exacta $12'45$.

Una manera de aproximar dicha área es dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos (determinados por los puntos $x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_n = b$, mostrados en la Figura 2.3) de longitud $h = (b - a)/n$ y alturas respectivas f_i o F_i (máximo y mínimo de f en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$). El área de uno de estos rectángulos es el producto de su base (h) por su altura (para los triángulos inferiores f_i y para los superiores F_i). Intuitivamente se ve que la suma de las áreas de todos estos rectángulos será mejor aproximación del área de la Figura 2.1 cuanto más grande sea n o, lo que es lo mismo, cuantos más rectángulos se utilicen en la suma (ver Figura 2.2).

En este curso no vamos a dar la definición precisa de integral definida de una función f en un intervalo $[a, b]$, pero ésta utiliza los conceptos de sumas superiores e inferiores asociados a particiones del intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \text{“Sumas Superiores”} = \lim_{n\to+\infty} \text{“Sumas Inferiores”}$$

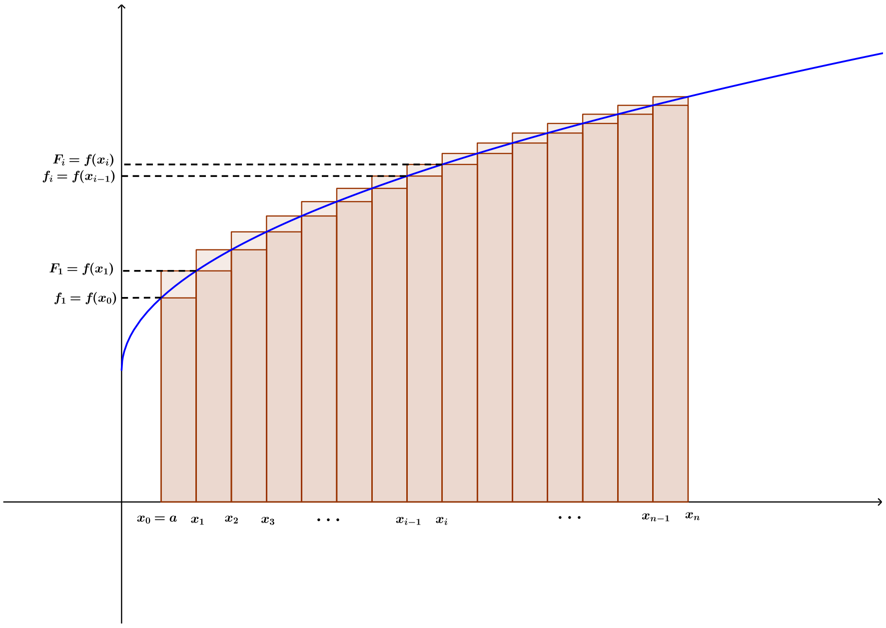


Figura 2.3: Sumas superiores y sumas inferiores asociadas a la función $y = f(x)$ y a una partición de n subintervalos del intervalo $[a, b]$.

Evidentemente, este proceso es excesivamente tedioso y no será utilizado para el cálculo de integrales definidas. Para hacer el cálculo efectivo usaremos el llamado Teorema Fundamental del Cálculo, teorema que relaciona los conceptos de integral y de derivada:

Teorema 2.25 (Teorema Fundamental del Cálculo)
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, la función

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b],$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además, $\boxed{G'(x) = f(x)}$, para cualquier $x \in (a, b)$.

Como consecuencia directa a este resultado obtenemos la llamada regla de Barrow:

Teorema 2.26 (Regla de Barrow)
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y sea F una primitiva en (a, b) de f. Entonces, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b} .$$

La prueba de este resultado es sencilla si usamos el Teorema Fundamental del Cálculo: Como G y F son dos primitivas en (a, b) de f, entonces

$$G(x) = F(x) + C,$$

donde C es una constante. También se tiene que $G(a) = 0 = F(a) + C$, es decir, $C = -F(a)$. Por tanto, $\boxed{G(x) = F(x) - F(a)}$. En particular,

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) = F(b) - F(a).$$

Es importante resaltar que la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

coincide con el área comprendida entre las rectas $x = a$, $x = b$, la función $y = f(x)$ y el eje $\overline{OX}$ solo en el caso en el que f es positiva en el intervalo $[a, b]$. En la sección siguiente veremos con más detalle el cálculo de áreas.

Propiedades de la integral definida:

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, k constante.
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, para cualquier $c \in (a, b)$.
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Ejemplo 2.27
Calcular la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 (1 + x - \operatorname{tg} x)\,dx.$$

Utilizamos la Regla de Barrow. Por tanto, basta calcular una primitiva del integrando:

$$\int_0^1 (1 + x - \operatorname{tg} x)\,dx = \left[x + \frac{x^2}{2} + \log|\cos x|\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{2} + \log|\cos(1)| = 0'884373529613986\ldots.$$

Importante: Como se ha dicho en el Tema 1, los valores de los ángulos que aparecen en las funciones trigonométricas deben estar en **radianes**.

2.6 Aplicaciones de la integral definida

En esta sección veremos algunas aplicaciones interesantes del cálculo integral. Como primera aplicación, veremos que podemos calcular áreas de figuras planas limitadas por gráficas de funciones.

2.6.1 Área comprendida entre dos curvas

Esta es la aplicación más inmediata del cálculo integral. Cuando tenemos una función f no negativa en un intervalo $[a, b]$:

$$\boxed{f(x) \geq 0 \text{ en } [a, b]},$$

entonces, el área de la figura plana limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje $\overline{OX}$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por (ver Figura 2.1):

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}.$$

Veamos algún ejemplo:

Ejemplo 2.28
Calcular el área encerrada por la curva $f(x) = \dfrac{e^{(2+\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}$, el eje $\overline{OX}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

En primer lugar, la función f tiene como dominio $D(f) = (0, \infty)$ y es continua y derivable en él. También, f es positiva en $D(f)$ y, en particular, en el intervalo $[1, 4]$ (ver Figura 2.4). Por tanto, el área que tenemos que calcular está dada por la integral definida:

$$A = \int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 \frac{e^{(2+\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Para llevar a cabo el cálculo efectivo, aplicamos la regla de Barrow. Así, nuestro objetivo es calcular una primitiva de f (tomaremos $C = 0$):

$$F(x) = \int \frac{e^{(2+\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Hacemos el cambio de variable $t = \sqrt{x}$, de donde, $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, y $(C = 0)$

$$F(x) = \int \frac{e^{(2+\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{2+t}\,dt = 2e^{2+t} = 2e^{2+\sqrt{x}}.$$

Finalmente,

$$A = \int_1^4 \frac{e^{(2+\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[e^{2+\sqrt{x}}\right]_{x=1}^{x=4} = 2e^4 - 2e^3 = 2e^3(e-1).$$

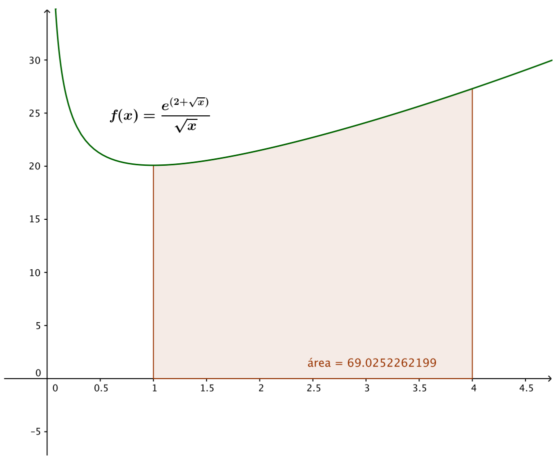


Figura 2.4: Área de la región plana correspondiente al Ejemplo 2.28.

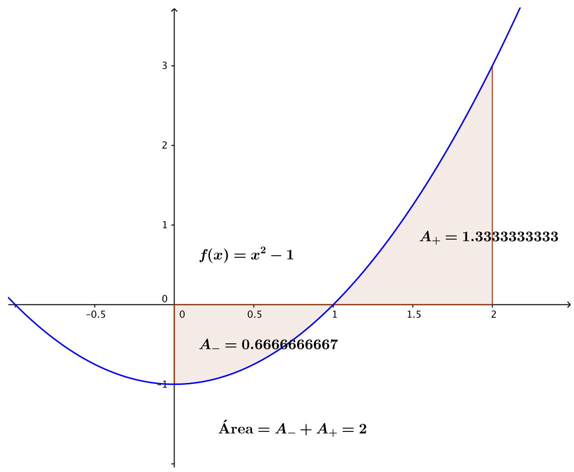


Figura 2.5: Área de la región plana correspondiente al Ejemplo 2.29.

Si la función f es no positiva en el intervalo $[a, b]$:

$$\boxed{f(x) \leq 0 \text{ en } [a, b]},$$

entonces, el área de la figura plana limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje $\overline{OX}$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por:

$$\boxed{A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Por último, si la función $y = f(x)$ cambia de signo en el intervalo $[a, b]$, entonces hay que dividir el intervalo en subintervalos donde la función tenga signo constante. Por ejemplo, en la Figura 2.5, el área A comprendida entre la función f, el eje $\overline{OX}$ y las rectas $x=0$ y $x=2$ está dada por $A=A_-+A_+$, correspondiendo A_- al área del recinto que queda por debajo del eje $\overline{OX}$ y, A_+ al área del recinto que queda por encima del eje $\overline{OX}$:

Ejemplo 2.29
Calcular el área del recinto plano limitado por la función $f(x)=x^2-1$, el eje $\overline{OX}$ y las rectas $x=0$ y $x=2$.

Es fácil comprobar que f se anula en $x=1$ y es negativa en el intervalo $[0,1)$ y positiva en $(1,2]$ (ver Figura 2.5). Por tanto, el área que buscamos viene dada por la expresión:

$$A=A_-+A_+=-\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=-\int_0^1 (x^2-1)\,dx+\int_1^2 (x^2-1)\,dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{x=0}^{x=1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{x=1}^{x=2}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2.$$

Ejemplo 2.30
Calcular el área del recinto plano limitado por la función $f(x)=\log x-1$, el eje $\overline{OX}$ y las rectas $x=1$ y $x=4$.

El dominio de f está dado por $D(f)=(0,\infty)$. Así, f está bien definida en el intervalo $[1,4]$. Además,

$$f(x)=0 \iff \log x-1=0 \iff \boxed{x=e}.$$

Es fácil comprobar que f es negativa en el intervalo $[1,e)$ y positiva en $(e,4]$ (ver Figura 2.6). Por tanto, el área que buscamos viene dada por la expresión:

$$A=A_-+A_+=-\int_1^e f(x)\,dx+\int_e^4 f(x)\,dx=-\int_1^e (\log x-1)\;dx+\int_e^4 (\log x-1)\;dx$$
$$=-\left[x\,\log x-2x\right]_{x=1}^{x=e}+\left[x\,\log x-2x\right]_{x=e}^{x=4}=2e-2+4\log 4-8=0'9817411014,$$

(hemos utilizado el Ejemplo 2.22, donde vimos que una primitiva de la función $g(x)=\log x$ es

$$G(x)=x\,\log x-x).$$

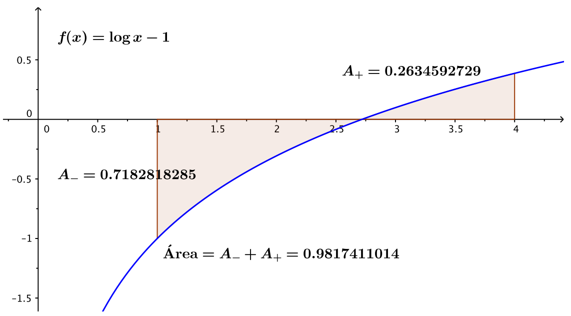


Figura 2.6: Área de la región plana correspondiente al Ejemplo 2.30.

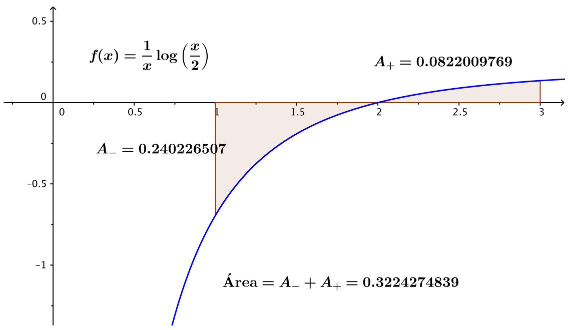


Figura 2.7: Área de la región plana correspondiente al Ejemplo 2.31.

Ejemplo 2.31
Calcular el área del recinto plano limitado por la función $f(x)=\dfrac{1}{x}\log\left(\dfrac{x}{2}\right)$, el eje $\overline{OX}$ y las rectas $x=1$ y $x=3$.

El dominio de f está dado por $D(f) = (0, \infty)$. Así, f está bien definida en el intervalo $[1, 3]$. Además,

$$f(x) = 0 \iff \log\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \iff \boxed{x = 2}.$$

Se tiene que f es negativa en el intervalo $[1, 2)$ y positiva en $(2, 3]$ (ver Figura 2.7). Por tanto, el área que buscamos viene dada por la expresión:

$$A = A_- + A_+ = -\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = -\int_1^2 \frac{1}{x}\log\left(\frac{x}{2}\right)\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\log\left(\frac{x}{2}\right)\,dx.$$

Antes de seguir, calculemos una primitiva de f (lo hacemos aparte). Para ello, haremos el cambio de variable $\boxed{t = \log\left(\frac{x}{2}\right)}$ que proporciona $\boxed{dt = \frac{1}{x}\,dx}$. De aquí, deducimos

$$F(x) = \int \frac{1}{x}\log\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2;$$

(hemos tomado $C = 0$, pues nos basta con calcular una primitiva de f).

Con el cálculo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} A = A_- + A_+ &= -\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = -\left[F(x)\right]_{x=1}^{x=2} + \left[F(x)\right]_{x=2}^{x=3} \\ &= \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 = 2e - 2 + 4\log 4 - 8 = 0'3224274839\ldots \end{aligned}$$

Por último, la integral definida también nos permite calcular el área del recinto plano limitado por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Para ello, hay que conocer la posición relativa de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

En el caso más sencillo, si la gráfica de f está por encima de la gráfica de g en $[a, b]$, es decir, si

$$\boxed{f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, b]},$$

entonces

$$\boxed{A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\,dx}.$$

En el caso general hay que determinar la posición relativa de las dos gráficas y eso es posible si conocemos los puntos de corte entre las dos funciones f y g:

$$\boxed{f(x) = g(x)}.$$

En este caso hay que dividir el intervalo $[a, b]$ en función de las soluciones de la anterior igualdad. En cada subintervalo hay que determinar la posición de las dos funciones. En los ejemplos que vienen a continuación se verá de manera más sencilla cómo hay que plantear el problema cuando las gráficas de las funciones de f y g se cruzan.

Ejemplo 2.32
Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = -x + 2$.

Las curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = -x + 2$ se cortan en los puntos: $x = -1$ y $x = 2$ (ver la Figura 2.8). Se puede comprobar que, entre dichos puntos, la recta $y = -x + 2$ se encuentra por encima de la parábola $y = x^2 - 2x$. Por tanto, el área limitada por ambas curvas viene dada por la expresión:

$$A = \int_{-1}^2 \left[(-x + 2) - (x^2 - 2x)\right]\,dx = \int_{-1}^2 \left[-x^2 + x + 2\right]\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{x=-1}^{x=2} = \frac{9}{2}.$$

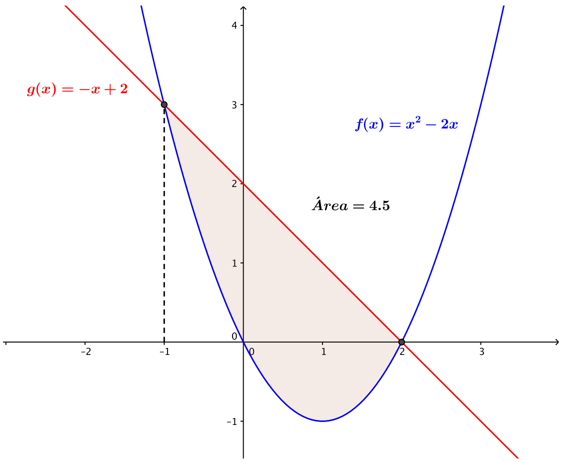


Figura 2.8: Área de la región plana correspondiente al Ejemplo 2.32.

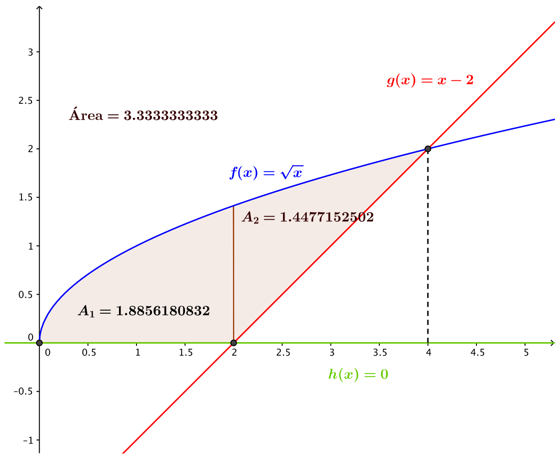


Figura 2.9: Área de la región plana correspondiente al Ejemplo 2.33.

Ejemplo 2.33
Calcular el área comprendida entre el eje $\overline{OX}$, la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = x - 2$.

En este caso estamos considerando el área comprendida entre tres funciones: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ y $h(x) = 0$ (ver la Figura 2.9). Las funciones f y h se cortan en el punto $(0, 0)$; las funciones g y h en el punto $(2, 0)$; finalmente, las funciones f y g se cortan en el punto $(4, 2)$. De la Figura 2.9 deducimos que el área del recinto está dada por:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 [f(x) - h(x)]\, dx + \int_2^4 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 \left[\sqrt{x} - x + 2\right] dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{x=0}^{x=2} + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{x=2}^{x=4} = \frac{10}{3}.$$

Importante: En los ejemplos precedentes y, en general, en este tipo de ejercicios es fundamental un buen planteamiento del problema. En particular, es fundamental hacer un esbozo de las gráficas que intervienen en el problema para tener una idea geométrica del recinto plano al que le queremos calcular el área.

2.6.2 Concepto de camino óptico

Como se verá en asignaturas del Grado en Óptica, hay muchos efectos de la luz que pueden ser estudiados sin tener en cuenta la mecánica cuántica y la dinámica ondulatoria de la luz. Es lo que se denomina Óptica Geométrica u Óptica de Rayos (un rayo es la trayectoria seguida por la luz y que, en sí, se trata de una línea normal a los frentes de onda).

Un medio óptico se caracteriza por el llamado **Índice de Refracción** $n \in \mathbb{R}$ que indica la relación entre la velocidad de la luz en el vacío ($c_0 = 3 \cdot 10^8 m/s$) y la velocidad c en ese medio:

$$n = \frac{c_0}{c} \geq 1.$$

Si un medio es homogéneo, su índice de refracción será constante, y el tiempo que necesita la luz para recorrer una distancia d se podrá calcular simplemente como

$$t = \frac{d}{c} = n\,\frac{d}{c_0}.$$

Este tiempo t es proporcional a la magnitud $n \cdot d$. A esta magnitud $\boxed{n \cdot d}$ la denominaremos Longitud del Camino Óptico (lco):

$$lco = n \cdot d.$$

Cuando el medio no es homogéneo, el índice de refracción n depende de la posición en la que se encuentra el rayo, es decir, n será una función del vector de posición r de cada uno de sus puntos: $n = n(r)$. En este caso, la longitud del camino óptico será el resultado de integrar sus elementos diferenciales:

$$lco = \int_A^B n(r) \cdot ds.$$

2.6.3 Longitud de un arco de curva.

En esta parte nos planteamos cómo calcular la longitud del arco de la curva dada por la función $y = f(x)$ comprendida entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Para el cálculo de esta longitud se sigue el mismo principio de aproximación que en el caso del cálculo de áreas: dividimos el intervalo $[a, b]$ en n trozos iguales y aproximamos la longitud del arco por la suma de la longitud de las poligonales que se construyen uniendo los puntos de la partición. Cuando aumenta n vamos acercándonos al valor de la longitud de la curva (ver Figura 2.10). La longitud del arco de curva viene dado como el límite de esas sumas.

En este caso se puede demostrar:

Teorema 2.34
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $[a, b]$ con f' continua en $[a, b]$. Entonces, la longitud del arco de curva dada por la función $y = f(x)$ entre los puntos $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{2.1}$$

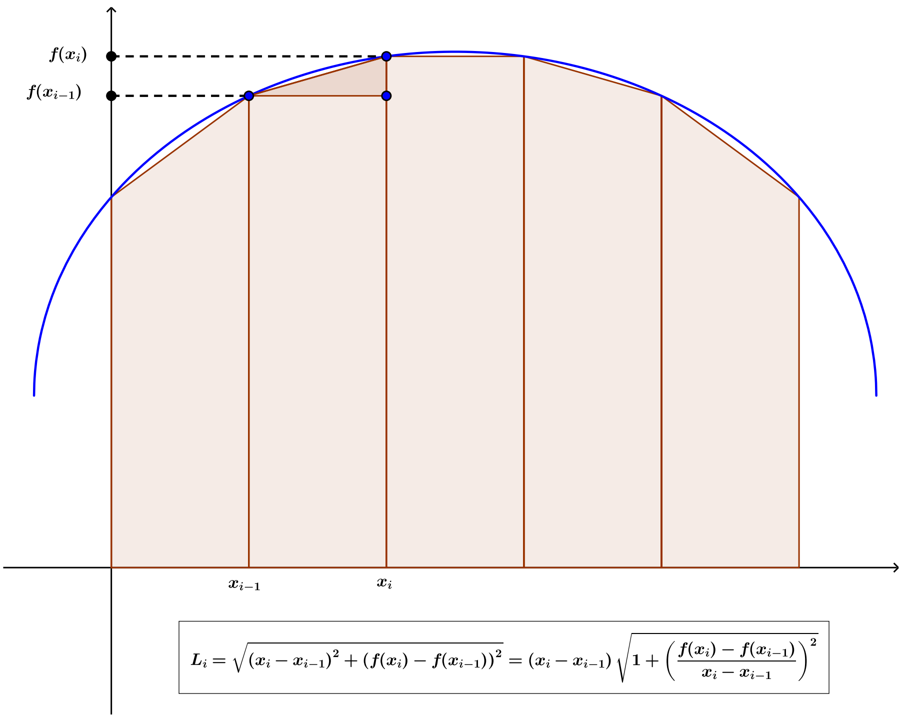


Figura 2.10: Suma de las poligonales asociadas a la función $y = f(x)$ y a una partición de 5 subintervalos del intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 2.35
Calcular la longitud del arco de curva dada por la función $y = x^{3/2}$ entre los puntos $x = 0$ y $x = 2$.
La función f es una función derivable en $[0, 2]$ con

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

que es continua en $[0, 2]$. Podemos utilizar la fórmula (2.1), para calcular la longitud del arco de curva, obteniendo

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx \\ &= \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{11}{2}\right)^{3/2} - 1\right] = 3'535523952... \end{aligned}$$

2.6.4 Volumen de un sólido de revolución y área de su superficie

Un cuerpo de revolución es aquél que se obtiene al girar una curva alrededor de un eje que, en esta sección, consideraremos el eje $\overline{OX}$. En este caso consideraremos que la curva está dada por la gráfica de la función f en el intervalo $[a, b]$. Para calcular el volumen de este sólido o el área de la superficie de revolución que genera, seguimos un razonamiento parecido al hecho en las secciones anteriores. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y aproximamos el volumen del sólido o el área de la superficie por la suma del volumen o de la superficie lateral de los troncos de cono generados al girar cada subintervalo alrededor del eje $\overline{OX}$. Al tomar límite cuando n crece obtenemos el volumen o el área de la superficie (no damos los detalles; véanse las Figuras 2.11 y 2.12).

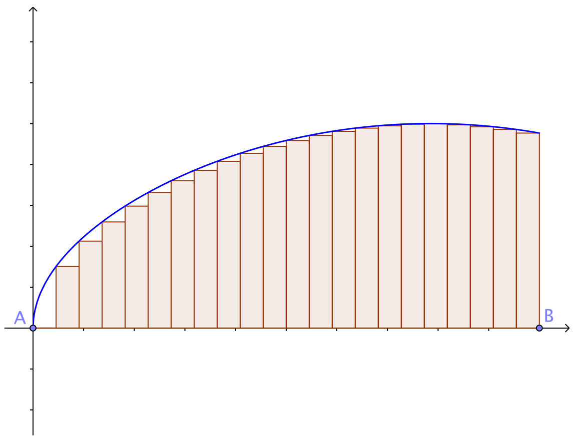


Figura 2.11: Partición del intervalo $[a, b]$.

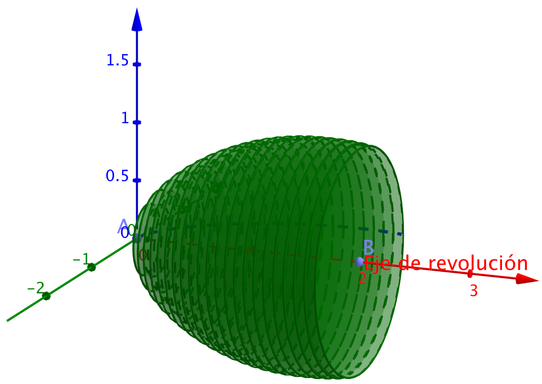


Figura 2.12: Sólido de revolución correspondiente a la función de la Figura 2.11.

En este caso se puede demostrar:

Teorema 2.36

1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, el volumen del cuerpo de revolución generado al girar la gráfica de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje $\overline{OX}$ está dado por:*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

2. *Si, además, ea f' es continua en $[a,b]$, el área de la superficie lateral del cuerpo de revolución está dada por:*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Tema 3

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Este tema está dedicado a hacer una pequeña introducción a las llamadas ecuaciones diferenciales ordinarias. Éstas surgen de manera natural cuando se quieren modelar fenómenos que surgen en Física, Biología y otras ciencias experimentales. Sus objetivos principales son describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en dichas áreas. La gran parte de tales modelos matemáticos se expresa mediante ecuaciones diferenciales.

En este tema proporcionaremos brevemente algunos de los conceptos básicos relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias y mostraremos algunas técnicas elementales de resolución.

3.1 Definiciones básicas

De manera general, una *ecuación diferencial ordinaria* es una ecuación (una igualdad) donde la incógnita es **una función** y donde, de manera fundamental, aparecen las derivadas ordinarias (hasta un cierto orden) de esa función incógnita. De manera más precisa:

Definición 3.1
Una ***ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.)*** *es una relación entre una variable independiente t, una función (variable dependiente) $y(t)$ y las derivadas de esta función $y(t)$ con respecto a t: $y'(t)$, $y''(t)$, $y'''(t)$, ... Dicha relación se escribe en notación matemática como:*

$$f(t, y(t), y'(t), y''(t), y'''(t), ...) = 0. \tag{3.1}$$

En muchas ocasiones se omite la dependencia de la función incógnita y respecto de la variable independiente t. Así, la ecuación diferencial ordinaria (3.1) tiene la forma:

$$f(t, y, y', y'', y''', ...) = 0.$$

El adjetivo *ordinaria* hace referencia a que las derivadas que aparecen en (3.1) son derivadas ordinarias (en contraposición a las derivadas parciales de las funciones de varias variables).

Para entender el concepto veamos un primer ejemplo sencillo:

Ejemplo 3.2
Consideremos la e.d.o.:

$$y'(t) = -y(t).$$

En primer lugar, hay que reconocer que nuestra incógnita es una **función** (llamada y) que depende de la variable independiente t, es decir $y = y(t)$. En segundo lugar, una vez comprendido que nuestra incógnita es una función, podemos omitir la dependencia de la función y respecto de la variable independiente t. Así, la e.d.o. puede ser escrita:

$$y' = -y.$$

Se trata de una e.d.o. de **primer orden**, ya que la máxima derivada que aparece en ella es la derivada primera. De hecho es una e.d.o. de primer orden escrita en **forma normal**, pues y' está despejada.

La utilización de las letras t, para representar la variable independiente, e y, para representar la función incógnita, no es importante. Podemos cambiar la notación y reescribir la ecuación anterior de la forma

$$u' = -u.$$

Con esta notación, estamos llamando u a nuestra función incógnita. Como la variable independiente no aparece explícitamente, podemos suponer que la variable independiente se llama t. Con esta nueva notación seguimos buscando una función $u(t)$ que satisfaga en su dominio $D(u)$ la igualdad:

$$u'(t) = -u(t), \quad \forall t \in D(u).$$

Una tal función se dice que es una solución de la e.d.o. considerada en el dominio $D(u)$.

Definición 3.3

De manera general, una ***ecuación diferencial ordinaria de primer orden en forma normal*** *es una ecuación diferencial que tiene la forma*

$$\boxed{y' = f(t, y)}. \tag{3.2}$$

(Hemos usado la letra t para designar la variable independiente, es decir, la función incógnita $\boxed{y}$ depende de t: $y = y(t)$).

Decimos que la función $\varphi(t)$ definida en el intervalo I es solución de la e.d.o. (3.2) en ese intervalo si se tiene que φ es derivable en I y satisface:

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad \forall t \in I,$$

es decir, si cuando se sustituye en la ecuación $\boxed{y}$ por la expresión de φ e $\boxed{y'}$ por la expresión de su derivada, lo que se obtiene es una ***identidad****, algo que es cierto* ***para todo*** *$t \in I$.*

Ejemplo 3.4

Consideremos la e.d.o.

$$y' = 2ty.$$

Entonces, la función $y(t) = e^{t^2}$ es solución de la ecuación en $\mathbb{R}$ pues

$$y'(t) = 2te^{t^2} = 2ty(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

También es solución la función nula $y(t) = 0$ y, en general, fijada una constante arbitraria $C \in \mathbb{R}$, la función $\boxed{y(t) = Ce^{t^2}}$ es solución de la ecuación $y' = 2ty$ en $\mathbb{R}$. Efectivamente,

$$y'(t) = 2Cte^{t^2} = 2ty(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Podemos concluir que la e.d.o. $y' = 2ty$ tiene **infinitas soluciones**, tantas como constantes $C \in \mathbb{R}$ fijemos.

Del ejemplo anterior deducimos que una e.d.o. puede tener infinitas soluciones. Este hecho ocurre de manera general y, así, la e.d.o. de primer orden (3.2) posee una “familia” infinita de soluciones que dependen de una constante arbitraria (**solución general** de (3.2)). Para cada valor de dicha constante arbitraria se obtiene una

solución particular.

Como principal objetivo de este capítulo está el proporcionar métodos de resolución de e.d.o. Diremos que hemos resuelto la e.d.o. si somos capaces de encontrar su **solución general**. Es importante resaltar que, en general, es imposible hallar la solución general de una e.d.o. Sin embargo, sí lo haremos en algunos casos concretos.

En gran parte de las aplicaciones lo que realmente interesa es encontrar una **solución particular** que satisfaga alguna condición adicional. Así, podemos definir:

Definición 3.5 (Problema de Cauchy o de valores iniciales)
*Dado el dato (t_0, y_0), se denomina **problema de Cauchy o de valores iniciales** para la e.d.o. (3.2), que denotaremos*

$$(PC) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

al problema consistente en hallar una solución particular $y(t)$ de la ecuación (3.2) que satisfaga la condición

$$y(t_0) = y_0.$$

*El nombre de **problema de valores iniciales** proviene del hecho de que, con frecuencia, la variable independiente, t, representa el tiempo, y el valor t_0 es el instante en que comienza un experimento, observación o simulación.*

*El par (t_0, y_0) es el llamado **dato de Cauchy o inicial**. Por otro lado, la condición $y(t_0) = y_0$ es denominada **condición de Cauchy o inicial**.*

Ejemplo 3.6
Resolver el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = 2ty \\ y(0) = 4. \end{cases}$

Para resolver el anterior problema de Cauchy actuaremos del siguiente modo: En primer lugar resolveremos la ecuación, es decir, hallaremos su solución general (que dependerá de una constante). En segundo lugar, determinaremos el valor de la constante que haga que también se satisfaga la condición inicial.

Veamos el proceso en el problema de Cauchy anterior:

1. En el Ejemplo 3.4 resolvimos la e.d.o. $y' = 2ty$, siendo su **solución general** $\boxed{y(t) = Ce^{t^2}}$, con $C \in \mathbb{R}$ una constante genérica.
2. En segundo lugar, hallaremos el valor de $C \in \mathbb{R}$ que hace que la función $y(t)$ satisfaga $y(0) = 4$. Sustituyendo $t = 0$ en la expresión de $y(t)$ e igualando a 4 obtenemos:

$$y(0) = 4 \iff C = 4.$$

   Por tanto, la solución del problema de Cauchy corresponde al valor $C = 4$, es decir, $\boxed{y(t) = 4e^{t^2}}$.

Ejemplo 3.7
Comprobar que la función $y(t) = \dfrac{Ce^t}{1 + Ce^t}$, con $C \in \mathbb{R}$, es solución general de la ecuación $y' = y - y^2$.

El ejercicio consiste en comprobar que, si sustituimos y e y' en la ecuación anterior, llegaremos a una **identidad**. Para derivar la expresión de y tenemos que tener en cuenta que $C \in \mathbb{R}$ es una constante fija. Así,

$$y'(t) = \frac{Ce^t\,(1 + Ce^t) - (Ce^t)^2}{(1 + Ce^t)^2} = \frac{Ce^t}{(1 + Ce^t)^2}.$$

Por otro lado,

$$y(t) - y(t)^2 = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} - \frac{(Ce^t)^2}{(1+Ce^t)^2} = \frac{Ce^t\,(1+Ce^t) - (Ce^t)^2}{(1+Ce^t)^2} = \frac{Ce^t}{(1+Ce^t)^2}.$$

Por tanto, llegamos a una identidad y podemos concluir que la función $y(t)$ es solución de la ecuación diferencial.

En este tema vamos a ver cómo se resuelven dos tipos concretos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos son:

1. E.d.o. de **variables separables**
2. E.d.o. **lineales**

3.2 Ecuaciones diferenciales de variables separables

Comenzamos estudiando **ecuaciones diferenciales de variables separables** que son de la forma:

$$y' = a(t)g(y), \tag{3.3}$$

donde $a(t)$ es una función conocida (que **solo depende de la variable** t) definida en un intervalo I, y $g(y)$ es también una función conocida (que **solo depende de la variable** y).

Observación 3.8
Es interesante destacar que, como caso particular a la ecuación (3.3), también son ecuaciones de variable separable las ecuaciones

$$\boxed{y' = a(t)} \quad \text{y} \quad \boxed{y' = g(y)}.$$

Efectivamente, la primera corresponde al caso particular en el que g es la **función constante** $\boxed{g(y) = 1}$, mientras que la segunda corresponde a la elección $\boxed{a(t) = 1}$ (también **función constante**).

Veamos cómo se resuelve la ecuación (3.3):

Resolución:
El "truco" consiste en escribir $\boxed{y' = \dfrac{dy}{dt}}$. Así,

1. Utilizando la anterior notación, la ecuación (3.3) tiene la forma $\dfrac{dy}{dt} = a(t)g(y)$.
2. A continuación, se "separan" las variables, de forma que a un lado del signo "=" esté sólo la función que depende de y (función g) y, al otro lado, la función que solo depende de t (función a):

   $$\frac{1}{g(y)}\,dy = a(t)\,dt.$$

   Al estar $g(y)$ en un denominador, hay que tener cuidado con los posibles valores y que hacen que g se anule: $\boxed{g(y) = 0}$ (véase el punto 5).

3. Integramos ambos miembros de la última igualdad, el miembro izquierdo respecto de y y el miembro derecho respecto de t:
$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int a(t)\,dt.$$
4. Tenemos que calcular las integrales anteriores. Así, sean
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy \quad \text{y} \quad A(t) = \int a(t)\,dt,$$
dos primitivas de $\dfrac{1}{g(y)}$ y de $a(t)$, respectivamente. De esta manera, la **solución general** de (3.3) está dada por:
$$\boxed{G(y) = A(t) + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
De esta última expresión trataríamos de despejar y (si fuera posible) para dar una expresión explícita de la solución general de la ecuación. Como siempre, C es una constante genérica y tenemos una solución distinta para cada valor de C (**infinitas soluciones**).
5. En el punto 2 pasamos dividiendo la función $g(y)$. Hay que comprobar si existen valores α que anulan g, es decir, tales que $g(\alpha) = 0$. En este caso, la función constante $y(t) = \alpha$ es solución de la ecuación (3.3). Habría que añadirla a la solución general obtenida anteriormente (si no correspondiera a un valor C).

Ejemplo 3.9
Resolver la ecuación $y' = \dfrac{t-5}{y^2}$.

En primer lugar, observamos que la ecuación puede ser reescrita como
$$\frac{dy}{dt} = (t-5)\,\frac{1}{y^2},$$
de donde deducimos que la función $a(t) = t - 5$ y $g(y) = \dfrac{1}{y^2}$. Separamos las variables e integramos:
$$y^2\,dy = (t-5)\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int y^2\,dy = \int (t-5)\,dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}(t-5)^2 + C.$$
En este caso concreto podemos manipular la expresión anterior y llegar a una expresión explícita de la función y:
$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(t-5)^2 + 3C} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(t-5)^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
Tenemos así la **solución general** de la ecuación.

Observación 3.10
En el ejemplo anterior, C es una constante genérica. En su manipulación hemos tenido en cuenta ese hecho. Así, hemos escrito
$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}(t-5)^2 + 3C} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(t-5)^2 + C},$$
puesto que si C es una constante genérica, $3C$ también lo es. Por tanto, de nuevo puede ser denotada por C.

Ejemplo 3.11
Calcular la solución general de la ecuación $y' = 2ty$.

Tenemos que la ecuación es de variables separables (con funciones $a(t) = 2t$ y $g(y) = y$). Si llevamos a cabo el proceso descrito más arriba, obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} = 2ty \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2t\,dt.$$

Al dividir por y, tenemos que tener en cuenta el valor $\boxed{y = 0}$. Integrando la última expresión obtenemos:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int t\,dt \quad \Longrightarrow \quad \log|y| = t^2 + C \quad \Longrightarrow \quad |y| = e^{t^2} e^C.$$

Nos podemos deshacer del valor absoluto simplemente introduciendo los signos $+$ y $-$ en la constante:

$$y = e^{t^2}\left(\pm e^C\right).$$

Como hemos hecho con anterioridad, si $C \in \mathbb{R}$ es una constante, la cantidad $\left(\pm e^C\right)$ es una nueva constante que puede ser denotada nuevamente por C. En conclusión, la **solución general** de la ecuación está dada por:

$$y = Ce^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es importante resaltar que la función constante $y(t) = 0$ es solución de la ecuación y que puede ser obtenida de la expresión anterior sin más que tomar $C = 0$.

Ejemplo 3.12
Calcular la solución del problema de Cauchy para la ecuación (ecuación logística)

$$\begin{cases} y' = y - y^2. \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

1. Comencemos resolviendo la ecuación. Se trata de una ecuación de variables separables $y' = a(t)g(y)$, donde $a(t) = 1$ y $g(y) = y - y^2$. Mediante la notación $y' = \dfrac{dy}{dt}$, la ecuación se escribe:

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y - y^2} = dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y - y^2} = \int dt.$$

Hemos dividido por la expresión $y - y^2$. Así, tenemos que tener en cuenta las posibles raíces de $\boxed{y - y^2 = 0}$, pues nos proporcionan las funciones constantes $y(t) = 0$ e $y(t) = 1$. Ambas son soluciones de la e.d.o. (esto es fácil de comprobar) y puede que en el proceso no se obtengan (en ese caso, habría que añadirlas).

Resolvemos aparte la primera integral y, para ello, usamos el método de fracciones simples. Teniendo en cuenta que $y - y^2 = y(1 - y)$, hacemos:

$$\frac{1}{y - y^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 - y} = \frac{A(1 - y) + By}{y(1 - y)} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{1 = A(1 - y) + By}.$$

Calculamos los coeficientes indeterminados A y B dando valores a y: $y = 0$ proporciona $\boxed{A = 1}$; $y = 1$ implica que $\boxed{B = 1}$. Podemos por tanto integrar. Así,

$$\int \frac{dy}{y - y^2} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y}\right) dy = \log|y| - \log|1 - y| = \log\left|\frac{y}{1 - y}\right|.$$

Volviendo a la e.d.o.,

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + C \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{y}{1-y}\right| = \left(e^{C}\right)e^{t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{1-y} = \left(\pm e^{C}\right)e^{t} \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{y}{1-y} = Ce^{t}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Podemos manipular esta última expresión para llegar a una expresión explícita de la función y:

$$y = Ce^{t}(1-y) \quad \Longleftrightarrow \quad y + Ce^{t}y = Ce^{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{y = \frac{Ce^{t}}{1+Ce^{t}}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que la solución $y = 0$ puede ser obtenida de la expresión anterior haciendo $C = 0$. Sin embargo, no parece posible obtener la solución $y = 1$ dando valores a C. Así, añadimos la solución $y = 1$. En conclusión, la solución general de la e.d.o. viene dada por:

$$\boxed{y = \frac{Ce^{t}}{1+Ce^{t}}\,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad y = 1}.$$

2. Para terminar el ejemplo, buscamos la solución que satisface la condición inicial $y(0) = 4$. Utilizando la expresión de y obtenida en el punto anterior e imponiendo la condición inicial, deducimos,

$$y(0) = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{C}{1+C} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad C = 4 + 4C \quad \Longleftrightarrow \quad C = -\frac{4}{3}$$

Sustituyendo este valor en la expresión de C, concluimos que **la solución** del problema de Cauchy está dada por

$$y(t) = \frac{-\frac{4}{3}e^{t}}{1+-\frac{4}{3}e^{t}} = \frac{4e^{t}}{4e^{t}-3}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.13
Resolver el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y-1}{t+3} \\ y(0) = 3. \end{cases}$

Comenzamos resolviendo la e.d.o. De nuevo se trata de una ecuación de variables separables que puede ser escrita como

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+3}(y-1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y-1} = \frac{dt}{t+3}.$$

Señalamos de nuevo el valor $\boxed{y = 1}$ pues anula el denominador y, evidentemente, la función constante $y(t) = 1$ es solución de la ecuación. Integramos ambos miembros de la igualdad, obteniendo

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dt}{t+3} \quad \Longrightarrow \quad \log|y-1| = \log|t+3| + C \quad \Longrightarrow \quad |y-1| = e^{C}|t+3|.$$

Como en ocasiones anteriores, eliminamos los valores absolutos, introduciendo los signos $+$ y $-$, y reescribimos la constante C. Así,

$$y - 1 = \left(\pm e^{C}\right)(t+3) \quad \Longrightarrow \quad y - 1 = C(t+3) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = 1 + C(t+3)}.$$

Obsérvese que si $C = 0$, obtenemos la solución constante $y(t) = 1$. Por tanto, no hace falta añadirla.

Para finalizar, buscamos el valor de C que haga que se tenga la condición inicial $y(0) = 3$. Imponiendo esta condición obtenemos:

$$1 + 3C = 3 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{2}{3}.$$

En conclusión, la solución del problema de Cauchy está dada por:

$$\boxed{y(t) = 1 + \frac{2}{3}(t+3), \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Ejemplo 3.14
Calcular la solución de la ecuación diferencial $y' = -y - y^2$.

Para resolver la ecuación seguimos el mismo razonamiento del punto 1 del Ejemplo 3.12. Reescribimos la ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = -(y + y^2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y + y^2} = -dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y+y^2} = -\int dt$$

Como en el Ejemplo 3.12 tenemos que tener en cuenta los valores que anulan el denominador ($y + y^2 = 0$), es decir, $\boxed{y = 0}$ e $\boxed{y = -1}$. Ambas funciones constantes son soluciones de la ecuación (es fácil de comprobar) y, por tanto, habrá que añadirlas a la solución que obtengamos.

Descomponemos el integrando de la izquierda como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y} = \frac{A(1+y) + By}{y(1+y)} \quad \Longrightarrow \quad 1 = A(1+y) + By.$$

Dando los valores $y = 0$ e $y = -1$ deducimos que $A = 1$ y $B = -1$. Integrando,

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{-1}{1+y} \right) dy = -t + C,$$

es decir,

$$\log|y| - \log|1+y| = -t + C \quad \Longrightarrow \quad \log\left|\frac{y}{1+y}\right| = -t + C \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{1+y} = \left(\pm e^C\right) e^{-t} = Ce^{-t}.$$

Despejando y de la expresión anterior (véase el Ejemplo 3.12), obtenemos

$$\boxed{y(t) = \frac{C\, e^{-t}}{1 - Ce^{-t}}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Para finalizar, observamos que la solución constante $y = 0$ puede ser obtenida sin más que hacer $C = 0$. Sin embargo, no parece posible obtener la solución $y = -1$ dando valores a C. Por tanto añadimos $\boxed{y = -1}$ a la solución general anterior.

Ejemplo 3.15
Resolver el problema de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = -y - y^2 \\ y(0) = 10. \end{array} \right.$

En el ejemplo anterior hemos resuelto la ecuación. Basta por tanto calcular la constante C que haga que se satisfaga la condición inicial $y(0) = 10$. Sustituyendo el tiempo $t = 0$ en la expresión, obtenemos:

$$y(0) = 10 \quad \Longrightarrow \quad \frac{AC}{1-C} = 10 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{10}{11} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{\frac{10}{11}e^{-t}}{1 - \frac{10}{11}e^{-t}} = \frac{10e^{-t}}{11 - 10e^{-t}}.$$

Ejemplo 3.16
Calcular la solución del problema de Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{t} \\ y(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

1. Comenzamos resolviendo la ecuación diferencial. Se trata de una ecuación de variables separables que puede ser escrita

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\left(y^2-1\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y^2-1} = \frac{dt}{t} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dt}{t}.$$

Señalamos las raíces de la expresión $y^2-1=0$, es decir, $\boxed{y=1}$ e $\boxed{y=-1}$ pues corresponden a soluciones constantes (se puede comprobar fácilmente) que habrá que añadir a la solución general que vamos a calcular.
Calculamos (aparte) cada una de las integrales anteriores. Para la primera integral tenemos

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left[\log(y-1) - \log(y+1)\right] = \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.$$

La segunda integral es directa $\displaystyle\int \frac{dt}{t} = \log|t| + C$. Por tanto,

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log|t| + C \quad \Longleftrightarrow \quad \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log(t^2) + C \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = Ct^2.$$

Manipulando esta última expresión, podemos despejar y y obtener la solución general:

$$\boxed{y(t) = \frac{1+Ct^2}{1-Ct^2}}, \qquad C \in \mathbb{R} \text{ es una constante genérica.}$$

A esta expresión hay que añadir las soluciones constantes $y(t)=1$ (que en realidad está incluida pues corresponde a $C=0$) e $y(t)=-1$.

2. Buscamos ahora una solución tal que $y(1)=1/2$. Para ello, utilizamos la expresión de la solución general anterior. Imponiendo la condición inicial, llegamos a:

$$\frac{1+C}{1-C} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad C = -\frac{1}{3}$$

En conclusión, la solución del problema de Cauchy está dada por:

$$y(t) = \frac{1-\frac{1}{3}t^2}{1+\frac{1}{3}t^2} = \frac{3-t^2}{3+t^2}.$$

Ejemplo 3.17
Resolver el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = 2y - 3y^2 \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Seguimos los Ejemplos 3.12, 3.14 y 3.15.

1. Resolvemos la ecuación logística, como en el Ejemplo 3.12:

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 3y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{2y-3y^2} = dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{2y-3y^2} = \int dt$$

Al dividir por $2y-3y^2$, apuntamos de nuevo sus raíces $\boxed{y=0}$ e $\boxed{y=2/3}$ pues corresponden a soluciones constantes de la ecuación y pueden que no sean obtenidas.
Descomponemos el integrando izquierdo en fracciones simples, obteniendo:

$$\frac{1}{y(2-3y)} = \frac{1/2}{y} + \frac{3/2}{2-3y}.$$

Integrando

$$\frac{1}{2}\left[\log|y| - \log|2-3y|\right] = t + C \quad\Longrightarrow\quad \log\left|\frac{y}{2-3y}\right| = 2t + C \quad\Longrightarrow\quad \frac{y}{2-3y} = Ce^{2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Despejando y, no es difícil llegar a la solución general

$$\boxed{y(t) = \frac{2Ce^{2t}}{1+3Ce^{2t}}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{2}{3}},$$

pues la expresión contiene la solución $y = 0$ (para $C = 0$) pero que no parece contener a $y = 2/3$ (ha tenido que ser añadida).

2. Buscamos ahora un valor de C que cumpla la condición $y(0) = \frac{1}{2}$. Sustituyendo este dato en la expresión anterior, obtenemos:

$$y(0) = \frac{2C}{1+3C} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad C = 1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y(t) = \frac{2e^{2t}}{1+3e^{2t}}}.$$

Esto concluye el ejercicio.

3.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Definición 3.18
Se llama ***ecuación diferencial lineal de primer orden*** *a una ecuación del tipo:*

$$y' = a(t)y + b(t), \tag{3.4}$$

donde $a = a(t)$ y $b = b(t)$ son funciones continuas (datos) definidas en un intervalo I que solo dependen de la variable independiente t. La ecuación se llama ***lineal homogénea*** *si b es la función nula $b(t) = 0$, y se llama* ***lineal no homogénea*** *en caso contrario.*

Dada la ecuación no homogénea (3.4), se denomina **ecuación homogénea asociada**, a la ecuación que se obtiene eliminando el término $b(t)$, es decir

$$y' = a(t)y. \tag{3.5}$$

El método que usaremos para resolver este tipo de ecuaciones está basado en la siguiente propiedad de las soluciones de (3.4):

Solución general de una ecuación lineal.
La solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal (3.4) se puede escribir como la suma de la solución general de su ecuación homogénea asociada, (3.5), y una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea (3.4):

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

donde

$y_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada (3.5);

$y_p(t)$ es una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea (3.4).

La propiedad anterior nos proporciona un método para calcular la solución general de la ecuación no homogénea (3.4):

1. Se calcula la **solución general** de la ecuación homogénea asociada (3.5).
2. Se calcula **una solución particular** (cualquiera) de la ecuación no homogénea (3.4) (ecuación completa).

Describamos cada uno de los puntos anteriores.

1. Resolución de la ecuación homogénea asociada $y' = a(t)y$.

Comenzamos recordando cómo se resuelve la ecuación homogénea asociada (3.5). Al tratarse de una ecuación de variables separables, seguimos el procedimiento explicado en la sección anterior. Reescribimos (3.5) bajo la forma:

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = a(t)\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(t)\,dt + C \quad \Longrightarrow \quad \log|y| = \int a(t)\,dt + C$$

En el proceso anterior hemos dividido por y. Como en ocasiones anteriores, tenemos que tener en cuenta que la función constante $y(t) = 0$ es solución de la ecuación homogénea. Al finalizar los cálculos, habrá que comprobar que esta solución está incluida en la solución general de la ecuación homogénea.

Si denotamos $A(t)$ a una primitiva de $a(t)$, la última igualdad se transforma en

$$|y| = e^C e^{A(t)} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \left(\pm e^C\right) e^{A(t)} = Ce^{A(t)}.$$

Así, la solución general de la ecuación homogénea (3.5) viene dada por

$$\boxed{y_h(t) = Ce^{A(t)}}, \quad t \in I, \text{ donde } C \text{ es una constante genérica,}$$

que incluye la solución constante $y(t) = 0$ (obtenida para $C = 0$).

2. Cálculo de una solución particular de (3.4).

El método que usaremos se llama **método de variación de constantes** o método de Lagrange. Para explicarlo, denotemos $G(t) = e^{A(t)}$. Con esta notación, la solución general de la ecuación homogénea (3.5) está dada por

$$y_h(t) = CG(t), \quad \text{donde } C \in \mathbb{R} \text{ es una constante arbitraria.}$$

Es importante resaltar que la función $G(t)$ satisface la siguiente igualdad:

$$G'(t) = A'(t)e^{A(t)} = a(t)G(t),$$

pues $A(t)$ es una primitiva de $a(t)$.

Buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea (3.4) en la forma:

$$y_p(t) = K(t)G(t), \tag{3.6}$$

donde $K(t)$ es una nueva **función incógnita**. Queremos calcular la función $K(t)$ para que $y_p(t)$ sea solución de (3.4), es decir, para que se tenga $y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t)$. Sustituyendo:

$$K'(t)G(t) + K(t)G'(t) = a(t)K(t)G(t) + b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad K'(t)G(t) + K(t)a(t)G(t) = a(t)K(t)G(t) + b(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad K'(t)G(t) = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad K'(t) = b(t)\frac{1}{G(t)}\,.$$

Así, para que (3.6) sea solución de la ecuación (3.4), $K(t)$ tiene que tener la forma

$$K(t) = \int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt.$$

Volviendo a (3.6), obtenemos como conclusión que una solución particular de la ecuación (3.4) es

$$\boxed{y_p(t) = K(t)G(t) = G(t)\int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la propiedad explicada anteriormente, deducimos que la solución general de la ecuación lineal viene dada por la fórmula

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = CG(t) + G(t)\int b(t)\frac{1}{G(t)}\,dt}.$$

Ejemplo 3.19
Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2y + t$.

Se trata de una ecuación lineal no homogénea pues tiene la forma (3.4) con $a(t) = 2$ (es independiente de t) y $b(t) = t$. Para resolverla, aplicamos el procedimiento explicado más arriba.

1. Solución de la ecuación homogénea: Comenzamos resolviendo la ecuación homogénea asociada, que en este caso tiene la forma $y' = 2y$. Al ser una ecuación de variables separables, la resolvemos de la manera habitual (obsérvese que $\boxed{y = 0}$ es solución de la ecuación lineal homogénea):

$$\frac{dy}{dt} = 2y \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{y} = 2dt \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{dy}{y} = 2\int dt \quad\Longrightarrow\quad \log|y| = 2t + C.$$

Tomando exponencial y eliminando el valor absoluto, deducimos que la solución general de la ecuación lineal homogénea está dada por

$$\boxed{y_h(t) = C\,e^{2t}}, \qquad C \in \mathbb{R} \text{ es una constante genérica.}$$

2. Solución particular: Tratamos ahora de calcular una solución particular de la ecuación no homogénea $y' = 2y + t$. Para este fin, utilizamos el método de variación de constantes. Observando la forma de la solución de la ecuación homogénea, buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea que venga dada por:

$$y_p(t) = K(t)e^{2t}.$$

Nuestro objetivo es tratar de hallar $K(t)$ para que y_p satisfaga $y_p'(t) = 2y_p(t) + t$. Sustituyendo la expresión de y_p, deducimos,

$$K'(t)e^{2t} + 2K(t)e^{2t} = 2K(t)e^{2t} + t \iff K'(t)e^{2t} = t \iff K'(t) = te^{-2t} \iff K(t) = \int te^{-2t}\,dt.$$

Mediante una integración por partes es fácil calcular la última integral, dando como resultado:

$$K(t) = -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)e^{-2t} \iff \boxed{y_p(t) = K(t)e^{2t} = -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)}.$$

Solución general: En conclusión, la solución general de la ecuación viene dada por:

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\,e^{2t} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)}, \qquad C \in \mathbb{R} \text{ es una constante genérica.}$$

Ejemplo 3.20
Hallar la solución del problema de Cauchy $\begin{cases} y' = 2y + t \\ y(0) = 2. \end{cases}$

Al haber calculado la solución general de la ecuación lineal no homogénea en el ejemplo anterior, basta determinar una constante C para que la función y satisfaga la condición inicial $y(0) = 2$. Sustituyendo en la expresión de

y el tiempo $t = 0$, deducimos:

$$C - \frac{1}{4} = 2 \iff C = \frac{9}{4}.$$

Volviendo a la expresión de y, podemos concluir que la única solución del problema de Cauchy está dada por

$$\boxed{y(t) = \frac{9}{4}\, e^{2t} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)}.$$

Ejemplo 3.21
Calcular la solución general de la ecuación lineal $y' = -2ty + t$.

Al tratarse de una ecuación diferencial lineal no homogénea, aplicamos el proceso explicado anteriormente:

1. Ecuación homogénea: La ecuación homogénea asociada tiene la forma:

$$y' = -2ty,$$

que, como sabemos, es una ecuación de variables separables. La resolvemos de la manera habitual (como en otras ocasiones, vamos a dividir por y y sabemos que $y = 0$ es solución constante de esta ecuación; como hemos visto, ésta estará incluida en la solución general):

$$\frac{dy}{dt} = -2ty \iff \frac{dy}{y} = -2t\, dt \iff \log|y| = -t^2 + C \iff |y| = e^C\, e^{-t^2}.$$

Eliminando el valor absoluto, llegamos a que la solución general de la ecuación homogénea está dada por:

$$\boxed{y_h(t) = C\, e^{-t^2}}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ es una constante genérica.}$$

2. Solución particular: Aplicando el método de variación de constantes, buscamos una solución particular y_p que tenga la forma $y_p(t) = K(t)\, e^{-t^2}$. Nuestro objetivo es que y_p satisfaga la ecuación no homogénea, es decir,

$$y_p'(t) = -2ty_p(t) + t \iff K'(t)\, e^{-t^2} - 2tK(t)\, e^{-t^2} = -2tK(t)\, e^{-t^2} + t \iff$$
$$K'(t)\, e^{-t^2} = t \iff K(t) = \int t\, e^{t^2}\, dt = \frac{1}{2} e^{t^2}$$

Hemos encontrado una solución particular dada por:

$$\boxed{y_p(t) = K(t)\, e^{-t^2} = \frac{1}{2}}.$$

Conclusión: La solución general de la ecuación homogénea está dada por $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, es decir,

$$\boxed{y(t) = C\, e^{-t^2} + \frac{1}{2}}.$$

Alternativa: Este ejemplo puede ser resuelto de otra manera, sin más que tener en cuenta que la e.d.o. puede ser reescrita como $y' = (-2y + 1)t$. Así, la resolvemos como una e.d.o. de variable separable, es decir, haciendo:

$$\frac{dy}{dt} = (-2y + 1)t \implies \frac{dy}{-2y + 1} = t\, dt \implies \int \frac{dy}{-2y + 1} = \int t\, dt \implies -\frac{1}{2}\log|-2y + 1| = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Como siempre, hay que comprobar que la solución constante $y(t) = 1/2$ (que corresponde al valor que anula el denominador) está incluida en la solución general. Despejando y, no es difícil llegar a la expresión

$$\boxed{y(t) = -\frac{C}{2}\, e^{-t^2} + \frac{1}{2} = C\, e^{-t^2} + \frac{1}{2}},$$

que contiene la solución constante $y = 1/2$ y que, evidentemente, coincide con la expresión obtenida mediante el anterior método.

Ejemplo 3.22
Calcular la solución de la ecuación lineal $y' + y\cos t = \operatorname{sen} t \cos t$ que satisface la condición inicial $y(\pi) = 0$.

Seguiremos el siguiente proceso: Empezaremos calculando la solución general de la ecuación lineal no homogénea. Seguidamente, impondremos la condición inicial para determinar la función que satisface el problema de Cauchy.

1. Resolvamos la e.d.o.:

Ecuación homogénea: La ecuación homogénea asociada tiene la forma:

$$y' + y\cos t = 0,$$

que, en particular, es una ecuación de variables separables. Aplicando el proceso habitual de resolución de este tipo de ecuaciones no es difícil llegar a la solución (se deja para el lector):

$$\boxed{y_h(t) = Ce^{-\operatorname{sen} t}}, \qquad C \in \mathbb{R} \text{ es una constante genérica.}$$

Solución particular: Para calcular una solución particular, aplicamos el método de variación de constantes. Teniendo en cuenta la forma de la solución general de la ecuación homogénea, buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea que tenga la forma:

$$y_p(t) = K(t)e^{-\operatorname{sen} t},$$

donde $K(t)$ es una nueva función. Nuestro objetivo será calcular la función K para que $y_p(t)$ satisfaga la ecuación no homogénea, es decir, satisfaga:

$$y_p'(t) + y_p(t)\cos t = \operatorname{sen} t \cos t.$$

Sustituyendo la expresión de $y_p(t)$ en la igualdad anterior obtenemos:

$$K'(t)e^{-\operatorname{sen} t} + K(t)e^{-\operatorname{sen} t}(-\cos t) + K(t)e^{-\operatorname{sen} t}\cos t = \operatorname{sen} t \cos t.$$

Operando, deducimos

$$K'(t)e^{-\operatorname{sen} t} = \operatorname{sen} t \cos t \iff K'(t) = \operatorname{sen} t \cos t\, e^{\operatorname{sen} t} \iff K(t) = \int \operatorname{sen} t \cos t\, e^{\operatorname{sen} t}\, dt.$$

Esta integral puede ser resuelta haciendo en primer lugar el cambio de variable $w = \operatorname{sen} t$ para después hacer una integración por partes (los detalles se dejan al lector). Así,

$$K(t) = [-1 + \operatorname{sen} t]\, e^{\operatorname{sen} t} \implies \boxed{y_p(t) = K(t)e^{-\operatorname{sen} t} = -1 + \operatorname{sen} t}.$$

Conclusión: La solución general de la ecuación no homogénea viene dada por $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, es decir,

$$\boxed{y(t) = Ce^{-\operatorname{sen} t} - 1 + \operatorname{sen} t}.$$

2. Para acabar el ejemplo, determinemos la constante C para que se tenga $y(\pi) = 0$, es decir,

$$Ce^{-\operatorname{sen} \pi} - 1 + \operatorname{sen} \pi = 0 \iff C - 1 = 0 \iff \boxed{C = 1}.$$

Por tanto, la solución del problema de Cauchy está dada por

$$\boxed{y(t) = e^{-\operatorname{sen} t} - 1 + \operatorname{sen} t}.$$

Esto acaba el ejemplo.

Tema 4

Números complejos

En este tema haremos una introducción a los números complejos. Podemos justificar la necesidad de ampliar el conjunto de números pensando en la resolución de **ecuaciones algebraicas**. Así, el paso de $\mathbb{N}$ (conjunto de números naturales) a $\mathbb{Z}$ (conjunto de números enteros) se justificaría por la necesidad de resolver una ecuación del tipo

$$x + 1 = 0.$$

Del mismo modo, la ampliación de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ (conjunto de números racionales) se hizo para poder resolver ecuaciones del tipo

$$2x = 1.$$

Finalmente, entre otras razones, se produjo la ampliación de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ (conjunto de números reales) para poder resolver ecuaciones de la forma

$$x^2 - 2 = 0,$$

que no poseen soluciones racionales. Sin embargo, este último conjunto no es suficiente si queremos resolver ecuaciones como:

$$x^2 + 1 = 0,$$

que, evidentemente, no posee solución en $\mathbb{R}$. Esto hizo que se ampliara el conjunto de los números reales introduciendo la llamada **unidad imaginaria**:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}.$$

Está claro que $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales, pero, con la unidad imaginaria, resulta tener dos raíces:

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 \iff \boxed{x = \pm\sqrt{-1} = \pm i}.$$

Veremos que la introducción de esa cantidad y de los llamados **números complejos** hace posible, entre otras cosas, que siempre podamos resolver ecuaciones de segundo grado.

4.1 Definición de número complejo. Operaciones

Definición 4.1
*Un **número complejo** z es una expresión de la forma*

$$z = a + b\,i$$

*donde a, $b \in \mathbb{R}$ (a y b son números reales) e $i = \sqrt{-1}$ es la llamada **unidad imaginaria**. El conjunto de los números complejos será denotado por $\mathbb{C}$.*

*Dado el número complejo $z = a + bi$, el número real a será llamado **parte real** de z y el número real b la **parte imaginaria** de z y se denotarán por*

$$a = \Re(z) \quad y \quad b = \Im(z),$$

respectivamente.

Es importante destacar que la unidad imaginaria satisface la propiedad:

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

Por tanto, tenemos un número (no real) que al elevarlo al cuadrado da como resultado un número negativo. Esta propiedad del número i permite que hagamos, en el conjunto de números complejos $\mathbb{C}$, operaciones que no estaban permitidas en el conjunto de números reales $\mathbb{R}$:

Ejemplo 4.2
Calcular $\sqrt{-25}$ y $\sqrt{-3}$. Calcular las partes real e imaginaria de los números complejos: $2+3i$, $2-3i$ y $\pi + ei$.

Razonamos como sigue:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1)25} = \sqrt{-1}\sqrt{25} = 5i.$$

Por otro lado,

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(-1)3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = \sqrt{3}\, i.$$

Finalmente,

$$\Re(2+3i) = 2; \quad \Im(2+3i) = 3; \quad \Re(2-3i) = 2; \quad \Im(2-3i) = -3; \quad \Re(\pi+ei) = \pi; \quad \Im(\pi+ei) = e.$$

La representación $z = a + bi$ de los números complejos recibe el nombre de **forma binómica** del número complejo z. Si $a = 0$ entonces se dice que el número z es **imaginario puro**. Evidentemente, si $b = 0$ entonces z es un número real. Eso hace que el conjunto de números reales esté contenido en el conjunto de números complejos:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Sin embargo, son conjuntos distintos pues $i \in \mathbb{C}$ pero $i \notin \mathbb{R}$.

Un número complejo $z = a + bi$ tiene asociado su **complejo conjugado** (que representaremos como $\bar{z}$), que viene dado por la expresión:

$$\bar{z} = a - bi$$

Ejemplo 4.3
Calcular el conjugado de los números complejos:

1. $z = i$: $\boxed{\bar{z} = -i}$.
2. $z = 2 - \sqrt{-49}$: $z = 2 - 7i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{z} = 2 + 7i}$.
3. $z = 2 - i$: $\boxed{\bar{z} = 2 + i}$.
4. $z = \pi + 4i$: $\boxed{\bar{z} = \pi - 4i}$.
5. si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = a + 0i$ y $\bar{a} = a - 0i = a$.

Suma y resta de números complejos

Dados los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, definimos su suma y su diferencia como sigue:

- **Suma:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- **Diferencia:** $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Ejemplo 4.4
Realizar las sumas y diferencias de los números complejos z_1 y z_2:

1. $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 1 - 3i$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3 + 2i) + (1 - 3i) = (3 + 1) + (2 - 3)i = 4 - i, \\ z_1 - z_2 &= (3 + 2i) - (1 - 3i) = (3 - 1) + (2 + 3)i = 2 + 5i. \end{aligned}$$

2. $z_1 = \sqrt{2} - 2i$ y $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (\sqrt{2} - 2i) + (1 - \sqrt{3}i) = (1 + \sqrt{2}) + (-2 - \sqrt{3})i = 1 + \sqrt{2} - (2 + \sqrt{3})i, \\ z_1 - z_2 &= (\sqrt{2} - 2i) - (1 - \sqrt{3}i) = (-1 + \sqrt{2}) + (-2 + \sqrt{3})i = -1 + \sqrt{2} + (-2 + \sqrt{3})i. \end{aligned}$$

3. $z_1 = z = a + bi$ y $z_2 = \bar{z}$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a = 2\Re(z), \\ z_1 - z_2 &= z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = (a - a) + (b + b)i = 2bi = 2\Im(z)i. \end{aligned}$$

Producto de números complejos

Dados los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, definimos su producto como sigue:

$$z_1 z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = \underbrace{(ac - bd)}_{\text{Parte real}} + \underbrace{(ad + bc)\, i}_{\text{Parte imaginaria}},$$

es decir, se calcula el producto aplicando la propiedad distributiva a los dos binomios.

Ejemplo 4.5
Realizar los productos de los números complejos z_1 y z_2:

1. $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 1 - 3i$:

$$z_1 z_2 = (3 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 3 - 9i + 2i + 6 = 9 - 7i.$$

2. $z_1 = \sqrt{2} - 2i$ y $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$:

$$z_1 z_2 = (\sqrt{2} - 2i) \cdot (1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3}i - 2i + 2\sqrt{3}i^2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3}i - 2i - 2\sqrt{3} = \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - (2 + \sqrt{6})i.$$

3. $z_1 = z = a + bi$ y $z_2 = \bar{z}$:

$$z_1 z_2 = z\bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Igualdades importantes de números complejos:

De los Ejemplos 4.4 y 4.5 deducimos varias identidades interesantes que relacionan un número complejo $z = a + bi$ con su conjugado $\bar{z} = a - bi$:

$$\boxed{z + \bar{z} = 2\Re(z)} \iff \boxed{\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})},$$

$$\boxed{z - \bar{z} = 2\Im(z)i} \iff \boxed{\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})},$$

$$\boxed{z\bar{z} = a^2 + b^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2}.$$

Como puede apreciarse en los Ejemplos 4.4 y 4.5 y en las igualdades anteriores, la suma, la diferencia y el producto de números complejos pueden ser un número real, un número imaginario puro o un número complejo.

Cociente de números complejos

Dados los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ (donde c y d no son ambos nulos), para hallar su cociente multiplicamos y dividimos por el conjugado de z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{\text{Parte real}} + \underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}_{\text{Parte imaginaria}}.$$

Ejemplo 4.6
Realizar el cociente de los números complejos z_1 y z_2:

1. $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 1 - 3i$:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1-3i} = \frac{(3+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-3+11i}{10} = -\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i.$$

2. $z_1 = \sqrt{2} - 2i$ y $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}-2i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{2}-2i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{(\sqrt{2}+2\sqrt{3})+(-2+\sqrt{6})i}{4} = \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{4} + \frac{-2+\sqrt{6}}{4}i.$$

3. $z_1 = z = a + bi$ y $z_2 = \bar{z}$:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i.$$

Cuerpo conmutativo:

Es fácil comprobar que la suma definida anteriormente en $\mathbb{C}$ satisface la propiedad **conmutativa**, **asociativa**, que existe un **elemento neutro** (el $0 = 0 + 0i$) y que todo elemento tiene **opuesto** (si $z = a + bi$, su opuesto es $-z = -a - bi$). También es fácil comprobar que el producto cumple la propiedad **conmutativa**, **asociativa**, que existe un **elemento neutro** (el $1 = 1 + 0i$) y que todo elemento distinto de 0 tiene **inverso**. También el producto y la suma satisfacen la propiedad **distributiva**. Se tiene por tanto que $\mathbb{C}$ es un **cuerpo conmutativo**.

Igualdades relacionadas con la conjugación:

De la definición número conjugado y de la definición de suma, producto y cociente de complejos, se tiene:

$$\boxed{\bar{\bar{z}} = z}; \quad \boxed{\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}}; \quad \boxed{\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}; \quad \boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}},$$

donde $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4.2 Raíces de polinomios: El Teorema Fundamental del Álgebra

En el conjunto de los números reales, las ecuaciones de segundo grado pueden tener 2 soluciones distintas, 1 solución doble o ninguna solución. Esta clasificación depende del signo del llamado **discriminante** de dicha ecuación. Recordemos qué es este discriminate y cómo se calculan las raíces de un polinomio de grado 2.

Dado el polinomio de grado 2 $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$, las raíces de $p(x)$ corresponden a las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

que están dadas por la fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

El **discriminante** del polinomio o de la ecuación viene dado por la expresión:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

Así,

- si $\Delta > 0$, entonces el polinomio p posee dos raíces reales distintas dadas por:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

- si $\Delta = 0$, entonces existe una única solución real (doble):

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}.$$

- si $\Delta < 0$, entonces no hay soluciones reales.

Importante:

Si trabajamos en el $\mathbb{C}$, no hay ningún problema en calcular las raíces, incluso si el discriminante Δ es negativo: Si $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$, entonces, se tiene:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-(4ac - b^2)} = \sqrt{4ac - b^2}\, i.$$

Así, la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

tiene **dos raíces complejas conjugadas** dadas por:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i}, \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i}.$$

En conclusión, podemos afirmar que un polinomio de segundo grado tiene siempre o una raíz doble o dos raíces reales o dos raíces complejas (conjugadas).

Ejemplo 4.7
Resolver las ecuaciones de segundo grado:

1. $\boxed{3x^2 - 2x + 5 = 0}$: Aplicando la fórmula, tenemos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 60}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-4 \cdot 14}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{14}\, i}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{3}\, i.$$

2. $\boxed{2x^2+2x+5=0}$: De nuevo, aplicando la fórmula, tenemos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{-2 \pm 6i}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\,i.$$

Como hemos dicho anteriormente, las raíces complejas que aparecen son siempre un número complejo y su conjugado.

Terminamos esta sección con un resultado muy importante dentro del Álgebra: El Teorema Fundamental del Álgebra. Éste establece el número de raíces que tiene un polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos:

Teorema 4.8 (Teorema Fundamental del Álgebra (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855))
Sea $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos. Entonces P posee exactamente n raíces complejas (contadas tantas veces como indica su multiplicidad).

Observación 4.9
El resultado anterior es un teorema de existencia: garantiza la existencia de n raíces de un polinomio de grado n. Sin embargo, el resultado no proporciona un método que calcule de manera exacta estas raíces, salvo en el caso de polinomios de grado 2, donde hay una fórmula explícita.

4.3 Representación geométrica de un número complejo

Así como los números reales se representan geométricamente por medio de una recta, es posible dar una representación geométrica de los números complejos usando un sistema de coordenadas cartesianas en el plano. Identificaremos el número complejo $z = a + bi$, con el punto del plano, $P = (a, b)$. De esta forma, se obtiene una representación geométrica de $\mathbb{C}$ en el plano, donde podemos identificar el eje de abscisas con la recta de los números reales, y el eje de ordenadas con la recta formada por los números imaginarios puros (ver la figura 4.1).

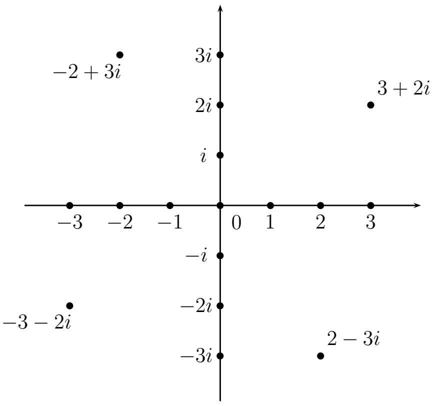


Figura 4.1: Representación geométrica de un número complejo.

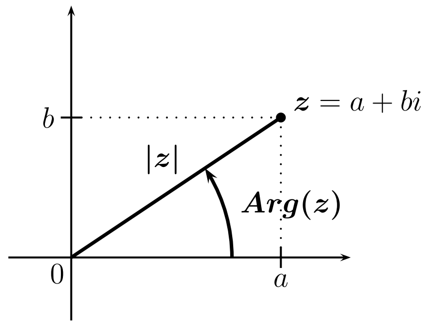


Figura 4.2: Módulo y argumento de un número complejo.

Definición 4.10
Llamaremos **módulo** *del número complejo $z = a + bi$ a la longitud del segmento del plano que une el origen 0 con z, y lo denotaremos como $|z|$ (una cantidad estrictamente positiva, salvo en el caso de $z = 0$, que es nula). Mediante el Teorema de Pitágoras es fácil comprobar:*

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}}.$$

Por otro lado, el **argumento** *de un número complejo z (distinto de 0), que denotaremos $\arg(z)$, es el ángulo que forma el segmento que une 0 con z con el semi-eje positivo de abscisas, medido en sentido positivo, es decir, en el sentido contrario a las agujas del reloj. Este valor se puede calcular de la siguiente forma:*

$$\boxed{\arg(z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)},$$

teniendo en cuenta que tenemos que sumar o restar π en función de los signos de a y b (la función $\operatorname{arc\,tg} x$ toma valores en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, ver más abajo).

Es importante resaltar que la función $\operatorname{tg} x$ es periódica de periodo π:

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, para calcular el argumento asociado a un número complejo z será necesario tener en cuenta el cuadrante en el que se sitúa el número z. En concreto, tenemos que tener en cuenta el siguiente cuadro:

Primer cuadrante: $a > 0$, $b > 0$. Entonces, $\boxed{\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$ y $\boxed{\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)}$	**Segundo cuadrante**: $a < 0$, $b > 0$. Entonces $\boxed{\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}$ y $\boxed{\alpha = \pi + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)}$ o $\boxed{\alpha = \pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lvert b\rvert}{\lvert a\rvert}\right)}$
Tercer cuadrante: $a < 0$, $b < 0$. Entonces $\boxed{\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)}$ y $\boxed{\alpha = \pi + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)}$	**Cuarto cuadrante**: $a > 0$, $b < 0$. Entonces $\boxed{\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)}$ y $\boxed{\alpha = 2\pi + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)}$ o $\boxed{\alpha = 2\pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lvert b\rvert}{\lvert a\rvert}\right)}$

Aunque existen infinitos ángulos asociados al argumento de un número complejo, trabajaremos con el llamado **argumento principal** que es el valor del ángulo comprendido entre 0 y 2π. Si usamos el cuadro anterior, el valor de α está siempre en dicho rango.

Módulo y argumento de números reales e imaginarios puros:
En el caso particular de los números reales $a \in \mathbb{R}$ o de los números imaginarios puros, el **el módulo coincide con el valor absoluto de la parte real o imaginaria**:

$$\boxed{|a| = |a|} \quad \text{y} \quad \boxed{|bi| = |b|}.$$

En el caso de números **reales** e **imaginarios puros** hay que interpretar la fórmula del argumento del complejo. En concreto:

1. Si $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, entonces, el argumento principal es $\boxed{\arg(a) = 0}$.
2. Si $a \in \mathbb{R}$ con $a < 0$, entonces, el argumento principal es $\boxed{\arg(a) = \pi}$.
3. Si $z = bi$ con $b > 0$, entonces, el argumento principal viene dado por $\boxed{\arg(bi) = \frac{\pi}{2}}$.
4. Si $z = bi$ con $b < 0$, entonces, el argumento principal es $\boxed{\arg(bi) = \frac{3\pi}{2}}$.

Ejemplo 4.11
Calcular el módulo y el argumento principal de los números complejos (ver Figura 4.3):

1. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$: El módulo está dado por $|z_1| = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$. Por otro lado, como z_1 está en el primer cuadrante,
$$\theta_1 = \arg(z_1) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}(= 60^\circ).$$
2. $z_2 = -4 + 3i$: El módulo es: $|z_2| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Como z_2 está en el segundo cuadrante, su argumento principal es
$$\theta_2 = \arg(z_2) = \pi + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{-4}\right) = \pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{4}\right) = 2'4980915448(= 143'1301023542^\circ).$$
3. $z_3 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$: El módulo coincide con el módulo de z_1: $|z_3| = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$. Su argumento principal puede ser calculado teniendo en cuenta que z_3 está en el tercer cuadrante:
$$\theta_3 = \arg(z_3) = \pi + \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}(= 240^\circ).$$
4. $z_4 = 4 - 3\,i$: El módulo coincide con el módulo de z_2: $|z_4| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Calculamos su argumento principal teniendo en cuenta que z_4 está en el cuarto cuadrante:
$$\theta_4 = \arg(z_4) = 2\pi + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{-4}\right) = 2\pi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{4}\right) = 5'6396841984(= 323'1301023542^\circ).$$

Propiedades del módulo:
Dados los números complejos $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $|z| \geq 0$ y $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$.
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (siempre que $z_2 \neq 0$).

Antes de seguir, recordemos cómo se definen las funciones trigonométricas:

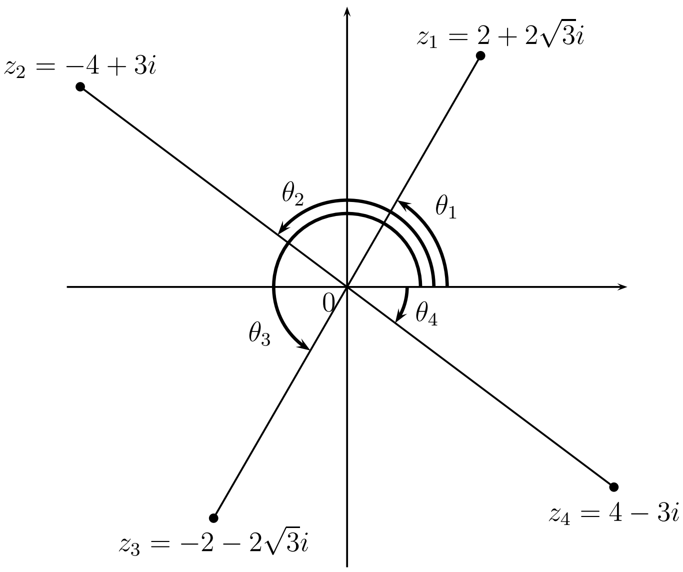


Figura 4.3: Ejemplo 4.11

Razones trigonométricas directas:

Para introducir las **funciones trigonométricas** seguiremos la Figura 4.2 llamando $\rho = |z|$ (hipotenusa) y $\theta = \arg(z)$ (ángulo). Así,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{\rho}, \quad \cos\theta = \frac{\text{cateto continuo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{\rho}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto continuo}} = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

También podemos introducir las **funciones trigonométricas** deducidas de las anteriores:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\rho}{b} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \sec\theta = \frac{\rho}{a} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{a}{b} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

Del Teorema de Pitágoras se deducen las importantes igualdades trigonométricas:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1} \quad \text{y} \quad \boxed{\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}}.$$

Nos planteamos ahora el siguiente problema: Supongamos que conocemos el **módulo** y el **argumento** (principal, por ejemplo) de un número complejo z, ¿es posible reconstruir la **forma binómica** del número z? Veamos que siempre es posible. Supongamos que $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ no son conocidos. supongamos que conocemos su módulo $\rho = |z| \in (0, +\infty)$ y su argumento $\theta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$. Entonces, es fácil comprobar que (ver Figura 4.4):

$$\boxed{a = \rho\cos\theta}, \quad \boxed{b = \rho\operatorname{sen}\theta}.$$

En consecuencia, recuperamos la forma binómica de z que está dada por:

$$\boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}.$$

Definición 4.12

*Dado el número complejo z de módulo $\rho \in (0, \infty)$ y argumento principal $\theta \in [0, 2\pi)$, llamaremos **forma polar** del número z a la expresión*

$$\boxed{z = (\rho)_\theta}.$$

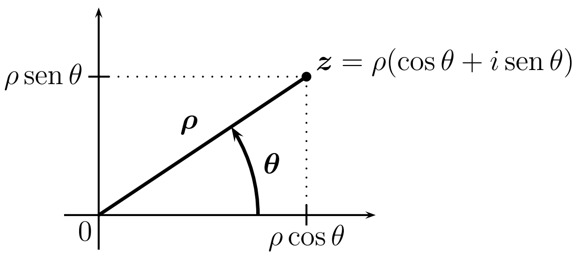


Figura 4.4: Forma trigonométrica del número complejo z.

Por otro lado, llamaremos ***forma trigonométrica*** *de z a la expresión*

$$\boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}.$$

Obsérvese que la **forma trigonométrica** del número complejo z es, en realidad, su forma binomial donde

$$\boxed{\Re(z) = \rho\cos\theta} \quad \text{y} \quad \boxed{\Im(z) = \rho\operatorname{sen}\theta}.$$

La ventaja de la forma polar y trigonométrica radica en que deja a la vista de manera explícita el módulo y el argumento del número z.

Pasemos a continuación a mostrar otra de las formas de representar un número complejo. Se trata de la forma fasorial que se basa en la llamada **fórmula de Euler**.

Definición 4.13

Dado un número real $\theta \in \mathbb{R}$ definimos $e^{i\theta}$ mediante la llamada ***fórmula de Euler****:*

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}, \quad \boxed{\left|e^{i\theta}\right| = 1}.$$

Como consecuencia obtenemos la ***forma fasorial*** *de un número complejo: Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, de módulo $\rho = |z| \in (0, \infty)$ y argumento $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$, entonces la forma fasorial de z viene dada por:*

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta} = |z|e^{i\arg(z)}}(= \rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)).$$

En particular, la fórmula de Euler nos proporciona las igualdades:

$$\boxed{e^{\pi i} = -1} \quad \text{y} \quad \boxed{\left|e^{i\theta}\right| = 1}.$$

Conjugado en forma polar, trigonométrica y fasorial:

Supongamos que $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo $\rho = |z| \in (0, +\infty)$ y argumento $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$ ($\theta = \arg(z) \in [0, \pi)$ si consideramos el argumento principal). Entonces,

$$\boxed{z = (\rho)_\theta}, \quad \boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}, \quad \boxed{z = \rho e^{i\theta}}.$$

En particular, $\overline{z} = \rho\,(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) = \rho\,(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta))$, de donde deducimos $\arg(\overline{z}) = -\theta = -\arg(z)$ y

$$\boxed{\overline{z} = (\rho)_{-\theta}}, \quad \boxed{\overline{z} = \rho e^{-i\theta}}.$$

Observación 4.14
La representación fasorial aparece en la asignatura **Óptica Física**, obligatoria en el primer cuatrimestre del segundo curso del Grado en Óptica y Optometría. Se usará para escribir la función de onda:

$$\psi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi)},$$

pero sólo la parte real representa la onda.

4.4 Operaciones con complejos en forma polar, trigonométrica o fasorial

Otra de las ventajas que tienen las formas polar y trigonométrica de un número complejo es que simplifican las fórmulas de producto, cociente y potencia de números complejos. Para ver cómo son las fórmulas asociadas a esas operaciones, necesitamos algunos conocimientos de trigonometría:

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos:
Dados los ángulos $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \\ \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \\ \cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \end{array}}$$

4.4.1 Producto de complejos en forma polar, trigonométrica o fasorial

Comenzamos viendo las fórmulas del producto de números complejos. Utilizando las fórmulas del seno y coseno de la suma y de la diferencia, es fácil ver en qué se transforma el producto de dos números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

Producto de complejos en forma polar, trigonométrica o fasorial:
Supongamos que tenemos los números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dados en forma polar:

$$\boxed{z_1 = (\rho_1)_{\theta_1}} \quad \text{y} \quad \boxed{z_2 = (\rho_2)_{\theta_2}}$$

Obsérvese que las anteriores igualdades nos indican que z_1 es un número complejo de módulo $\rho_1 = |z_1| \in (0,\infty)$ y argumento $\theta_1 = \arg(z_1)$ (si es el argumento principal, entonces, $\theta_1 \in [0, 2\pi)$). Lo mismo se tiene para z_2, su módulo es $\rho_2 = |z_2| \in (0,\infty)$ y su argumento es $\theta_2 = \arg(z_2)$ (con $\theta_2 \in [0, 2\pi)$ en el caso de que sea el argumento principal). En forma trigonométrica,

$$\boxed{z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)} \quad \text{y} \quad \boxed{z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)}$$

Así,

$$\left\{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (\rho_1)_{\theta_1} \cdot (\rho_2)_{\theta_2} = \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\ \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)\right] \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)) = (\rho_1\cdot\rho_2)_{\theta_1+\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}\right.$$

Conclusión: Hemos obtenido las fórmulas:

$$\boxed{(\rho_1)_{\theta_1} \cdot (\rho_2)_{\theta_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2)_{\theta_1+\theta_2}}$$

$$\boxed{\rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\ \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) = \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right]}$$

$$\boxed{\left(\rho_1 e^{i\theta_1}\right)\cdot\left(\rho_2 e^{i\theta_2}\right) = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

que se interpreta del siguiente modo: *"El producto de dos números complejos se obtiene multiplicando sus módulos y sumando sus argumentos."*

Ejemplo 4.15
Calcular los productos de los números complejos:

1. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$: En el Ejemplo 4.11 vimos que $z_1 = 4_{\pi/3}$ y que $z_2 = 4_{4\pi/3}$. Así,

$$z_1 \cdot z_2 = 4_{\pi/3} \cdot 4_{4\pi/3} = 16_{5\pi/3} = 16\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 8\left(1 - \sqrt{3}\,i\right).$$

2. $z_1 = 2_{\pi/4}$, $z_2 = 3_{\pi}$: En este caso se tiene:

$$z_1 \cdot z_2 = 2_{\pi/4} \cdot 3_{\pi} = 6_{5\pi/4} = 6\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = -3\sqrt{2}\,(1+i).$$

3. $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_2 = 3e^{-\frac{\pi}{2}i}$:

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot 3e^{-\frac{\pi}{2}i} = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i} = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right).$$

4.4.2 Cociente de complejos en forma polar o trigonométrica

Razonando como en la subsección anterior, es posible dar fórmulas del cociente de números complejos en forma polar o trigonométrica:

Cociente de números complejos en forma polar o trigonométrica:
Supongamos que tenemos los números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dados en forma polar o fasorial:

$$\boxed{z_1 = (\rho_1)_{\theta_1} = \rho_1 e^{i\theta_1}} \quad \text{y} \quad \boxed{z_2 = (\rho_2)_{\theta_2} = \rho_2 e^{i\theta_2}}$$

o, de manera equivalente, en forma trigonométrica,

$$\boxed{z_1 = \rho_1\left(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\right)} \quad \text{y} \quad \boxed{z_2 = \rho_2\left(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right)}$$

Así,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(\rho_1)_{\theta_1}}{(\rho_2)_{\theta_2}} = \frac{\rho_1\left(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\right)}{\rho_2\left(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\left(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\right)\cdot\left(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right)}{\left(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right)\cdot\left(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right)} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right) + i\left(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right)\right] \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\theta_1-\theta_2\right)\right) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\theta_1-\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}\right.$$

Conclusión: Hemos obtenido las fórmulas:

$$\boxed{\frac{(\rho_1)_{\theta_1}}{(\rho_2)_{\theta_2}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\theta_1-\theta_2}}$$

$$\boxed{\frac{\rho_1\left(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\right)}{\rho_2\left(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]}, \quad \boxed{\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}}$$

que se interpreta del siguiente modo: *"El cociente de dos números complejos se obtiene dividiendo sus módulos y restando sus argumentos."*

Veamos algún ejemplo de aplicación:

Ejemplo 4.16
Calcular los cocientes de los números complejos:

1. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$: Como vimos en el Ejemplo 4.11, $z_1 = 4_{\pi/3}$ y $z_2 = 4_{4\pi/3}$. Por tanto,
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4_{\pi/3}}{4_{4\pi/3}} = 1_{-\pi} = -1.$$
2. $z_1 = 2_{\pi/4}$, $z_2 = 3_\pi$: En este caso se tiene:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2_{\pi/4}}{3_\pi} = \left(\frac{2}{3}\right)_{-\frac{3\pi}{4}} = \frac{2}{3}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(-1 - i\right).$$
3. $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_2 = 3e^{-\frac{\pi}{2}i}$:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}}{3e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{\frac{2\pi}{3}i} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{6}\left(-1 + i\sqrt{3}\right).$$

4.4.3 Potencias de complejos en forma polar o trigonométrica

Pasemos a continuación a ver cómo podemos calcular potencias de números complejos. Empezamos con el caso más sencillo:

Potencias de la unidad imaginaria:
Es fácil obtener las potencias de la unidad imaginaria i a partir de la relación $i^2 = -1$:

- $i^0 = 1$;
- $i^1 = i$;
- $i^2 = -1$:
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$;
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ ó $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1$.

Se puede comprobar que a partir de la potencia 4 se van repitiendo:
$$i^5 = i^4 \cdot i = i; \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1; \quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i; \quad \cdots$$
En general, dado $n \in \mathbb{N}$, dividiendo por 4, podemos escribir $n = 4m + k$ (k es el resto de la división). Así
$$\boxed{i^n = i^{4m} \cdot i^k = \left(i^4\right)^m \cdot i^k = i^k}.$$

Ejemplo 4.17
Calcular las potencias:

1. $\boxed{i^{145}}$: Haciendo la división por 4, podemos escribir $145 = 36 \cdot 4 + 1$. Así,

$$i^{145} = i^{36\cdot 4} \cdot i = \left(i^4\right)^{36} \cdot i = i.$$

2. $\boxed{i^{-27}}$: De nuevo, efectuando la división por 4, escribimos $27 = 6 \cdot 4 + 3$. Al tratarse de un cociente, para realizar el cálculo, multiplicaremos por el conjugado de i^{27} (que es $(-i)^{27}$) y razonaremos como antes:

$$i^{-27} = \frac{1}{i^{27}} = \frac{(-i)^{27}}{i^{27} \cdot (-i)^{27}} = -i^{27} = -i^{6\cdot 4} \cdot i^3 = -\left(i^4\right)^6 \cdot i^3 = i.$$

Pasemos a ver cómo se calculan las potencias de un número complejo cualquiera. Como consecuencia de la fórmula del producto, deducimos la fórmula:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2 = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta).$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = (\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta))\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\\ &= \cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta).\end{aligned}$$

De manera general:

Teorema 4.18 (Fórmula de De Moivre)
Dados un número natural $n \in \mathbb{N}$ y un ángulo $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\boxed{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)},$$

es decir,

$$\boxed{(1_\theta)^n = 1_{n\theta}}, \quad \boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}.$$

Como consecuencia podemos obtener fórmulas para las potencias de números complejos escritas en forma polar o trigonométrica:

Potencia de números complejos en forma polar o trigonométrica:
Dados un número natural $n \in \mathbb{N}$ y un número complejo $z \in \mathbb{C}$ en forma polar, trigonométrica o fasorial,

$$\boxed{z = (\rho)_\theta}, \quad \boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}, \quad \boxed{z = \rho e^{i\theta}}$$

con $\rho > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\boxed{[(\rho)_\theta]^n = [\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = \rho^n\,(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = (\rho^n)_{n\theta} = \rho^n e^{in\theta}}.$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de las anteriores fórmulas.

Ejemplo 4.19
Calcular las potencias que se indican:

1. $(1+i)^4$: Comenzamos escribiendo el número $1+i$ en su forma trigonométrica. El módulo es $\sqrt{2}$ y, al situarse en el primer cuadrante, su argumento es $\operatorname{arc\,tg}(1) = \pi/4$. Así,

$$(1+i)^4 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(\cos\left(4\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(4\frac{\pi}{4}\right)\right) = -4.$$

2. $(-\sqrt{3}+i)^7$: Razonamos como antes. Tenemos que el módulo de $z = -\sqrt{3}+i$ es 2. Por otro lado, al situarse en el segundo cuadrante, se tiene

$$\arg(z) = \pi + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ.$$

Deducimos

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+i)^7 &= \left(2_{150^\circ}\right)^7 = \left(2^7\right)_{7\cdot 150^\circ} = 128_{1050^\circ} = 128_{330^\circ} = 128\left[\cos(330^\circ) + i \operatorname{sen}(330^\circ)\right] \\ &= 128\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 64\left(\sqrt{3} - i\right)\end{aligned}$$

3. $(1-i)^3$: Seguimos el razonamiento anterior. El módulo del número complejo es $\sqrt{2}$. Al tratarse de un número que está en el cuarto cuadrante, su argumento está dado por

$$\arg(z) = 2\pi + \operatorname{arc\,tg}(-1) = 2\pi - \operatorname{arc\,tg} 1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(1-i)^3 &= \left[\left(\sqrt{2}\right)_{7\pi/4}\right]^3 = \left(2\sqrt{2}\right)_{21\pi/4} = \left(2\sqrt{2}\right)_{4\pi+\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos(5\pi/4) + i \operatorname{sen}(5\pi/4)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2(1+i).\end{aligned}$$

4.4.4 Raíces de complejos en forma polar o trigonométrica

En esta subsección veremos cómo se calculan raíces (cuadradas, cúbicas, cuartas, ...) de números complejos. Dado un número complejo en forma polar, trigonométrica o fasorial:

$$\boxed{z = (\rho)_\theta = \rho\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right) = \rho e^{i\theta}}$$

donde $\rho = |z|$ es el módulo de z y $\theta = \arg(z)$ es el argumento. Nos planteamos ahora las soluciones de la ecuación

$$\boxed{x^n - z = 0} \iff \boxed{x^n = z} \iff \boxed{x = \sqrt[n]{z}}.$$

Teniendo en cuenta el Teorema Fundamental del Álgebra (Teorema 4.8), el anterior polinomio de grado n debe tener n raíces (posiblemente con multiplicidad). Estas corresponden a los n valores que tiene la expresión

$$\boxed{\sqrt[n]{z}}.$$

Si $\boxed{z = 0}$, entonces $\sqrt[n]{0} = 0$; tenemos un único valor, que aparece n veces (multiplicidad n).

Supongamos ahora que $\boxed{z \neq 0}$ y veamos cómo se pueden calcular. Buscamos un número complejo $x = r\left(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha\right)$ tal que $x^n = z$, es decir,

$$\boxed{r^n\left(\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)\right) = \rho\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right)}. \tag{4.1}$$

De la igualdad anterior, deducimos que $r^n = \rho$, es decir,

$$\boxed{r = \sqrt[n]{\rho}}.$$

(Se trata de la raíz n-ésima de un número real positivo).

Por otro lado, de la igualdad (4.1) no sólo deducimos que $n\alpha = \theta$, también deducimos

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \iff \boxed{\alpha_k = \frac{\theta}{n} + 2\frac{k}{n}\pi}, \quad k \geq 0,$$

Esta igualdad sólo proporciona n ángulos distintos que están en el intervalo $[0, 2\pi)$. Estos corresponden a $k = 0, 1, \ldots, n-1$. A partir de $k = n$ se repiten los ángulos. Por ejemplo,

$$\alpha_0 = \frac{\theta}{n} \quad \text{y} \quad \alpha_n = \frac{\theta}{n} + 2\pi,$$

que corresponden al mismo ángulo. Resumiendo:

Raíz de números complejos en forma polar, trigonométrica o fasorial:

Dados un número natural $n \in \mathbb{N}$ y un número complejo $z \in \mathbb{C}$ en forma polar o trigonométrica,

$$\boxed{z = (\rho)_\theta}, \quad \boxed{z = \rho\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)}, \quad \boxed{z = \rho e^{i\theta}}$$

con $\rho > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\boxed{\sqrt[n]{(\rho)_\theta} = \sqrt[n]{\rho\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos(\alpha_k) + i\operatorname{sen}(\alpha_k)\right) = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)_{\alpha_k} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\alpha_k}},$$

con

$$\boxed{\alpha_k = \frac{\theta}{n} + 2\frac{k}{n}\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Conclusión: Cualquier complejo z (distinto del 0) tiene exactamente n raíces n-ésimas, todas ellas con el mismo módulo ($\sqrt[n]{|z|}$), y argumentos que difieren entre sí por $2\pi/n$. Geométricamente, esto se traduce en que las raíces n-ésimas de un complejo z están situadas sobre los vértices de un n-ágono regular inscrito en la circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt[n]{|z|}$.

Ejemplo 4.20
Calcular las raíces de los números complejos siguientes:

1. $\sqrt[3]{-1}$:
$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_\pi} = \sqrt[3]{1_{\pi+2k\pi}} = 1_{\pi/3+2k\pi/3}.$$
De esta manera obtenemos los valores correspondientes a $k = 0$, 1 y 2, es decir
$$\boxed{z_1 = 1_{\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad \boxed{z_2 = 1_\pi = -1}, \quad \boxed{z_3 = 1_{5\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$
2. Raíces cúbicas de $z = 8(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°)$: En este caso:
$$z = 8(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°) = 8\left[\cos\left(30° + 360k°\right) + i\operatorname{sen}\left(30° + 360k°\right)\right].$$
Por tanto,
$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(10° + 120k°\right) + i\operatorname{sen}\left(10° + 120k°\right)\right].$$
Igual que antes, obtenemos los valores correspondientes a $k = 0$, 1 y 2, es decir
$$\boxed{z_1 = 2\left(\cos 10° + i\operatorname{sen} 10°\right)}, \quad \boxed{z_2 = 2\left(\cos 130° + i\operatorname{sen} 130°\right)}, \quad \boxed{z_3 = 2\left(\cos 250° + i\operatorname{sen} 250°\right)}.$$
3. $\sqrt[6]{1}$:
$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{e^{2k\pi i}} = e^{\frac{2k\pi}{6}i} = e^{\frac{k\pi}{3}i}.$$
Dando los valores $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5, obtenemos las seis raíces que aparecen en la Figura 4.5.

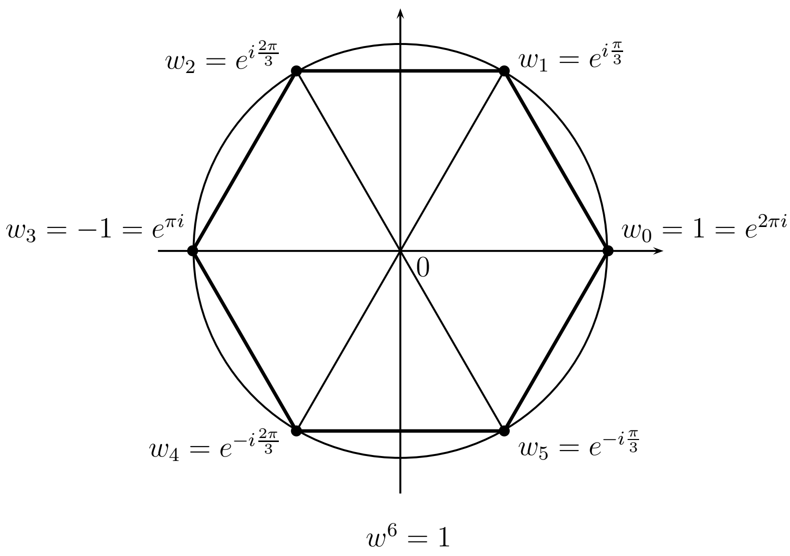


Figura 4.5: Raíz sexta de la unidad.

Apéndice: Nociones de trigonometría

Para medir ángulos utilizaremos los radianes y los grados aunque, preferentemente, usaremos los radianes. Por otro lado, aunque las calculadoras científicas efectúan cualquier tipo de cálculo trigonométricos, no está de más conocer los valores de las principales funciones trigonométricas en algunos ángulos principales:

Grados	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	No definida

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos:
Dados los ángulos $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \\ \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \\ \cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\end{array}}$$

Relaciones entre las razones de ciertos ángulos:
Dado el ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene:

Ángulos suplementarios	
$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

Ángulos que difieren en π rad.	
$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

Ángulos opuestos	
$\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

Ángulos complementarios	
$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$

Ejemplo 4.21
Calcular $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 4.22
Con ayuda de las fórmulas que relacionan la suma o diferencia entre dos ángulos, calcula las siguientes razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble y el ángulo mitad:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\theta)&=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\ \cos(2\theta)&=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}}\qquad\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta/2)&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\\ \cos(\theta/2)&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\end{aligned}}$$

(En la fórmula del ángulo mitad, hay que elegir el signo $+$ o $-$ en función del cuadrante en que se sitúe $\theta/2$).

Ejemplo 4.23
Sabiendo que $\operatorname{cotg} a=\dfrac{4}{3}$, calcular el valor de $\cos(2a)$.

Sabemos que $1+\operatorname{tg}^2 a=\dfrac{1}{\cos^2 a}$ y que $\operatorname{tg} a=\dfrac{1}{\operatorname{cotg} a}$. Por tanto,

$$\operatorname{tg} a=\frac{3}{4},\quad \frac{1}{\cos^2 a}=\frac{25}{16}\quad \text{y}\quad \cos(2a)=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a=2\cos^2 a-1=\frac{7}{25}.$$

Transformación de productos en sumas:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

Ejemplo 4.24
Calcular $\operatorname{sen}(75^\circ)\cos(15^\circ)$**.**
Aplicando la fórmula correspondiente:

$$\operatorname{sen}(75^\circ)\cos(15^\circ) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(90^\circ)+\operatorname{sen}(60^\circ)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Transformación de sumas en productos:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Ejemplo 4.25
Calcular $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$**.**

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Como

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

entonces:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3(2-\sqrt{3})}}{2}.$$

Ejemplo 4.26
Dos ondas armónicas están descritas por $y_1 = 4\operatorname{sen}(8x-300t)$**,** $y_2 = 4\operatorname{sen}(8x-300t-2)$**. Calcular** y_1+y_2**.**
En este caso,

$$y_1+y_2 = 4\left[\operatorname{sen}(8x-300t)+\operatorname{sen}(8x-300t-2)\right] = 8\operatorname{sen}(8x-300t-1)\cos(1)$$

Para acabar este apéndice, recordemos dos resultados importantes que relacionan los lados de un triángulo y los ángulos que forman éstos.

Teorema 4.27 (Teorema del seno)
Los lados a, b y c de un triángulo se relacionan con sus ángulos opuestos A, B y C, respectivamente, mediante la fórmula (ver Figura 4.6):

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}.$$

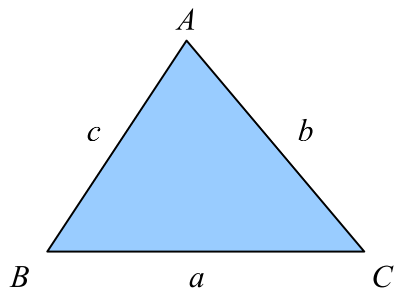


Figura 4.6: Teoremas de los senos y cosenos.

Ejemplo 4.28
En un triángulo se conoce un lado $a = 6$ y los ángulos $B = \frac{\pi}{4}$ y $C = \frac{7\pi}{12}$. Calcular los elementos restantes.
Como la suma de los ángulos de un triángulo deben sumar π, entonces, $A = \frac{\pi}{3}$. Usando el Teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{12})}$$

luego

$$\boxed{b = 6\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}}, \quad \boxed{c = 12\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}.$$

Comprobar la última igualdad.

Teorema 4.29 (Teorema del coseno)
Se tiene (ver Figura 4.6):

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}}$$

Ejemplo 4.30
Calcular el lado a de un triángulo sabiendo que el lado $b = 3$, el lado $c = 4$ y el ángulo entre ambos $A = \frac{\pi}{3}$.

Usando el Teorema del coseno,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 9 + 16 - 24\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9 + 16 - 12 = 13,$$

es decir, $\boxed{a = \sqrt{13}}$.

Tema 5

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Autovalores y autovectores.

5.1 Introducción

Definición 5.1
Denominamos matriz de orden $n \times m$ a una **disposición ordenada** *de $n \times m$ números reales escritos en una tabla rectangular de elementos de la forma:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

A los números reales a_{ij} se les denomina **elementos de la matriz**. *El subíndice i indica la fila y el subíndice j indica la columna donde se encuentra el elemento a_{ij}. Finalmente, n y m indican, respectivamente, el número de filas y columnas que posee la matriz.*

Usaremos la notación $\mathcal{M}_{n\times m}$ para designar el conjunto de las matrices de orden $n \times m$:

$$\mathcal{M}_{n\times m} = \Big\{ A : A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m} \text{ es un matriz de orden } n \times m \Big\}$$

Tipos de matrices:

- **matriz fila:** es aquella que sólo tiene una fila.
- **matriz columna:** es aquella que sólo tiene una columna.
- **matriz traspuesta:** es la que resulta de intercambiar filas y columnas.
- **matriz cuadrada:** es la que posee el mismo número de filas que de columnas: $n = m$.
- **matriz identidad, Id:** es aquella matriz cuadrada cuyos elementos son el número 1 en la diagonal y 0 en el resto.
- **matriz diagonal:** es aquella matriz cuadrada cuyos elementos extradiagonales son 0.
- **matriz triangular superior:** es aquella cuyo elementos subdiagonales son 0.
- **matriz triangular inferior:** es aquella cuyo elementos supradiagonales son 0.
- **matriz nula o cero:** es aquella con todos los elementos nulos.

- **matriz simétrica:** es aquella matriz cuadrada que es igual a su traspuesta. Es decir, una matriz A que satisface la igualdad $A^t = A$.

- **matriz antisimétrica:** es aquella matriz cuadrada que es igual a su traspuesta cambiada de signo. Es decir, una matriz A que verifica la igualdad $A^t = -A$.

Otros aspectos importantes son:

- **rango de una matriz A:** Se llama **menor de orden r de** A al determinante de la matriz formada por la intersección de **r** filas y **r** columnas (cualesquiera) de A. El **rango de** A es **r** si existe un menor no nulo de orden **r** y todos los menores de orden $\mathbf{r+1}$ son nulos. En este curso, haremos el cálculo del rango de una matriz usando el **Método de Gauss**.

- **inversa de una matriz A, A^{-1}:** Una matriz se dice **invertible** si $det(A) \neq 0$. En tal caso, existe su inversa, que llamaremos A^{-1} y que verifica que:

$$A^{-1} \cdot A = Id \quad \text{y} \quad A \cdot A^{-1} = Id.$$

5.2 Operaciones básicas con matrices

A continuación, definiremos las principales operaciones con matrices:

Definición 5.2 (Suma/Diferencia de matrices)
Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m} \in \mathcal{M}_{n\times m}$ de orden $n \times m$, definimos la suma $A + B$ (respectivamente, la diferencia $A - B$) como la matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times m} = (c_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$ de orden $n \times m$ dada por

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}, \quad (\text{respectivamente, } \boxed{c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}}) \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m.$$

Definición 5.3 (Producto de matrices por número reales)
Dada una matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m} \in \mathcal{M}_{n\times m}$, de orden $n \times m$, y un número real $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos el producto λA como la matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times m} = (c_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$ de orden $n \times m$ dada por

$$\boxed{c_{ij} = \lambda a_{ij}} \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m.$$

Definición 5.4 (Producto de matrices)
Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m} \in \mathcal{M}_{n\times m}$, de orden $n \times m$, y $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq l} \in \mathcal{M}_{m\times l}$, de orden $m \times l$, definimos el producto $A \cdot B$ como la matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times l} = (c_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq l}$ de orden $n \times l$ dada por

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}} \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq l.$$

Importante: *Para multiplicar $A \cdot B$, necesitamos que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B. El resultado de este producto es una nueva matriz con el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas de B.*

Potencia de una matriz cuadrada A: La potencia m de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ de dimensión $n\times n$ es una matriz cuyos elementos son el resultado de multiplicar la matriz A m veces por sí misma. En el caso en que la matriz A sea diagonalizable, dicha operación se puede simplificar.

Ejemplo 5.5
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**, calcular:**

- $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **: El producto de matrices no es simétrico:** $\boxed{AB \neq BA}$.
- $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $3A+B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
- $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.3 Cálculo de determinantes. Matriz inversa

A cada matriz cuadrada de orden $n\times n$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, es posible asociarle un valor real, llamado **determinante de** A y denotado por $\det A$ o $|A|$). En este apartado no daremos la definición de determinante de una matriz, aunque recordaremos cómo se calcula.

El **determinante de una matriz** A, $det(A) = |A|$, es un operación que tiene sentido realizar si la matriz A es cuadrada.

Definición 5.6
Dada $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, una matriz cuadrada de orden 2×2, definimos el determinante de A, $\det A$ o $|A|$, de la forma siguiente:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Por otro lado, dada $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$, una matriz cuadrada de orden 3×3, definimos el determinante de A, $\det A$ o $|A|$, mediante la igualdad:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Añadir regla de Sarrus.

El cálculo del determinante de una matriz A de orden superior a tres es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes. Tengamos en cuenta que:

- El **adjunto** del elemento a_{ij} de una matriz A se designa por A_{ij} y es el determinante de la matriz complementaria M_{ij} precedido del signo $+$ o $-$ según la suma de los subíndices $i+j$ sea par $(+)$ o impar $(-)$. Es decir,
$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$
- La **matriz complementaria** M_{ij} del elemento a_{ij} es la matriz que se obtiene al eliminar de la matriz A la fila i y la columna j.

Por tanto, el determinante de una matriz A de orden n viene dado, por ejemplo, por la expresión:

$$det(A) = |A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}.$$

Añadir que si el determinante es cero, entonces las filas y las columnas de la matriz son l.i.

Añadir también que para matrices triangulares, el determinante viene dado por el producto de la diagonal principal.

Ejemplo 5.7

Para una matriz de orden 4,

$$det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}.$$

Ejemplo 5.8

Calculamos los siguientes determinantes:

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -2$
- $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 5 = -87$
- $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-10) + 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-12) = 19 \end{aligned}$$

También se puede realizar el cálculo del determinante de una matriz habiendo aplicado antes el método de Gauss a dicha matriz. Ver Sección 5.4.

Ejemplo 5.9

En la asignatura **Instrumentos Ópticos**, obligatoria en el primer cuatrimestre de 2º curso del Grado en Óptica y Optometría, se usarán matrices 2×2 a las que habrá que calcularles (entre otras cosas) su determinante e inversa. Algunas de dichas matrices son:

- Matriz de transferencia del dioptrio con respecto al vértice V: donde $\dfrac{1}{f'} = \left(1 - \dfrac{n}{n'}\right) \dfrac{1}{R}$, n, n' son los índices de refracción de dos medios separados por una superficie esférica de radio R (radio de curvatura del dioptrio) centrada en un punto C y con vértice en el punto V. Observemos que:
- Matriz de transferencia del sistema respecto a los orígenes en O en el espacio objeto y O' en el espacio imagen: donde γ es el aumento angular, β el aumento lateral, y $\gamma \cdot \beta = \frac{n}{n'}$.

- Matriz de traslación de A a C, estando ambos puntos a distancia d: Observemos que:

$$det(T_{CA}) = 1 \quad \text{y} \quad T_{CA}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz inversa de una matriz A, A^{-1} se puede calcular de la forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

donde $Adj(A)$ es la matriz adjunta de A, que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto correspondiente A_{ij}.

Ejemplo 5.10
Calculamos las inversas de las siguientes matrices:

- $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.4 Sistemas lineales. Método de Gauss

La necesidad de resolver sistemas lineales surge en muchas aplicaciones: determinación de tensiones en los nudos de una red de corriente continua, cálculo de estructuras reticuladas definidas por vigas, ...
Un sistema lineal de ecuaciones se puede escribir de la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

y se puede resolver de varias formas. Nosotros optaremos por su resolución una vez escribamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En consecuencia, nos plantearemos resolver un sistema lineal de n ecuaciones con m incógnitas:

$$\boxed{Ax = b}, \tag{5.1}$$

donde $A\mathcal{M}n \times m$ es una matriz $n \times m$ del sistema de ecuaciones, b es el vector de términos independientes $n \times 1$ ($b \in \mathbb{R}^n$) y x es el vector de incógnitas $m \times 1$ que buscamos ($x \in \mathbb{R}^m$).
Recordemos que en Bachillerato hemos estudiado la clasificación de los sistemas de ecuaciones según sean resolubles o no:

- Sistema Compatible Determinado (SCD)

- Sistema Compatible Indeterminado (SCI)

- Sistema Incompatible (SI)

Dicha clasificación se puede hacer atendiendo al:

Teorema 5.11 (Teorema de Rouché–Frobenius)
Supongamos dados $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, matriz cuadrada de orden $n \times n$, y $b \in \mathbb{R}^n$, segundo miembro. Entonces el sistema lineal (5.1) tiene solución si y solo si se tiene:

$$\boxed{rg\,(A\,|\,b) = rg\,A}.$$

Además,

- *Si $rg\,A < rg\,(A\,|\,b)$, entonces el sistema (5.1) es **incompatible**.*
- *Si $rg\,(A) = rg\,(A\,|\,b) = n$, es decir, si $\det A \neq 0$, entonces el sistema (5.1) es **compatible determinado** y posee una única solución.*
- *Si $rg\,(A) = rg\,(A\,|\,b) < n$ (y, en particular, $\det A = 0$), entonces el sistema (5.1) es **compatible indeterminado** y posee infinitas soluciones.*

Respecto a su resolución, podemos recordar la Regla de Cramer que es válida tanto para sistemas compatibles determinados como para sistemas compatibles indeterminados. Pero no será este el método que usaremos.

En este curso, pretendemos describir un método directo de resolución de sistemas de ecuaciones escritos en forma matricial, llamado **Método de Gauss**. Dicho método permite además clasificar el sistema según tenga o no solución. Consiste en la transformación de una matriz ampliada del sistema $(A|\vec{b})$ en otra **matriz triangular superior** realizando una serie de operaciones que describiremos a continuación. Una vez obtenida la nueva matriz, el sistema se resuelve mediante un **algoritmo de subida**.

El objetivo de este método es encontrar un método de resolución de matrices cualesquiera poco costoso desde el punto de vista computacional (que realice pocas operaciones algebraicas).

5.4.1 Método de Gauss.

El método de Gauss data de 1.818. Aunque ya había sido utilizado con anterioridad, fue Gauss (1.777-1.855) quien lo sistematizó por primera vez. El **método de Gauss** es un método general de resolución de un sistema lineal de la forma $A\vec{u} = \vec{b}$ donde A es una matriz cualquiera. Se compone de dos etapas:

1. procedimiento de eliminación, que equivale a determinar una matriz invertible M tal que la matriz $M(A|\vec{b})$ sea una matriz triangular superior,

2. resolución del sistema lineal $MA\vec{u} = M\vec{b}$, por el **algoritmo de subida**.

Describimos brevemente la primera etapa:

a) Etapa de eliminación:

1) Al menos uno de los elementos de la primera columna de A, a_{i1}, $1 \leq i \leq n$ es diferente de cero (ó det(A) =0), que llamaremos el primer pivote de la eliminación.

2) Intercambiamos la fila donde está el pivote con la primera fila, lo que equivale a multiplicar a izquierda por una matriz de trasposición del tipo:

$$P(i_0, i_1) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & | & & | & & \\ & \ddots & | & & | & & \\ -- & -- & 0 & -- & 1 & -- & -- \\ & & | & & | & & \\ -- & -- & 1 & -- & 0 & -- & -- \\ & & | & & | & \ddots & \\ & & | & & | & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \} \, i_0 \\ \\ \} \, i_1 \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \underbrace{}_{i_0} & & \underbrace{}_{i_1} & & \end{array} \end{array}$$

con $\det(P(i_0, i_1)) = -1$. Tomamos entonces P dada por la matriz:

$$P = \begin{cases} I & \text{si} \quad a_{11} \neq 0 \\ \\ P(1, i) & \text{si} \quad a_{i1}, \; i \neq 1 \text{ es el pivote}, \; \det(P) = -1 \end{cases}$$

y $PA = (\alpha_{ij})$ tal que $\alpha_{11} \neq 0$.

Hacemos combinaciones lineales adecuadas de la primera fila de $P\,A$ con las otras filas de $P\,A$, de forma que se anulan todos los elementos de la primera columna situados debajo de la diagonal. Es decir, multiplicamos $E_k\,(P\,A)$, donde

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\dfrac{\alpha_{k+1\,k}}{\alpha_{k\,k}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\dfrac{\alpha_{n\,k}}{\alpha_{k\,k}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \det(E_k) = 1$$

En la práctica, la matriz "de paso" M no se calcula explícitamente, sino que se obtienen directamente $M\,A$ y $M\,\vec{b}$.

Observación 5.12

La matriz M verifica

$$\det(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda \text{ es par} \\ \\ -1 & \text{si } \Lambda \text{ es impar} \end{cases}$$

siendo Λ el número de matrices de permutación P distintas de la identidad.

$$A\,\vec{u} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow M\,A\,\vec{u} = M\,\vec{b}.$$

Todo ello, nos permitirá probar el siguiente resultado teórico:

Teorema: *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \equiv \mathcal{M}_{m\times n}$ (invertible o no). Se verifica que existe (al menos) una matriz invertible $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que la matriz $M\,A$ es triangular superior (o inferior).*

Es interesante comparar el número de operaciones totales realizadas al aplicar el método de Gauss, las que llevan la matriz A a una matriz triangular junto con las realizadas por el método de subida, con las que se realizarían al aplicar la Regla de Cramer, para mostrar la gran diferencia de cálculos cuando el tamaño de la matriz aumenta.

Observación 5.13

En el caso de que A sea una matriz cuadrada y $\det(A) \neq 0$, entonces $\det(MA) = \pm\det(A)$. Esto se puede usar para calcular el determinante de A sin usar las fórmuejemplolas anteriores.

• **Algoritmo de subida**

El algoritmo de subida se aplica una vez que el sistema $A\vec{u} = \vec{b}$ se ha transformado en $(MA)\vec{u} = M\vec{b}$ donde MA es ahora una matriz triangular superior. Si escribiremos el sistema triangular superior como $\widetilde{A}\vec{u} = \tilde{\vec{b}}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1m} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2m} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \dots & \tilde{a}_{3m} & \dots & \tilde{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{mm} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones asociado es:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 + \cdots + \tilde{a}_{1m}x_m + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n & = & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \cdots + \tilde{a}_{2m}x_m + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n & = & \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_{33}x_3 + \cdots + \tilde{a}_{3m}x_m + \cdots + \tilde{a}_{3n}x_n & = & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{mm}x_m + \cdots + \tilde{a}_{mn}x_n & = & \tilde{b}_m \end{array} \right.$$

Observemos que para que el sistema tenga solución $m \leq n$, es decir, el número de ecuaciones es menor o igual que el número de incógnitas.

- Si $m = n$, entonces el sistema se resuelve despejando x_n en la última ecuación, sustituyéndolo en la penúltima para calcular x_{n-1} y así sucesivamente hasta llegar a despejar x_1 en la primera ecuación. De ahí el nombre de **algoritmo de subida**.
- Si $m < n$, entonces se considera que hay $n - m$ parámetros (por ejemplo $x_{m+1} = \lambda_1$, $x_{m+2} = \lambda_2$, $\dots$, $x_n = \lambda_{n-m}$) y se opera como en el caso anterior para las m primeras incógnitas (x_1, x_2, $\dots$, x_m).

Ejemplo 5.14

Resuelve por el método de Gauss el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 12 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{array} \right.$$

Sol: La reducción de la matriz ampliada por el método de Gauss es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 - 2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -10 \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ \quad -y + z = 0 \\ \quad -4z = -10 \end{array} \right.$$

Se trata por tanto de un Sistema Compatible Determinado, cuya solución es $(x, y, z) = \left(1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Ejemplo 5.15
Resuelve por el método de Gauss el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=1 \\ -x+2y+z=0 \\ 3x-y-2z=1 \end{array}\right.$$

Sol: La reducción de la matriz ampliada por el método de Gauss es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3+3F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como las dos últimas filas son iguales, el sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\left\{\begin{array}{r} -x+2y+z=0 \\ 5y+z=1 \end{array}\right.$$

Se trata por tanto de un Sistema Compatible Indeterminado. Si consideramos $z=\lambda$, su solución es $(x,y,z)=\left(\frac{3\lambda+2}{5}, \frac{1-\lambda}{5}, \lambda\right)$.

Ejemplo 5.16
Resuelve por el método de Gauss el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x+2y=1 \end{array}\right.$$

Sol: La reducción de la matriz ampliada por el método de Gauss es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-2F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -2z=0 \\ -2z=1 \end{array}\right.$$

Se trata por tanto de un Sistema Incompatible.

5.5 Autovalores y autovectores de una matriz cuadrada. Diagonalización de matrices

Supongamos dada $A \in \mathcal{M}_{n\times mn}$, una mattiz de dimansión $n\times n$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **autovalor o valor propio** de A si satisface que el sistema lineal

$$Av=\lambda v \tag{5.2}$$

tiene soluciones (vectores) v no nulas. En este caso, dicha solución v se denomina **autovector o vector propio** de la matriz A asociado al autovalor λ.

Observación 5.17
Es interesante destacar que el problema (5.2) es un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo. Evidentemente, siempre tiene solución (la solución nula $v = 0$). En el problema de autovalores consiste, por tanto, en calcular escalares λ tal que el sistema homogéneo tenga además soluciones v no nulas.

• **Cálculo de los autovalores:**
Si conocemos el valor del autovalor de A, λ, su autovector asociado $\vec{v} \neq 0$ verifica que:

$$A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\,\vec{v} - \lambda\,\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\, Id)\,\vec{v} = 0.$$

Por tanto, para que el sistema anterior tenga solución $\vec{v} \neq 0$, es necesario que:

$$\det(A - \lambda\, Id) = 0, \quad \text{con } A - \lambda\, Id = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Observemos que $\det(A - \lambda\, Id)$ es un polinomio en λ, de orden n, que se llama **polinomio característico** de A. Las soluciones de dicho polinomio, es decir, los valores de λ, son los autovalores de A.

Teorema 5.18
Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, una matriz de dimensión $n \times n$, se tiene que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de A si y solo si λ es una raíz del ***polinomio característico*** *de A,* $\boxed{p(\lambda) = |A - \lambda Id|}$.

Teniendo en cuenta el Teorema de Rouché-Fröbenius, Teorema 5.11

Ejemplo 5.19
Cálculo de los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
El polinomio característico viene dado por:

$$|A - \lambda\, Id| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

Como los autovalores de A son las soluciones del polinomio característico, estos son:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

• **Cálculo de los autovectores:**
Para cada autovalor λ_i de A se verifica que $(A - \lambda_i\, Id)\,\vec{v}_i = 0$. Por tanto, para calcular el autovector $\vec{v}_i$ asociado al autovalor λ_i se resuelve el sistema homogéneo:

$$(A - \lambda_i\, Id)\,\vec{v}_i = 0$$

Observemos que se trata de un sistema compatible indeterminado, ya que $\det(A - \lambda_i Id) = 0$. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones, pero todas ellas serán proporcionales entre sí. Elegiremos entonces sólo los elementos que sean solución del sistema $\det(A - \lambda_i Id) = 0$ que sean linealmente independientes.

Ejemplo 5.20
Cálculo de los autovectores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Procedemos a calcular los autovectores asociados a cada uno de los autovalores calculados en el Ejemplo 5.19:

- autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 3$: Para ello, resolvemos el sistema:

$$(A - 3\,Id)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 1$: Para ello, resolvemos el sistema:

$$(A - Id)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x_1 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \{x_1 = x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- autovector asociado al autovalor $\lambda_3 = 2$: Para ello, resolvemos el sistema:

$$(A - Id)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \{x_2 = x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.21
Cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico viene dado por:

$$|A - \lambda\,Id| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0$$

Como los autovalores de A son las soluciones del polinomio característico, estos son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -3.$$

Esto implica que el autovalor $\lambda = 1$ es un autovalor doble.

Calculemos ahora los autovectores de A:

- autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$: Para ello, resolvemos el sistema:

$$(A - Id)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right.$$

Observemos que en este caso tenemos dos autovectores asociados:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = -3$: Para ello, resolvemos el sistema:

$$(A - Id)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Observemos que en este caso tenemos dos autovectores asociados:

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.22
Cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico viene dado por:

$$|A - \lambda\, Id| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3 = 0$$

Como los autovalores de A son las soluciones del polinomio característico, estos son:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{con multiplicidad 3.}$$

Esto implica que el autovalor $\lambda = 1$ es un autovalor triple.

Calculemos ahora los autovectores de A:

- autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$: Para ello, resolvemos el sistema:

$$(A - Id)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Observemos que en este caso tenemos un único autovector asociado:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.6 Diagonalización de matrices. Caso simétrico

Definición 5.23
Se dice que las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ (dimensión $n \times n$) son ***semejantes*** *si existe otra matriz $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$, con $\det P \neq 0$, tal que se tiene la igualdad:*

$$\boxed{A = PBP^{-1}}.$$

La matriz P es denominada ***matriz de paso****.*

En esta sección nuestro objetivo es saber si una matriz A es semejante a una **matriz diagonal** D, es decir, si existe una matriz P invertible tal que $A = P\,D\,P^{-1}$. En ese caso, se dice que A es una **matriz diagonalizable**. Se tiene:

Teorema 5.24
Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$, se tiene que A es ***diagonalizable*** *si y sólo si A posee n* ***autovectores linealmente independientes****. En este caso,*

$$\boxed{A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}}$$

donde λ_i son los autovalores de A y $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es la matriz cuyas columnas son los autovectores de A asociados a los autovalores de A (en el mismo orden que aparecen en D).

Consecuencias:

1. Si una matriz sólo posee autovalores simples, siempre es diagonalizable.

2. Si una matriz posee autovalores múltiples, la multiplicidad del autovalores debe ser igual al número de autovectores asociados a dicho autovalor. Es importante resaltar que no todas las matrices son diagonalizables.

Observación 5.25
Los ejemplos 5.19 y 5.21 son diagonalizables. El Ejemplo 5.22 no es diagonalizable.

Ejemplo 5.26
Comprobar que la matriz del Ejemplo 5.21 es diagonalizable, calcular su matriz de paso P y la igualdad $A = PDP^{-1}$.

Sol: Las matrices asociadas son:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

• **Potencia de una matriz cuadrada diagonalizable** Sea A una matriz cuadrada diagonalizable, entonces $A = PDP^{-1}$. La potencia m de A viene dada por la expresión:

$$A^m = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1}\ (m \text{ veces})\ = PD^mP^{-1},$$

donde $D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$.

Ejemplo 5.27
Calcula la potencia 10 de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Sol: $A^{10} = PD^{10}P^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• **Teorema de Caley-Hamilton:** Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si la ecuación característica de A es $p(\lambda) = 0$, entonces $p(A) = 0$.

Ejemplo 5.28
Comprueba el Teorema de Caley-Hamilton para la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Diagonalización de matrices simétricas.

Como hemos comentado anteriormente, dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada, en general, A no es diagonalizable. Sin embargo, si A es una matriz simétrica, es decir, si $\boxed{A = A^t}$, podemos asegurar que sí lo es. De hecho, este tipo de matrices tienen propiedades interesantes que serán utilizadas más adelante. Se tiene:

Teorema 5.29
Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz ***simétrica*** *de dimensión $n \times n$. Entonces, se tienen las siguientes propiedades:*

- *Los autovalores de A son reales.*
- *La matriz A es* ***diagonalizable****.*
- *Los autovectores de A asociados a autovalores distintos son siempre* ***ortogonales****.*
- *La matriz A es diagonalizable mediante una matriz de paso P* ***ortogonal****, es decir, tal que $\boxed{P^{-1} = P^t}$.*

Observación 5.30
Recordemos que la matriz de paso P se construye a partir de n autovectores de A linealmente independientes (las columnas de A). Veamos qué significa que P sea ortogonal, es decir, que $P^{-1} = P^t$. Esto equivale a

$$PP^t = P^tP = Id.$$

Si llamamos $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a los vectores que aparecen en las columnas de P, entonces, la anterior relación significa que los productos escalares de los vectores son:

$$v_i \cdot v_i = 1 \quad \text{y} \quad v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Por tanto, los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ son **unitarios** y **ortogonales**.

Ejemplo 5.31
Diagonalizar la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mediante una matriz de paso ortogonal.

Es fácil comprobar que el polinomio característico está dado por

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

de donde deducimos que los autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (doble), y $\lambda_3 = 2$ (evidentemente, son autovalores reales).

Calculemos ahora los autovectores de A:

- Autovectores asociados al autovalor $\boxed{\lambda_1 = -1}$: se calculan resolviendo el sistema homogéneo:

$$(A - Id)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  que es equivalente a:

$$x + y + z = 0.$$

  la solución general de este sistema puede ser calculada mediante dos parámetros: $y = \alpha$, $z = \beta$ y $x = -\alpha - \beta$. Tomando por un lado $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ y, por otro, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ obtenemos dos autovalores asociados a λ_1 que son linealmente independientes:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Autovectores asociados al autovalor $\boxed{\lambda_1 = 2}$: Para ello, resolvemos el sistema:

$$(A - Id)v = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Aplicando el método de Gauss, éste sistema equivale a:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ \quad -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

  con solución general, $z = \alpha$, $y = \alpha$ y $x = \alpha$. Tomando $\alpha = 1$, obtenemos un autovector asociado a λ_3:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión: Tenemos tres autovectores de A linealmente independientes y, por tanto, la matriz A es diagonalizable.

Podemos comprobar que los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales, ya que:

$$v_1 \cdot v_3 = 0, \quad v_2 \cdot v_3 = 0.$$

Finalmente, si construimos la matriz de paso P cuyas columnas son los autovectores construidos, entonces P no es ortogonal pues la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ no es **ortogonal** ni **unitaria**.

Nuestro próximo objetivo va a ser construir nuevos autovectores $\{\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_3\}$ que sean **ortogonales**. Tomaremos $\widetilde{v}_1 = v_1$ y $\widetilde{v}_3 = v_3$ pues sabemos que son ortogonales. Por otro lado, vamos a elegir $\widetilde{v}_2 = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)^t$ que sea ortogonal a $\widetilde{v}_1$ (sabemos que va a a ser ortogonal a v_3), es decir:

$$\widetilde{v}_1 \cdot \widetilde{v}_2 = 0 \iff 2\alpha + \beta = 0.$$

Una posible elección es $\alpha = 1$ y $\beta = -2$. Así, obtenemos los tres autovectores ortogonales:

$$\widetilde{v}_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{v}_3 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una vez conseguido autovectores ortogonales, para obtenerlos **unitarios** basta dividirlos por su módulo. Como $|\widetilde{v}_1| = \sqrt{2}$, $|\widetilde{v}_2| = \sqrt{6}$ y $|\widetilde{v}_3| = \sqrt{3}$. Así, obtenemos:

$$\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^t, \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^t, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t \right\},$$

que corresponde a la nueva matriz de paso que ahora ya es ortogonal

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Observemos que $\det Q = 1$, $Q^t = Q^{-1}$ y $A = QDQ^t$ siendo $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Tema 6

Tema 7

Clasificación de cónicas

En este tema estudiaremos unas de las curvas planas más importantes. Se trata de las llamadas **secciones cónicas** o simplemente **cónicas**. Veremos que éstas se pueden introducir como la curva plana obtenida en la intersección de un cono con un plano (de ahí su nombre de **sección cónica**), pero también como el lugar geométrico de los puntos del plano que satisfacen ciertas propiedades geométricas relacionadas con la distancia a puntos del plano (focos) o a rectas (recta directriz).

7.1 Secciones cónicas

Las llamadas **secciones cónicas** fueron introducidas por Apolonio de Pérmago (262-190 a.C.) en su obra *"Sobre las Secciones Cónicas"*. En esta obra introdujo las cónicas como las secciones de un cono circular cuando éste se cortaba con superficies planas. Dependiendo del ángulo del plano respecto del cono se pueden obtener círculos, elipses, hipérbolas, parábolas y las llamadas cónicas degeneradas:

Consideremos un **doble cono recto**, es decir, la superficie que se genera al girar una recta (**recta generatriz**) alrededor de otra recta distinta con la que se corta (**eje del cono**). Llamaremos **vértice** al punto de intersección de ambas rectas. Consideremos por otro lado un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$ y cortemos el cono con el plano. Dependiendo del ángulo que forma el plano con la recta generatriz del cono, obtenemos las distintas secciones cónicas.

a) Si el plano es perpendicular al eje del cono y no pasa por el vértice se obtiene una **circunferencia** (Figura 7.1). En el caso en el que el plano pase por el vértice del cono se obtiene un **único punto** (Figura 7.2).

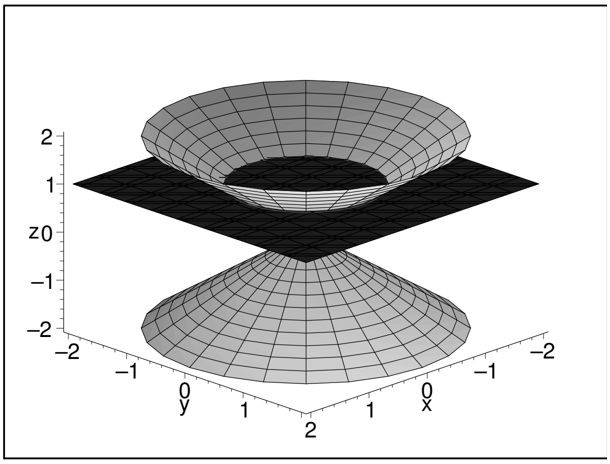


Figura 7.1: Sección Cónica: Circunferencia.

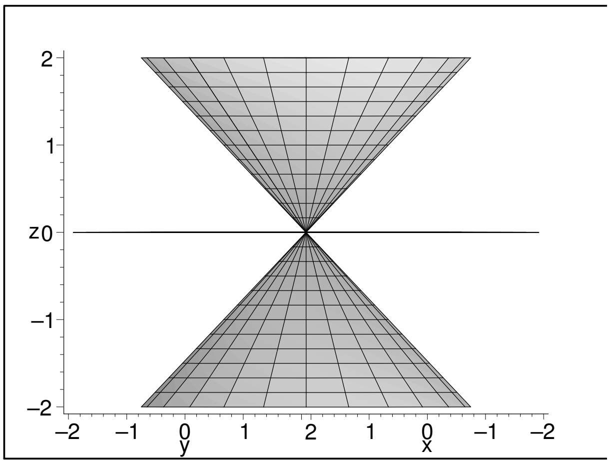


Figura 7.2: Sección Cónica (degenerada): Punto.

b) Si el plano no es perpendicular al eje del cono, y el plano y el eje del cono forman entre sí un ángulo mayor que el que forma el eje del cono con cualquiera de sus rectas generatrices, y no pasa por el vértice se obtiene una **elipse** (Figura 7.3). Si pasa por el vértice se obtiene de nuevo un único **único punto** (Figura 7.4).

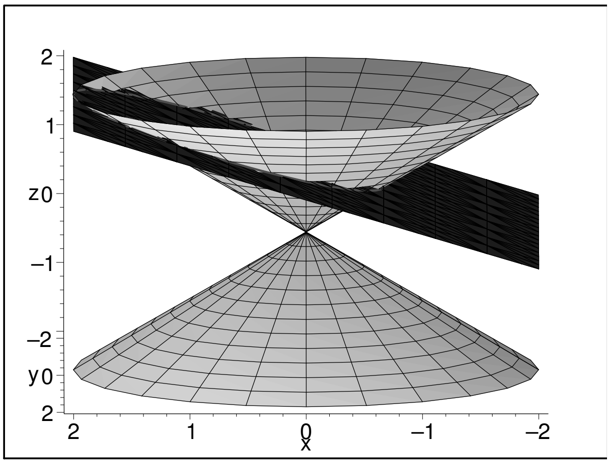


Figura 7.3: Sección Cónica: Elipse.

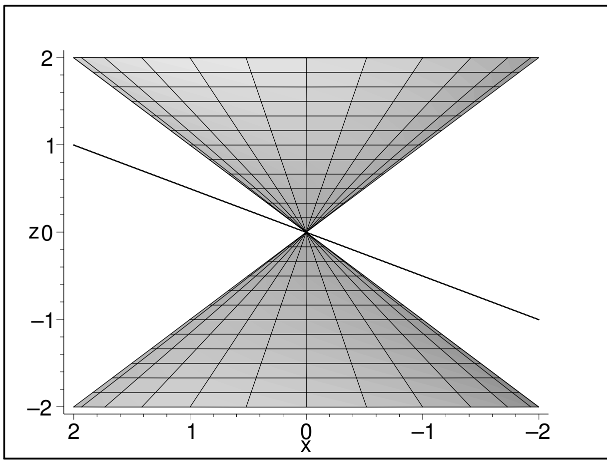


Figura 7.4: Sección Cónica (degenerada): Punto.

c) Si el plano es paralelo a cualquiera de las rectas generatrices se obtiene una **parábola** (Figura 7.5), salvo si pasa por el vértice, caso en el que se obtiene una **recta** (cónica degenerada, Figura 7.6).

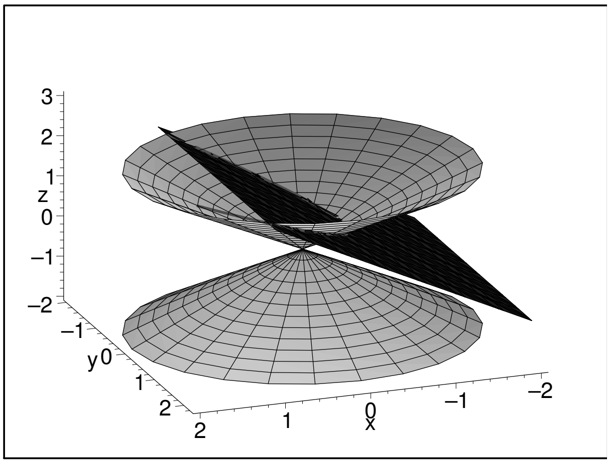


Figura 7.5: Sección Cónica: Parábola.

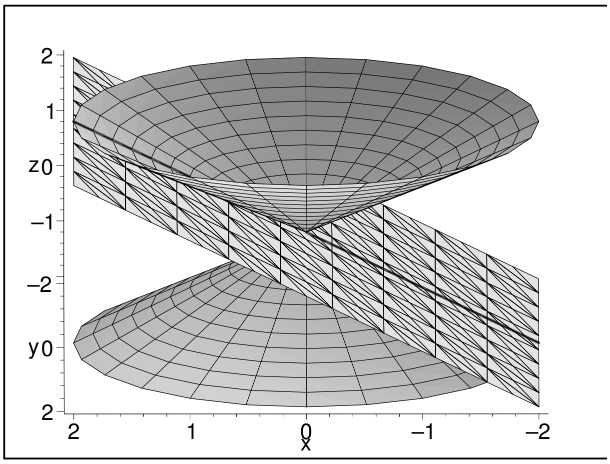


Figura 7.6: Sección Cónica (degenerada): Recta.

d) Si el plano no es perpendicular ni paralelo al eje del cono, y el plano y el eje del cono forman entre sí un ángulo menor que el que forma el eje del cono con cualquiera de sus rectas generatrices, y no pasa por el vértice se obtiene una **hipérbola** (Figura 7.7). Si pasa por el vértice se obtienen **dos rectas que se cortan** (cónica degenerada, Figura 7.8).

7.2 Lugares geométricos: Cónicas. Ecuaciones reducidas de cónicas.

Definición 7.1
Consideremos el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Se denomina ***cónica*** *al lugar geométrico de los puntos del plano que verifican la ecuación general de segundo grado (****ecuación cuadrática****):*

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0}. \tag{7.1}$$

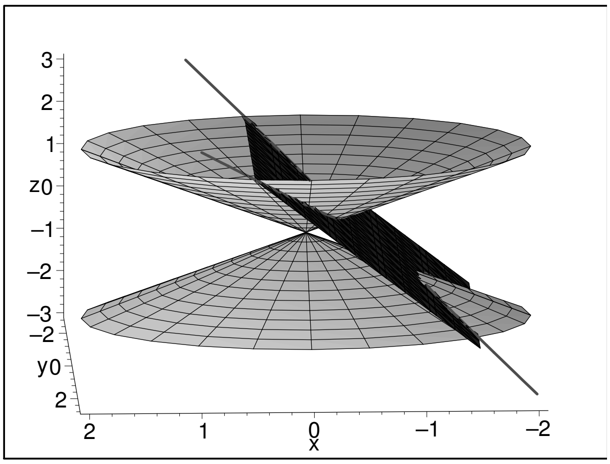


Figura 7.7: Sección Cónica: Hipérbola.

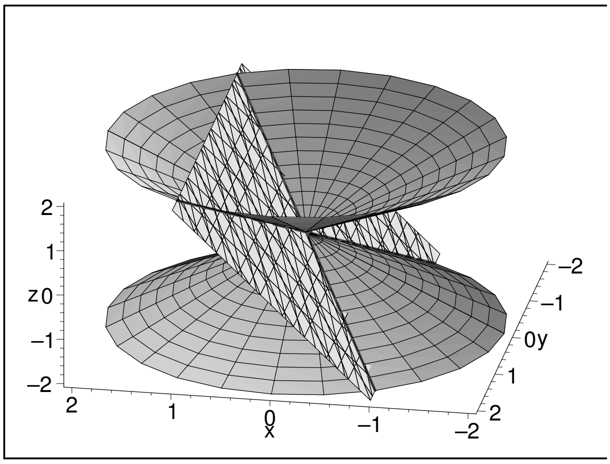


Figura 7.8: Sección Cónica (degenerada): Dos rectas.

donde los coeficientes son reales y a_{11}, a_{12} y a_{22} no son simultáneamente nulos.

En la ecuación (7.1) distinguimos varias partes:

1. **Término independiente**: $\boxed{a_{00} \in \mathbb{R}}$.
2. **Forma lineal**: Está dada por la relación $\boxed{2a_{01}x + 2a_{02}y}$.
3. **Forma cuadrática**: Ésta está dada por la expresión $\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}$. Si consideramos la matriz **simétrica**,

$$\boxed{A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}, \tag{7.2}$$

la forma cuadrática se puede escribir también en forma matricial como

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Observación 7.2 (Ecuación matricial)
Consideremos la cónica dada por la ecuación (7.1) y consideremos la matriz **simétrica** $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ dada por

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}. \tag{7.3}$$

Mediante esta matriz es fácil comprobar la igualdad

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Así, la ecuación (7.1) puede ser reescrita como una **ecuación matricial**:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Veremos que esta ecuación matricial nos va a permitir clasificar la cónica dada por (7.1).

7.2.1 Ecuaciones reducidas de cónicas degeneradas

Comenzamos viendo las **ecuaciones reducidas** de las llamadas **cónicas degeneradas**.

Ecuaciones reducidas de cónicas degeneradas

Las ecuaciones en forma reducida y en coordenadas cartesianas de las cónicas son:

1. **Punto**: La **ecuación reducida** correspondiente a un punto (el (0,0)) está dada por la expresión cuadrática:

$$\boxed{x^2+y^2=0} \iff \boxed{(x,y)=(0,0)}.$$

En este caso, las matrices A y A_0 asociadas a la ecuación anterior tienen la forma:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Pares de rectas**: En este caso podemos distinguir además:

a) **Rectas secantes**: su **ecuación reducida** está dada por

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0} \iff \boxed{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0}$$

que representa a las rectas $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ y $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ que se cortan en el punto $(0,0)$. Las matrices A y A_0 asociadas a a la ecuación de la cónica degenerada tienen la forma

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0=\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}.$$

b) **Rectas paralelas:** su **ecuación reducida** es $\boxed{x^2-a^2=0}$ o $\boxed{y^2-b^2=0}$, que representa a las rectas $\boxed{x=a}$ y $\boxed{x=-a}$ o $\boxed{y=b}$ e $\boxed{y=-b}$, es decir, son dos rectas paralelas. Las matrices A y A_0 asociadas a este caso (cónica degenerada) tienen la forma

$$A=\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A=\begin{pmatrix} -b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) **Rectas coincidentes:** su **ecuación reducida** es $x^2=0$ o $y^2=0$. En este caso tenemos las rectas dobles $x=0$ o $y=0$. La matriz A asociada tiene la forma:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Rectas imaginarias**: La **ecuación reducida** correspondiente a rectas imaginarias está dada por las expresiones cuadráticas: $\boxed{x^2+a^2=0}$ o $\boxed{y^2+b^2=0}$. Obsérvese que las igualdades anteriores no pueden ser satisfechas por ningún punto (x,y) del plano real. Sin embargo, tienen sentido si trabajamos con números imaginarios. Efectivamente, la igualdad anterior nos proporciona las dos rectas imaginarias $\boxed{x=ai}$

y $\boxed{x = -ai}$ o $\boxed{y = bi}$ e $\boxed{y = -bi}$. Las matrices A y A_0 asociadas a este caso (cónica degenerada) tienen la forma

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 7.3
Es interesante destacar que las cónicas degeneradas consideradas anteriormente satisfacen

$$\boxed{\det A = 0}.$$

Como veremos, esta situación se va a seguir dando cuando consideremos cónicas generales dadas por la ecuación (7.1) y éstas correspondan a cónicas degeneradas.

7.2.2 Circunferencia. Ecuación reducida.

Definición 7.4
Una ***circunferencia*** *es el lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano que equidistan (están a igual distancia) de un punto fijo $C = (a, b)$,* ***centro de la circunferencia****. La distancia entre cada punto de la circunferencia y el centro C, es un número constante r, que es el* ***radio de la circunferencia*** *(véase con GeoGebra el fichero Circunferencia.ggb).*

De la propia definición y, teniendo en cuenta que

$$\operatorname{dist}((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

deducimos que la ecuación de una circunferencia con **centro** $C = (a, b)$ y **radio** r está dada por: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, es decir,

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Desarrollando los cuadrados y pasando r^2 al primer miembro, deducimos la fórmula

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0},$$

que corresponde a las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - r^2 & -a & -b \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación reducida corresponde al caso en el que el centro se sitúa en el origen de coordenadas $C = (0, 0)$. En este caso la ecuación reducida es

$$\boxed{x^2 + y^2 - r^2 = 0},$$

y las matrices asociadas son

$$A = \begin{pmatrix} -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 7.5
Es interesante resaltar que en la ecuación de la circunferencia de centro $C = (a, b)$ y radio r no aparecen términos en xy. Además esta cónica tiene dos elementos notables: el **centro** y el **radio**.

Ejemplo 7.6
Construir las circunferencias de centro y radio indicado:

1. Centro $(-2, 0)$ y radio $r = 2$: La ecuación es $(x + 2)^2 + y^2 = 2^2$, que, al desarrollar los cuadrados, se convierte en
$$\boxed{x^2 + 4x + y^2 = 0}.$$
2. Centro $(1, 3)$ y radio $r = 4$: En este caso, la ecuación es $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$, que, desarrollando los cuadrados, se convierte en
$$\boxed{x^2 - 2x + y^2 - 6y - 6 = 0}.$$

Ejemplo 7.7
Comprobar si las expresiones que siguen son circunferencias y, en caso positivo, calcular el centro y el radio:

1. $\boxed{x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0}$. Buscamos el centro tratando de encontrar el cuadrado de un monomio:
$$\boxed{x^2 - 2x} + \boxed{y^2 + 6y} = \boxed{x^2 - 2x + 1} - 1 + \boxed{y^2 + 6y + 9} - 9 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 10.$$
Así, la ecuación original se transforma en
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 10 = 0 \iff (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10 \iff \boxed{(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2},$$
lo que nos indica que se trata de la circunferencia de centro $(1, -3)$ y radio $\sqrt{10}$.
2. $\boxed{2x^2 + 2y^2 + 4x + 16y = -1}$. En primer lugar, dividiendo por 2, la ecuación se transforma en $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 1/2 = 0$. De nuevo, buscamos el centro tratando de encontrar el cuadrado de los monomios:
$$\boxed{x^2 + 2x} + \boxed{y^2 + 8y} + \frac{1}{2} = \boxed{x^2 + 2x + 1} - 1 + \boxed{y^2 + 8y + 16} - 16 + \frac{1}{2} = (x + 1)^2 + (y + 4)^2 - \frac{33}{2}.$$
Así, el centro está situado en el punto $(-1, -4)$ y el radio es $\sqrt{33/2}$.
3. $\boxed{x^2 + y^2 - 3x + 4y = -7}$. Como anteriormente, buscamos el centro tratando de encontrar el cuadrado de los monomios:
$$\boxed{x^2 - 3x} + \boxed{y^2 + 4y} + 7 = \boxed{x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \boxed{y^2 + 4y + 4} - 4 + 7 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 + \frac{3}{4}.$$
En este caso, la ecuación equivale a
$$\boxed{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = -\frac{3}{4}}$$
que, evidentemente, no tiene soluciones reales y no corresponde a una circunferencia. En alguna ocasiones se dice que se trata de una **circunferencia imaginaria**.

7.2.3 Elipse. Ecuación reducida.

Definición 7.8
*Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es constante. Estos puntos son denominados **focos de la elipse** (véase con GeoGebra el fichero Elipse2.ggb).*

Para obtener la ecuación reducida de la elipse vamos a suponer que los focos están situados sobre el eje $\overline{OX}$ y son $\boxed{F_1 = (c, 0)}$ y $\boxed{F_2 = (-c, 0)}$, con $c > 0$, y que la suma de las distancias es $2a$, con $a > 0$ y $a > c$. Así,

$$\operatorname{dist}((x, y), (-c, 0)) + \operatorname{dist}((x, y), (c, 0)) = 2a \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Obsérvese que, para que tenga sentido la igualdad anterior, se debe tener $\boxed{a > c}$ (ver Figuras 7.9 y 7.10). Manipulando la expresión anterior (se omiten los cálculos) llegamos a la expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Como $a^2 - c^2 > 0$, hacemos $b^2 = a^2 - c^2$, con $b > 0$, es decir, $\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$. Es fácil comprobar que también se tiene $\boxed{b < a}$. Llegamos de este modo a la ecuación reducida de la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0}.$$

En este caso, las matrices asociadas a esta ecuación reducida son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}.$$

También podemos escribir la ecuación de la elipse de manera explícita:

$$\boxed{y = \pm\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}},$$

donde el signo $+$ y el signo $-$ nos dan las ramas superiores e inferiores de la elipse (ver Figura 7.9).

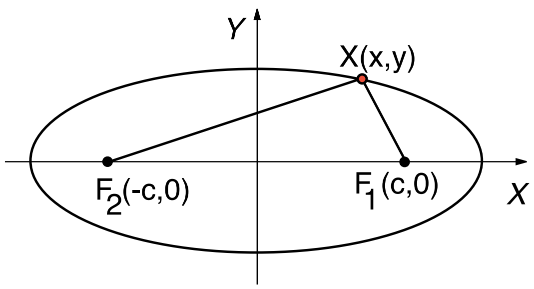


Figura 7.9: Elipse.

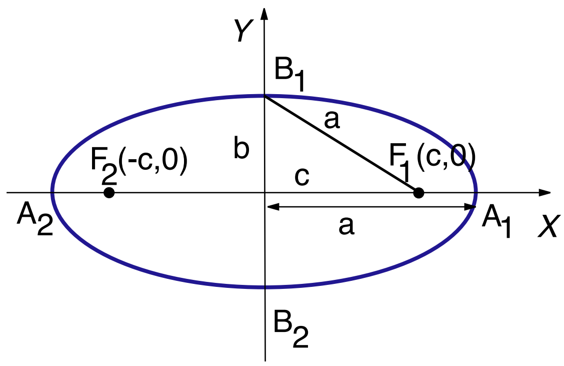


Figura 7.10: Elementos de la elipse.

Ejemplo 7.9
Calcular la ecuación de la elipse con focos $F_1 = (3,0)$ y $F_2 = (-3,0)$, y con $a = 5$.

Claramente $\boxed{c = 3}$. Por tanto, de la fórmula $a^2 = c^2 + b^2$, deducimos $b^2 = 5^2 - 3^2$, es decir, $\boxed{b = 4}$. Tenemos así la fórmula de la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}.$$

Ejemplo 7.10
Calcular los focos de la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Dividiendo por 144, la fórmula se convierte en:

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1 \iff \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Así, $a = 4$, $b = 3$ y, de la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, deducimos $\boxed{c = \sqrt{7}}$. Conclusión: los focos están situados sobre los puntos $F_1 = (\sqrt{7}, 0)$ y $F_2 = (-\sqrt{7}, 0)$.

Elementos de la elipse (ver Figura 7.10)

Además de los focos, los elementos son:

1. **Centro de la elipse**: Corresponde al punto medio de los focos. En el caso de la ecuación reducida, es el origen de coordenadas $O = (0,0)$.

2. **Distancia focal**: Es la distancia que existe entre los focos de la elipse, es decir, la **distancia focal** es $\boxed{2c}$.

3. **Ejes de la elipse**: Corresponden a los ejes de simetría de la elipse. El **eje mayor** corresponde al eje de simetría donde se sitúan los focos (en el caso de la ecuación reducida es el eje $\overline{OX}$, $\boxed{y = 0}$). El **eje menor** es la recta perpendicular al **eje mayor** que pasa por el centro (en el caso de la ecuación reducida es el eje $\overline{OY}$, $\boxed{x = 0}$).

4. **Vértices**: Son los puntos de corte de la elipse con sus ejes. En el caso de la ecuación reducida, son los puntos de corte con los ejes: Con el eje $\overline{OX}$ se obtienen haciendo $y = 0$ y con el eje $\overline{OY}$ haciendo $y = 0$. Así,

$$\boxed{A_1 = (a,0), \quad A_2 = (-a,0), \quad B_1 = (0,b), \quad B_2 = (0,-b)}.$$

5. **Excentricidad**: Se denomina **excentricidad** de la elipse al cociente

$$\boxed{e = \frac{c}{a} \in (0,1)}.$$

   Una excentricidad cercana a cero indica que c es pequeño, es decir, que la **distancia focal** es pequeña. Tenemos así elipses redondeadas y próximas a una circunferencia. Por contra, si e está cerca de 1, entonces c está cerca de a y obtenemos elipses achatadas.

6. Por último, si los focos están situados sobre el eje $\overline{OY}$ ($F_1 = (0,c)$ y $F_2 = (0,-c)$), se puede deducir que la ecuación reducida de la elipse es

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0}.$$

   Obsérvese que en este caso, el **eje mayor** es la recta vertical $\boxed{x = 0}$ y se reconoce porque el cuadrado mayor, a^2, divide a la variable y. Esto nos indica que los focos se sitúan en el eje $\overline{OY}$.

Ejemplo 7.11
Calcular la ecuación de la elipse con focos $F_1 = (2,0)$ y $F_2 = (-2,0)$ y que pasa por el punto $P = (\sqrt{6}, 2)$.

De la posición de los focos deducimos que $\boxed{c = 2}$ (que corresponde a una distancia focal de $2c = 4$). Para determinar la ecuación de la elipse, necesitamos determinar el valor a del semieje menor. Sabemos:

$$2a = \operatorname{dist}(P, F_1) + \operatorname{dist}(P, F_2) = \sqrt{\left(2 - \sqrt{6}\right)^2 + 4} + \sqrt{\left(-2 - \sqrt{6}\right)^2 + 4} = \sqrt{14 - 4\sqrt{6}} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}},$$

de donde

$$a^2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{14 - 4\sqrt{6}} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[14 - 4\sqrt{6} + 14 + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{14^2 - 4^2 \cdot 6}\right] = 12$$

y $\boxed{a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}}$. Finalmente,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 12 - 4 = 8 \iff \boxed{b = 2\sqrt{2}}.$$

Conclusión: La fórmula de la elipse pedida es

$$\boxed{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1}.$$

Observación 7.12

1. **Elipse imaginaria**: Si consideramos la fórmula reducida:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1},$$

con $a > 0$ y $b > 0$, obtenemos la denominada ecuación reducida de la **elipse imaginaria**. Está claro que no hay valores reales (x, y) que satisfagan dicha igualdad y la ecuación solo tiene sentido si trabajamos con números imaginarios (de ahí su nombre). Las matrices asociadas a esta ecuación son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}.$$

2. Es interesante destacar también que una circunferencia es un caso particular de elipse. Se trata de una elipse en la que sus dos focos se sitúan sobre el mismo punto, es decir, los dos focos coinciden con el centro de la circunferencia. Obsérvese que en este caso $\boxed{a = b}$, $\boxed{c = 0}$ y el radio r de la circunferencia coincide con a.

7.2.4 Hipérbola. Ecuación reducida.

Definición 7.13
*Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es constante. De nuevo, estos puntos son denominados **focos de la hipérbola** (véase con GeoGebra el fichero Hiperbola.ggb).*

Razonamos como en la sección anterior. Así, para obtener la ecuación reducida de la hipérbola suponemos que los focos están situados sobre el eje $\overline{OX}$ y son $\boxed{F_1 = (c, 0)}$ y $\boxed{F_2 = (-c, 0)}$, con $c > 0$, y que la diferencia de las distancias es $2a$, con $a > 0$. Así,

$$|\text{dist}\,((x, y), (-c, 0)) - \text{dist}\,((x, y), (c, 0))| = 2a \iff \boxed{\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a}.$$

De nuevo, manipulando la expresión anterior (se omiten los cálculos) llegamos a la expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

En el caso de la hipérbola $\boxed{c > a}$ y, por tanto, $c^2 - a^2 > 0$. Si hacemos $b^2 = c^2 - a^2$, con $b > 0$, es decir, si $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$, entonces llegamos a la ecuación reducida de la hipérbola:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0}.$$

Las matrices asociadas a esta ecuación reducida son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/b^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix}.$$

También podemos escribir la ecuación de la hipérbola de manera explícita:

$$\boxed{y = \pm \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a}},$$

donde el signo $+$ y el signo $-$ nos dan las ramas superiores e inferiores de la hipérbola (ver Figura 7.11).

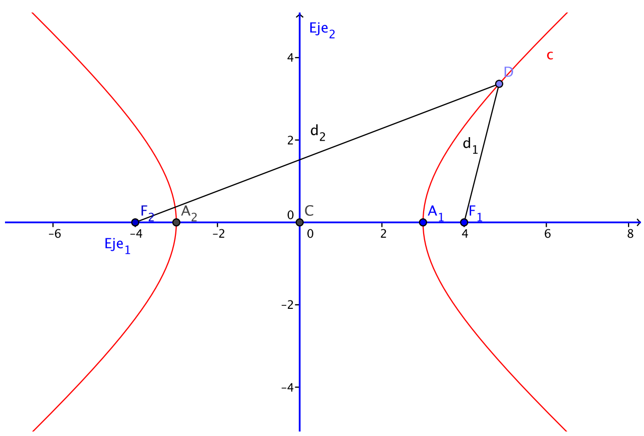


Figura 7.11: Hipérbola.

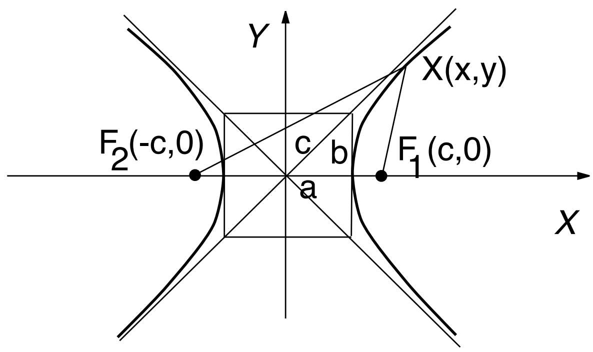


Figura 7.12: Elementos de la hipérbola.

Ejemplo 7.14
Calcular la ecuación de la hipérbola con focos $F_1 = (4, 0)$ y $F_2 = (-4, 0)$, y con $a = 3$.

Claramente $\boxed{c = 4}$. Por tanto, de la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, deducimos $b^2 = 4^2 - 3^2$, es decir, $\boxed{b = \sqrt{7}}$. Tenemos así la fórmula de la hipérbola:

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1}.$$

Ejemplo 7.15
Calcular los focos de la hipérbola de ecuación $x^2 - 2y^2 = 32$.
Dividiendo por 32, la fórmula anterior se convierte en:

$$\boxed{\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{16} = 1}.$$

Así, $a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $b = 4$ y, de la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, deducimos $\boxed{c = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}}$. Conclusión: los focos están situados sobre los puntos $F_1 = (4\sqrt{3}, 0)$ y $F_2 = (-4\sqrt{3}, 0)$.

Elementos de la hipérbola (ver Figura 7.12)
Además de los focos, los elementos son:

1. **Centro**: El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento que une los focos. En la ecuación reducida, es el origen de coordenadas $O = (0, 0)$.

2. **Ejes de la hipérbola**: Como en la elipse, la recta $\boxed{y = 0}$ es el **eje mayor** (eje donde se sitúan los focos) y la recta vertical $\boxed{x = 0}$ es el llamado **eje menor** (recta perpendicular al eje mayor que pasa por el centro).

3. **Distancia focal**: Es la distancia que existe entre los focos de la hipérbola. Como en la elipse, la **distancia focal** es $\boxed{2c}$.

4. **Vértices**: Son los puntos de corte de la hipérbola con sus ejes. La hipérbola solo corta al eje mayor (eje $\overline{OX}$) y los puntos de corte se obtienen haciendo $y = 0$. Así, los vértices son $\boxed{A_1 = (a, 0)}$ y $\boxed{A_2 = (-a, 0)}$.

5. **Asíntotas de la hipérbola**: Como muestra la Figura 7.12, la hipérbola tiene dos asíntotas oblicuas. Se trata de las rectas
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0} \iff \boxed{y = \frac{b}{a}x}; \quad \boxed{y = -\frac{b}{a}x}.$$
Obsérvese que estas rectas fueron obtenidas en el apartado de cónicas degeneradas.

6. **Excentricidad**: Como en el caso de la elipse, se denomina **excentricidad** de la hipérbola al cociente
$$\boxed{e = \frac{c}{a}}.$$
Como $0 < a < c$, $e \in (1, \infty)$. Una excentricidad cercana a uno indica que c es parecido a a. Esto indica que los focos y los vértices de la hipérbola están muy próximos. En este caso la hipérbola es muy achatada. Si e es grande, entonces, c es mucho mayor que a. Tenemos así hipérbolas muy abiertas donde sus focos están más separados de sus vértices.

7. Como en el caso de la elipse, si los focos de la hipérbola, $F_1 = (0, c)$ y $F_2 = (0, -c)$, están situados sobre el eje $\overline{OY}$ (que sería en este caso el eje mayor de la hipérbola), entonces en este caso la ecuación reducida de la hipérbola es
$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - 1 = 0}.$$

Ejemplo 7.16
Calcular la ecuación de la hipérbola con focos $F_1 = (3, 0)$ y $F_2 = (-3, 0)$ y que pasa por el punto $P = (\sqrt{3}, 4)$.

De la posición de los focos deducimos que $\boxed{c = 3}$. Para determinar la ecuación de la hipérbola, necesitamos determinar el valor a (lo que determinará los vértices). Sabemos:

$$2a = |\mathrm{dist}\,(P, F_1) - \mathrm{dist}\,(P, F_2)| = \left| \sqrt{\left(3 - \sqrt{3}\right)^2 + 16} - \sqrt{\left(-3 - \sqrt{3}\right)^2 + 16} \right| = \left| \sqrt{28 - 6\sqrt{3}} - \sqrt{28 + 6\sqrt{3}} \right|,$$

de donde

$$a^2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{28 - 6\sqrt{3}} - \sqrt{28 + 6\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[28 - 6\sqrt{3} + 28 + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{28^2 - 6^2 \cdot 3} \right] = 1,$$

es decir, $\boxed{a = 1}$. Finalmente, sabemos que $c^2 = a^2 + b^2$, de donde,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 8 \iff \boxed{b = 2\sqrt{2}}.$$

Conclusión: La fórmula de la hipérbola pedida es

$$\boxed{x^2 - \frac{y^2}{8} = 1}.$$

En este caso la excentricidad vale $e = 3$ (véase la figura mediante GeoGebra).

7.2.5 Parábola. Ecuación reducida.

Definición 7.17
Se denomina ***parábola*** *al lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano que equidistan de una recta r, llamada* ***recta directriz*** *de la parábola, y de un punto fijo F, llamado* ***foco*** *de la parábola (véase con GeoGebra el fichero Parabola.ggb).*

Para obtener la ecuación reducida de la parábola fijemos $c > 0$ y vamos a suponer que la **recta directriz** de la parábola es la recta vertical

$$\boxed{x = -\frac{c}{2}},$$

y que su foco F se sitúa en el eje $\overline{OX}$ y está dado por $\boxed{F = (c/2, 0)}$. De la propia definición, los puntos $P = (x, y)$ de la parábola satisfacen la igualdad:

$$\boxed{\mathrm{dist}\,(P, F) = \mathrm{dist}\,(P, r)} \iff \boxed{\sqrt{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{c}{2}}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, deducimos la **ecuación reducida** de la parábola:

$$\boxed{y^2 = 2cx} \iff \boxed{y^2 - 2cx = 0}.$$

Las matrices asociadas a esta ecuación reducida son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir la ecuación de la parábola de manera explícita:

$$\boxed{y = \pm\sqrt{2cx}},$$

donde el signo $+$ y el signo $-$ nos dan las ramas superiores e inferiores de la parábola (ver Figura 7.13).

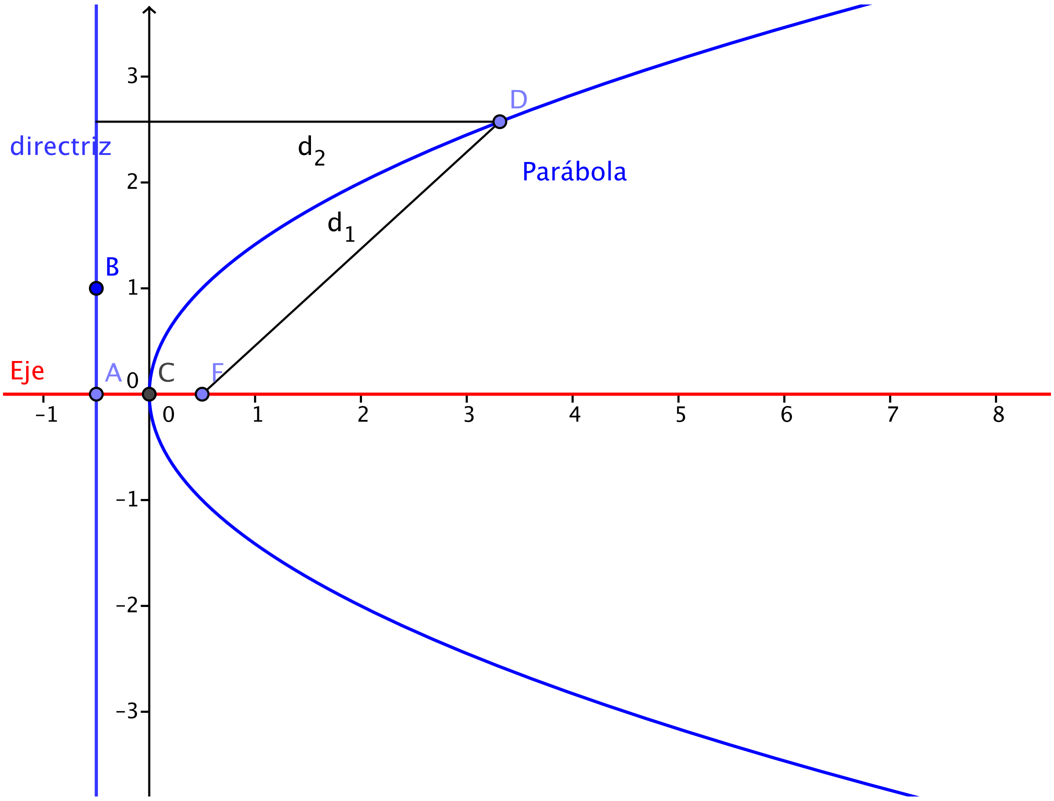


Figura 7.13: Parábola de foco $F = (1/2, 0)$ y recta directriz $x = -1/2$.

Ejemplo 7.18
Calcular la ecuación de la parábola con foco $F = (1/2, 0)$ y recta directriz $x = -1/2$ (ver Figura 7.13).

Claramente $\boxed{c = 1}$. Por tanto, la fórmula de la parábola es:

$$\boxed{y^2 = 2x}.$$

Elementos de la parábola

La geometría de la parábola es más simple que las cónicas anteriores. Además de la recta directriz y del foco, destacamos:

1. **Eje**: Es la recta perpendicular a la recta directriz que pasa por el foco. En el caso de la ecuación reducida anterior, el eje es la recta $\boxed{y = 0}$.

2. **Vértice**: Es el punto de corte entre la parábola y su eje. En nuestro caso, el vértice es $\boxed{C = (0, 0)}$.

Si se cambian las posiciones de los focos y de las rectas directrices de la parábola, se obtienen fórmulas distintas:

1. Si la recta directriz es $\boxed{x = c/2}$ y el foco es $\boxed{F = (-c/2, 0)}$, entonces, la ecuación de la parábola es $\boxed{y^2 = -2cx}$. El eje de la parábola sigue siendo la recta $\boxed{y = 0}$ y su vértice es $\boxed{C = (0, 0)}$.
2. Si la recta directriz es la recta horizontal $\boxed{y = -c/2}$ y el foco es $\boxed{F = (0, c/2)}$, entonces, la ecuación de la parábola es $\boxed{x^2 = 2cy}$. El eje de la parábola es la recta vertical $\boxed{x = 0}$ y su vértice es $\boxed{C = (0, 0)}$.
3. Si la recta directriz es ahora la recta horizontal $\boxed{y = c/2}$ y el foco es $\boxed{F = (0, -c/2)}$, entonces, la ecuación de la parábola es $\boxed{x^2 = -2cy}$. El eje y vértice de la parábola siguen siendo la recta vertical $\boxed{x = 0}$ y el punto $\boxed{C = (0, 0)}$.

Para finalizar esta sección, hagamos una observación importante:

Observación 7.19
En esta sección hemos presentado las tres **cónicas no degeneradas** (cuatro, incluyendo la elipse imaginaria; como hemos dicho anteriormente, la circunferencia es, en realidad, una elipse donde los dos focos se sitúan sobre el mismo punto, es decir, los dos focos coinciden con el centro de la circunferencia). Una primera característica de estas **cónicas no degeneradas** es que todas satisfacen

$$\boxed{\det A \neq 0},$$

donde A es la matriz asociada a su fórmula (ver (7.3)). Estas cónicas no degeneradas corresponden a **tres tipos de cónicas**. Estos tipos son:

1. **Tipo elíptico**: Este tipo incluye la elipse, la elipse imaginaria y la circunferencia (como cónicas no degeneradas). Este tipo se caracteriza por satisfacer la condición:
$$\boxed{\det A_0 > 0},$$
donde A_0 es la matriz asociada a la forma cuadrática de la cónica (ver (7.2)).
2. **Tipo hiperbólico**: Este tipo incluye la hipérbola (como cónica no degenerada). Se caracteriza por satisfacer la condición:
$$\boxed{\det A_0 < 0},$$
donde, de nuevo, A_0 es la matriz asociada a la forma cuadrática de la cónica (ver (7.2)).
3. **Tipo parabólico**: Este tipo incluye la parábola (como cónica no degenerada). Se caracteriza por satisfacer la condición:
$$\boxed{\det A_0 = 0},$$
donde, como antes, A_0 es la matriz asociada a la forma cuadrática de la cónica (ver (7.2)).

Por otro lado, las tres cónicas no degeneradas en forma reducida cumplen dos propiedades que hacen que sus fórmulas sean muy sencillas:

1. Los **centros** o **vértices** de estos tres tipos de cónicas están situados en el origen de coordenadas $(0, 0)$.
2. Los **ejes** o **rectas directrices** de estas cónicas con ecuaciones reducidas son paralelos a los ejes. Esto hace que en la correspondiente fórmula no aparezca el término $\boxed{2a_{12}xy}$ o, de manera equivalente, la matriz A_0 (ver (7.2)) asociada a su forma cuadrática, es una **matriz diagonal** (véase con GeoGebra el fichero Ejemplo.Rotacion.ggb).

En las próximas secciones vamos a llevar a cabo la clasificación de una cónica dada por su fórmula general (7.1). Veremos que una cónica general va a ser equivalente a uno de los nueve ejemplos (incluyendo el caso de la **elipse imaginaria** y **las rectas imaginarias**) vistos en esta sección: **Punto**, **dos rectas secantes**, **dos**

rectas paralelas, **dos rectas coincidentes**, **dos rectas imaginarias**, **elipse** (que incluye el caso de la **circunferencia**), **elipse imaginaria**, **hipérbola** y **parábola**.

7.3 Clasificación de cónicas

Consideremos la cónica dada por la fórmula de segundo grado (7.1):

(7.1) $$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0}.$$

Vamos a realizar una primera clasificación general de cónicas siguiendo los tipos descritos en la Observación 7.19. Para ello consideramos la matriz simétrica A_0 (dada por 7.2) asociada a la forma cuadrática $\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}$:

(7.2) $$\boxed{A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

Observación 7.20
La matriz A_0 es una matriz simétrica de dimensión 2×2, por tanto, es diagonalizable mediante una matriz de paso ortogonal (sus columnas son dos vectores **ortogonales** y **unitarios**) y posee dos autovalores reales λ_1 y λ_2 (podemos suponer que $\lambda_1 \leq \lambda_2$). Así, existe una matriz ortogonal $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que

$$A_0 = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^t.$$

En particular, obtenemos que $\boxed{\det A_0 = \lambda_1\lambda_2}$, pues $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$.

Dependiendo del valor de $\boxed{\det A_0}$, obtenemos:

Tipos de cónicas: Consideremos la cónica con ecuación (7.1). Se tiene:

1. Si $\boxed{\det A_0 > 0}$, es decir, si $\boxed{\lambda_1\lambda_2 > 0}$, entonces la cónica es de **tipo elíptico**. Dentro de este tipo, podemos distinguir: El punto, la elipse (incluyendo la circunferencia) y la elipse imaginaria.

2. Si $\boxed{\det A_0 < 0}$, es decir, si $\boxed{\lambda_1\lambda_2 < 0}$, entonces la cónica es de **tipo hiperbólico**. Dentro de este tipo, podemos distinguir: La hipérbola y las dos rectas secantes.

3. Si $\boxed{\det A_0 = 0}$, es decir, si $\boxed{\lambda_1\lambda_2 = 0}$, entonces la cónica es de **tipo parabólico**. Dentro de este tipo, podemos distinguir: La parábola, par de rectas paralelas, recta doble y el par de rectas imaginarias.

Como conclusión deducimos que al análisis del tipo de una cónico es sencillo, basta con ver cuánto vale $\det A_0$ donde A_0 es la matriz asociada a la forma cuadrática de la fórmula de la cónica.

Ejemplo 7.21
Analizar de qué tipo son las cónicas siguientes:

1. $\boxed{3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2 = 0}$: Las matrices asociadas a la ecuación de la cónica son

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A_0 = 8 > 0$, deducimos que la cónica es de tipo elíptico, pero no sabemos si se trata de un punto, de una elipse o de una elipse imaginaria.

2. $\boxed{x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 6y + 15 = 0}$: En este caso, las matrices asociadas a la fórmula de la cónica son

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, $\det A_0 = 0$, por tanto, se trata de una cónica de tipo parabólico, es decir, podría ser una parábola, un par de rectas paralelas, una recta doble o un par de rectas imaginarias.

3. $\boxed{x^2 - 8xy + y^2 + 3x + 3y - \frac{1}{2} = 0}$: En este caso, las matrices asociadas a la fórmula de la cónica son

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -4 \\ \frac{3}{2} & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, $\det A_0 = -15 < 0$, por tanto, se trata de una cónica de tipo hiperbólico, es decir, podría ser una hipérbola o un par de rectas secantes.

Por otro lado, podemos deducir si tenemos una cónica degenerada o no calculando $\det A$. Así,

Teorema 7.22

Consideremos la cónica con ecuación (7.1) y consideremos la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ asociada a la cónica (ver (7.3)). Se satisface:

1. *Si $\boxed{\det A = 0}$, entonces la ecuación (7.1) es una cónica degenerada, es decir, (7.1) es un punto, o dos rectas secantes, o un par de rectas paralelas, o una recta doble o un par de rectas imaginarias.*
2. *Si $\boxed{\det A \neq 0}$, entonces la cónica dada por (7.1) es una cónica no degenerada, es decir, se trata de una elipse, o una elipse imaginaria o de una hipérbola o de una parábola.*

Ejemplo 7.23

Analizar de qué tipo son las cónicas siguientes, indicando si son degeneradas o no:

1. $\boxed{x^2 - y^2 - 6x - 4y = -5}$: Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar, $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = -1 < 0}$. Así, tenemos una cónica **hiperbólica degenerada** (veremos que se trata de un **par de rectas secantes** y veremos cómo se calculan).

2. $\boxed{x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y = -4}$: Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En este caso, $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = 0}$. Así, tenemos una cónica **parabólica degenerada** (veremos que se trata de una **recta doble** o **rectas coincidentes** y veremos cómo se calculan).

3. $\boxed{x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 12y = -5}$: Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = 0}$. Así, se trata de una cónica **parabólica degenerada** (veremos que son dos **rectas imaginarias** que también podremos calcular).

4. $\boxed{x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 12y = -3}$: Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(respecto del ejemplo anterior, solo cambia el elemento a_{00}). Se tiene, $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = 0}$, por tanto, es una cónica **parabólica degenerada** (veremos que son dos **rectas paralelas** que veremos cómo se calculan).

5. $\boxed{5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 4y = -1}$: Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se tiene, $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = 16 > 0}$. Así, se trata de una cónica **elíptica degenerada** (veremos que se trata de un **punto** y veremos cómo se puede calcular).

6. $\boxed{5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 4y = -2}$: Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se tiene, $\boxed{\det A = 16}$ y $\boxed{\det A_0 = 16 > 0}$. Deducimos de esta manera que se trata de una cónica **elíptica no degenerada** (veremos que se trata de un **elipse imaginaria**).

En el análisis de las cónicas la dificultad surge cuando se quiere deducir no solo el tipo de la cónica (degenerada o no degenerada o elíptica, hiperbólica o parabólica), si no saber de qué cónica se trata. Una expresión como (7.1) solo proporciona nueve cónicas: cuatro no degeneradas (elipse, elipse imaginaria, hipérbola y parábola) y cinco degeneradas (punto, par de rectas secantes, par de rectas paralelas, par de rectas coincidentes y par de rectas imaginarias). Por otro lado, será también interesante determinar los elementos principales de la cónica, es decir, determinar su centro o vértice, sus ejes, su recta directriz (para la parábola), etc.

Clasificación buscando la ecuación reducida.

Partimos de la ecuación de la cónica, dada por (7.1):

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0}. \tag{7.1}$$

donde los coeficientes son reales y a_{11}, a_{12} y a_{22} no son simultáneamente nulos (es decir, la matriz A_0 asociada a la forma cuadrática no es nula, ver (7.2)). Como vimos más arriba, la ecuación anterior puede ser reescrita usando la matriz A_0

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{01}, a_{02}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0. \tag{7.4}$$

Lo primero que haremos es realizar un cambio de variables en la ecuación (7.1) que elimine el término $\boxed{2a_{12}y}$, es decir, un cambio de variables que diagonalice A_0. En segundo lugar, analizaremos la ecuación resultante que tendrá una estructura más sencilla.

7.3.1 Diagonalización de A_0

Como hemos comentado, A_0 es una matriz simétrica de dimensión 2×2. Llamando λ_1 y λ_2 a sus autovalores, $\{v_1, v_2\}$ a dos autovectores **ortogonales** y **unitarios** y considerando $D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, matriz diagonal, y $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, matriz de paso, dadas por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2)\,,$$

sabemos que P es **ortogonal** y

$$\boxed{A = PDP^t} \iff \boxed{D = P^tAP}.$$

Usando esta matriz P, hacemos el cambio de variables:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} \iff \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}, \tag{7.5}$$

donde (x, y) son las antiguas variables y (x_1, y_1) las nuevas, y donde hemos usado que $P^{-1} = P^t$. Del cambio anterior, también deducimos $\boxed{(x, y) = (x_1, y_1)P^t}$. Llevando el cambio a (7.4) obtenemos,

$$\boxed{(x_1, y_1)P^tAP \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 2(a_{01}, a_{02})P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + a_{00} = 0}.$$

Teniendo en cuenta que $P^tAP = D$, obtenemos:

$$\boxed{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2b_{01}x_1 + 2b_{02}y_1 + a_{00} = 0}, \quad \text{con} \quad \boxed{(b_{01}, b_{01}) = (a_{01}, a_{02})P}. \tag{7.6}$$

Observación 7.24
Es interesante resaltar que en realidad hemos hecho una rotación respecto del origen en la cónica. La matriz de rotación está dada por P. Por tanto, la cónica geométricamente es la misma, pero han cambiado sus ejes y/o recta directriz y sus focos y vértices (ver Figura 7.15).

7.3.2 Clasificación.

Estamos ya en condiciones de hacer la clasificación según el tipo de cónica:

Caso elíptico. Supongamos que $\det A_0 = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Tenemos por tanto autovalores no nulos y del mismo signo. Podemos suponer que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. Partiendo de la fórmula (7.6), reescribimos la expresión como:

$$\boxed{\lambda_1(x_1 - \alpha)^2 + \lambda_2(y_1 - \beta)^2 + c = 0}, \tag{7.7}$$

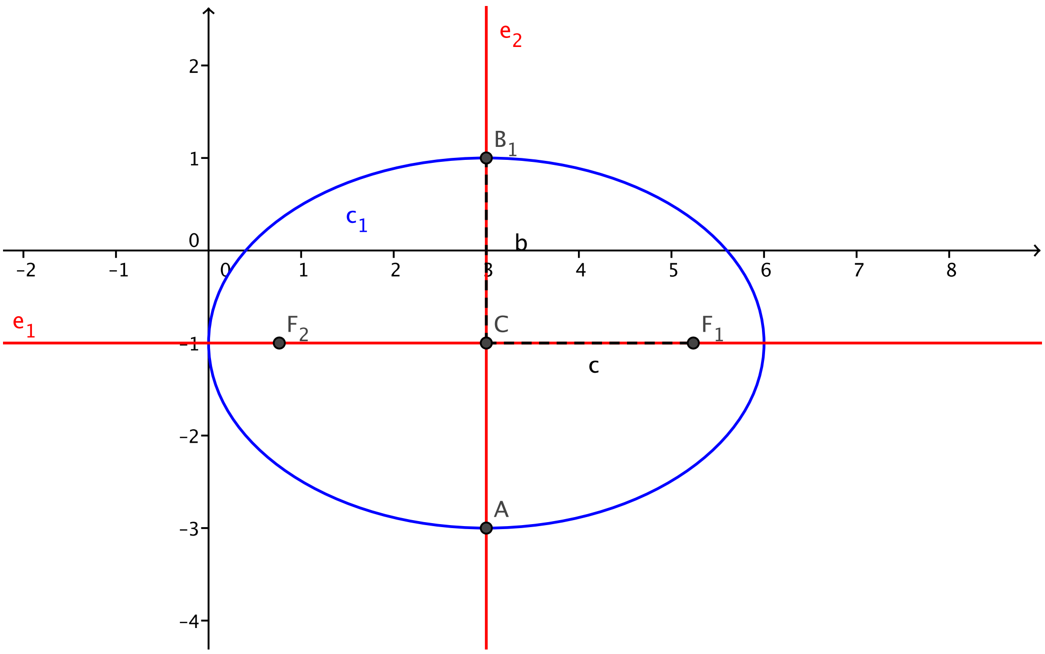


Figura 7.14: Elipse de centro $C = (3, -1)$.

para ciertos valores reales α, β y c. Así,

1. Si $\boxed{c = 0}$, entonces, tenemos una cónica degenerada: **un punto**. En concreto, se trata del punto (α, β) que, volviendo a las variables originales es el punto:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} \iff \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}$$

2. Si $\boxed{\operatorname{sign} c = \operatorname{sign} \lambda_1}$, entonces, no hay ningún punto (x_1, y_1) que satisfaga la ecuación. Tenemos una cónica no degenerada: **elipse imaginaria**.

3. Si $\boxed{\operatorname{sign} c \neq \operatorname{sign} \lambda_1}$, entonces, tenemos una cónica no degenerada: **elipse**. Podemos ahora calcular sus elementos y, para ello, partimos de (7.7) que equivale a:

$$\boxed{\lambda_1 (x_1 - \alpha)^2 + \lambda_2 (y_1 - \beta)^2 = -c} \iff \boxed{\frac{(x_1 - \alpha)^2}{-\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{(y_1 - \beta)^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} = 1}.$$

De esta expresión de la elipse, deducimos la fórmula del **centro** C de la elipse (ver figura 7.14):

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} \iff \boxed{C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}$$

También, como hemos supuesto que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$, entonces, en las variables (x_1, y_1), el **eje mayor** de la elipse es paralelo al eje $\overline{OX}_1$ y está dado por $\boxed{y_1 = \beta}$. Del mismo modo, el **eje menor** de la elipse en las variables (x_1, y_1) es paralelo al eje $\overline{OY}_1$ y está dado por $\boxed{x_1 = \alpha}$. Por tanto, volviendo a la elipse original y a las variables originales (x, y):

1. **Eje mayor:** Se obtiene al deshacer el cambio (7.5) en la ecuación $\boxed{y_1 = \beta}$. Esta recta pasa el centro C y tiene como vector director
$$\boxed{P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (v_1 \,|\, v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1},$$

es decir, tiene como vector director el **autovector** de A_0 asociado a λ_1.

2. **Eje menor:** Se obtiene al deshacer el cambio (7.5) en la ecuación $\boxed{x_1 = \alpha}$. De nuevo, es la recta que pasa por el centro C y tiene como vector director

$$\boxed{P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (v_1 \,|\, v_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2},$$

es decir, tiene como vector director el **autovector** de A_0 asociado a λ_2.

También deducimos,

$$\boxed{a^2 = -\frac{c}{\lambda_1}}, \quad \boxed{b^2 = -\frac{c}{\lambda_2}} \quad \text{y} \quad \boxed{c^2 = a^2 - b^2 = -\frac{c}{\lambda_1} + \frac{c}{\lambda_2}}$$

Tenemos así las **longitudes de los ejes** y la **distancia focal** de la elipse. Conociendo los vectores directores de los ejes de la elipse (que son **unitarios**) y los valores a, b y c, podemos calcular el resto de los elementos de la elipse: **focos** y **vértices**:

$$\boxed{F_1, F_2 = C \pm cv_1}; \quad \boxed{A_1, A_2 = C \pm av_1} \quad \boxed{B_1, B_2 = C \pm bv_2}.$$

Ejemplo 7.25
Clasificar la cónica $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 10x - 2y = -9$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).

Para saber qué tipo de cónica tenemos, vamos a seguir el procedimiento descrito más arriba. Las matrices asociadas a esta cónica son

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En este caso, se tiene $\det A = -16 \neq 0$ y $\det A_0 = 8 > 0$. Por tanto, tenemos una cónica elíptica no degenerada: elipse o elipse imaginaria. Busquemos su ecuación reducida. Para ello, vamos a diagonalizar A_0.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico de A_0 es:

$$p(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8,$$

Así, los autovalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ (hemos llamado λ_1 al autovalor de A_0 con menor valor absoluto). Por otro lado, los autovectores asociados serán **ortogonales** (A_0 es una matriz simétrica) y se calculan resolviendo los sistemas homogéneos $(A_0 - \lambda_1)v = 0$ y $(A_0 - \lambda_1)v = 0$. Recordemos que necesitamos autovectores **unitarios**.

1. $\boxed{\lambda = \lambda_1 = 2}$: Planteamos el sistema $(A_0 - \lambda_1)v = 0$, que equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right. \iff x - y = 0.$$

Podemos tomar como autovector asociado a λ_1 el vector $(1,1)$. Dividimos por su módulo $\sqrt{2}$ para que sea unitario. Así,

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)}.$$

2. $\boxed{\lambda = \lambda_2 = 4}$: : Planteamos ahora el sistema $(A_0 - \lambda_2)v = 0$, que equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{array} \right. \iff x + y = 0.$$

Tomamos como autovector asociado a λ_2 el vector $(1,-1)$ dividido por su módulo. Así,

$$\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)}.$$

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: En la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1), \end{cases}} \iff \boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y). \end{cases}}$$

Así, $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 10x - 2y = -9$ equivale a:

$$3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)\right]^2 - 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1)\right] + 3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1)\right]^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}(x_1+y_1) - \frac{2}{\sqrt{2}}(x_1-y_1) = -9$$

$$2x_1^2 + 4y_1^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{8}{\sqrt{2}}y_1 = -9 \iff 2\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{18}{2} + \frac{4}{2} - 9.$$

De la última ecuación deducimos que la cónica es una **elipse** cuya ecuación reducida es:

$$\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

3. Elementos: En primer lugar, el centro de la elipse con ecuación reducida es $C' = (3/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Deshaciendo el cambio:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

es decir, el **centro** es $\boxed{C = (2,1)}$. El eje mayor está dado por la ecuación que pasa por el centro C y tiene como vector director el vector v_1. Por tanto, el **eje mayor** es:

$$\frac{y-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{x-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \iff \boxed{y = x - 1}.$$

(También se puede obtener deshaciendo el cambio de variables en la recta $y_1 = 1/\sqrt{2}$, eje mayor de la elipse en variables (x_1, y_1)). Razonamos ahora con el vector v_2 para obtener el **eje menor**:

$$\frac{y-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{x-2}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \iff \boxed{y = -x + 3}.$$

La longitud del eje mayor es $\boxed{a = 1}$ y la del eje menor es $\boxed{b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$. Por tanto, $\boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$. A partir del centro de la elipse y de estas longitudes deducimos el resto de elementos (ver Figura 7.15):

$$\boxed{A_1 = C + av_1 = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}, \quad \boxed{A_2 = C - av_1 = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)},$$

$$\boxed{B_1 = C - bv_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}, \quad \boxed{B_2 = C + bv_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)},$$

$$\boxed{F_1 = C + cv_1 = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)}, \quad \boxed{F_2 = C - cv_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}.$$

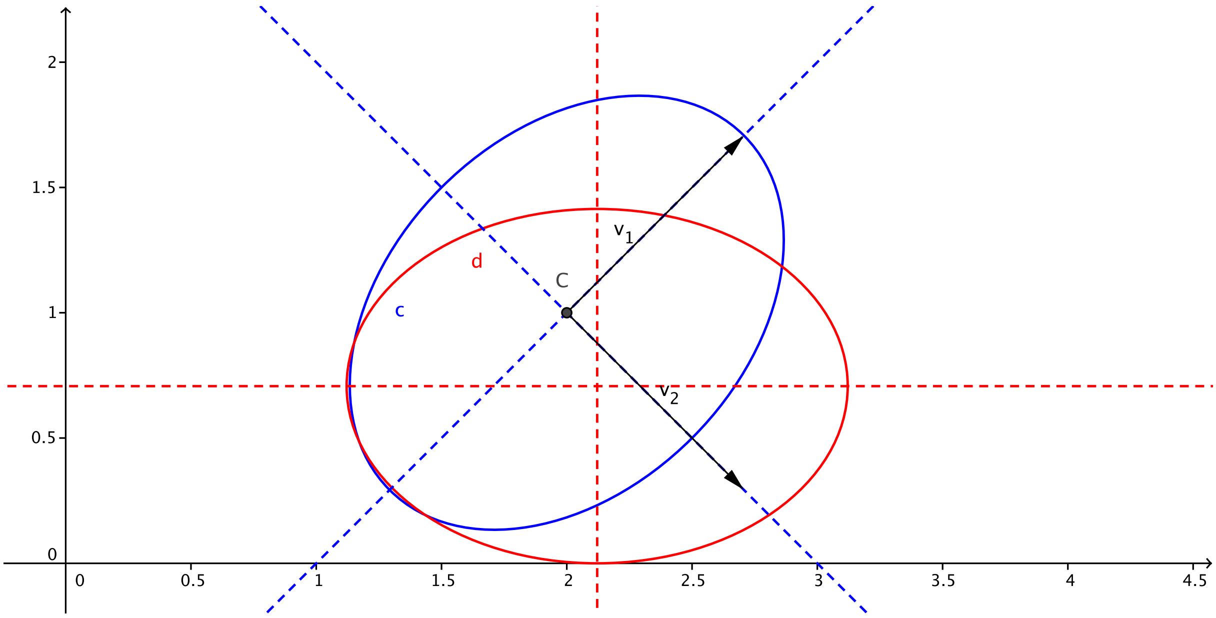


Figura 7.15: Elipses del Ejemplo 7.25: En azul, cónica original y en rojo, cónica en ecuación reducida.

Caso hiperbólico. Volvemos de nuevo a la ecuación reducida (7.6) obtenida mediante el cambio (7.5). Supongamos que $\det A_0 = \lambda_1\lambda_2 < 0$. Tenemos de nuevo autovalores no nulos, pero en este caso, de distinto signo. Podemos suponer que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$. Reescribimos de nuevo (7.6) como:

$$\boxed{\lambda_1(x_1-\alpha)^2 + \lambda_2(y_1-\beta)^2 + c = 0},$$

para ciertos valores reales α, β y c. Así,

1. Si $\boxed{c = 0}$ tenemos un **par de rectas secantes**. Estas pueden ser calculadas de la ecuación

$$\boxed{\lambda_1(x_1-\alpha)^2 + \lambda_2(y_1-\beta)^2 = 0}.$$

Deshaciendo el cambio (7.5) obtendríamos las rectas asociadas a la cónica. Para más detalles, véase el Ejemplo 7.26.

2. Si $\boxed{c \neq 0}$ tenemos una **hipérbola**. Partimos de la ecuación reducida y obtenemos:

$$\boxed{\lambda_1(x_1-\alpha)^2 + \lambda_2(y_1-\beta)^2 = -c} \iff \boxed{\frac{(x_1-\alpha)^2}{-\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{(y_1-\beta)^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} = 1}.$$

Obsérvese que $\operatorname{sign}\left(-\frac{c}{\lambda_1}\right) \neq \operatorname{sign}\left(-\frac{c}{\lambda_2}\right)$, es decir, uno es positivo y otro es negativo. A partir de esta información es posible obtener los elementos de la hipérbola razonando como en el caso de la elipse. Para más detalles, véase el Ejemplo 7.27.

Ejemplo 7.26
Clasificar la cónica $2x^2 + 4xy - y^2 - 4x - 4y = -2$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).
Las matrices asociadas a esta cónica son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, se tiene $\det A = 0$ y $\det A_0 = -6 < 0$. Así, podemos concluir que se trata de una cónica hiperbólica degenerada. En concreto, tenemos un **par de rectas secantes**. Busquemos su ecuación reducida diagonalizando A_0.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico es $p(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 6$. De aquí obtenemos dos autovalores $\boxed{\lambda_1 = 3}$ y $\boxed{\lambda_2 = -2}$. Como en el Ejemplo 7.25, calculamos los autovectores asociados a λ_1 y λ_2 que, como sabemos, son **ortogonales** y que elegiremos **unitarios**.

1. $\boxed{\lambda = \lambda_1 = 3}$: Para calcular un autovector asociado a λ_1 planteamos el sistema $(A_0 - 3I)v = 0$, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{array} \right. \iff -x + 2y = 0 \iff v = (2\alpha, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Elegimos como autovector asociado a λ_1 el vector $(2, 1)$ dividido por su norma $\sqrt{5}$. Así, $\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)}$.

2. $\boxed{\lambda = \lambda_2 = -2}$: Repetimos el razonamiento para λ_2. Planteamos el sistema $(A_0 + 2I)v = 0$, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right. \iff 2x + y = 0 \iff v = (\alpha, -2\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Elegimos como autovector asociado a λ_2 el vector $(1, -2)$ dividido por su norma $\sqrt{5}$. Así, $\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)}$.

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: En la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1)}, \quad \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1)}; \quad \boxed{x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y)}, \quad \boxed{y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y)}$$

Así, la ecuación $2x^2 + 4xy - y^2 - 4x - 4y = -2$ equivale a

$$2\left(\frac{2x_1 + y_1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2x_1 + y_1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2x_1 + y_1}{\sqrt{5}}\right) - 4\left(\frac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}}\right) = -2,$$

es decir,

$$\boxed{3x_1^2 - 2y_1^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}y_1 = -2} \iff \boxed{3\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -2 + \frac{12}{5} - \frac{2}{5}}$$

Conclusión: Se trata de **dos rectas secantes**. La ecuación reducida en las variables (x_1, y_1) es:

$$\boxed{3\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0}.$$

Así, el punto de corte es $C' = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Volviendo a las variables originales, el punto de corte es $\boxed{C = (1, 0)}$. La ecuación reducida equivale a

$$\boxed{3\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0} \iff \boxed{\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)},$$

que, evidentemente, nos proporciona la ecuación de las dos rectas (en la variable (x_1, y_1)). Volviendo a las variables originales, tenemos la fórmula de las dos rectas que componen la cónica (ver Figura 7.16):

$$\begin{cases} \text{Primera Recta: } \boxed{\sqrt{2}\,(x-2y-1) = \sqrt{3}\,(2x+y-2)}, \\ \text{Segunda Recta: } \boxed{\sqrt{2}\,(x-2y-1) = -\sqrt{3}\,(2x+y-2)}. \end{cases}$$

El punto de corte fue hallado anteriormente: $\boxed{C = (1,0)}$.

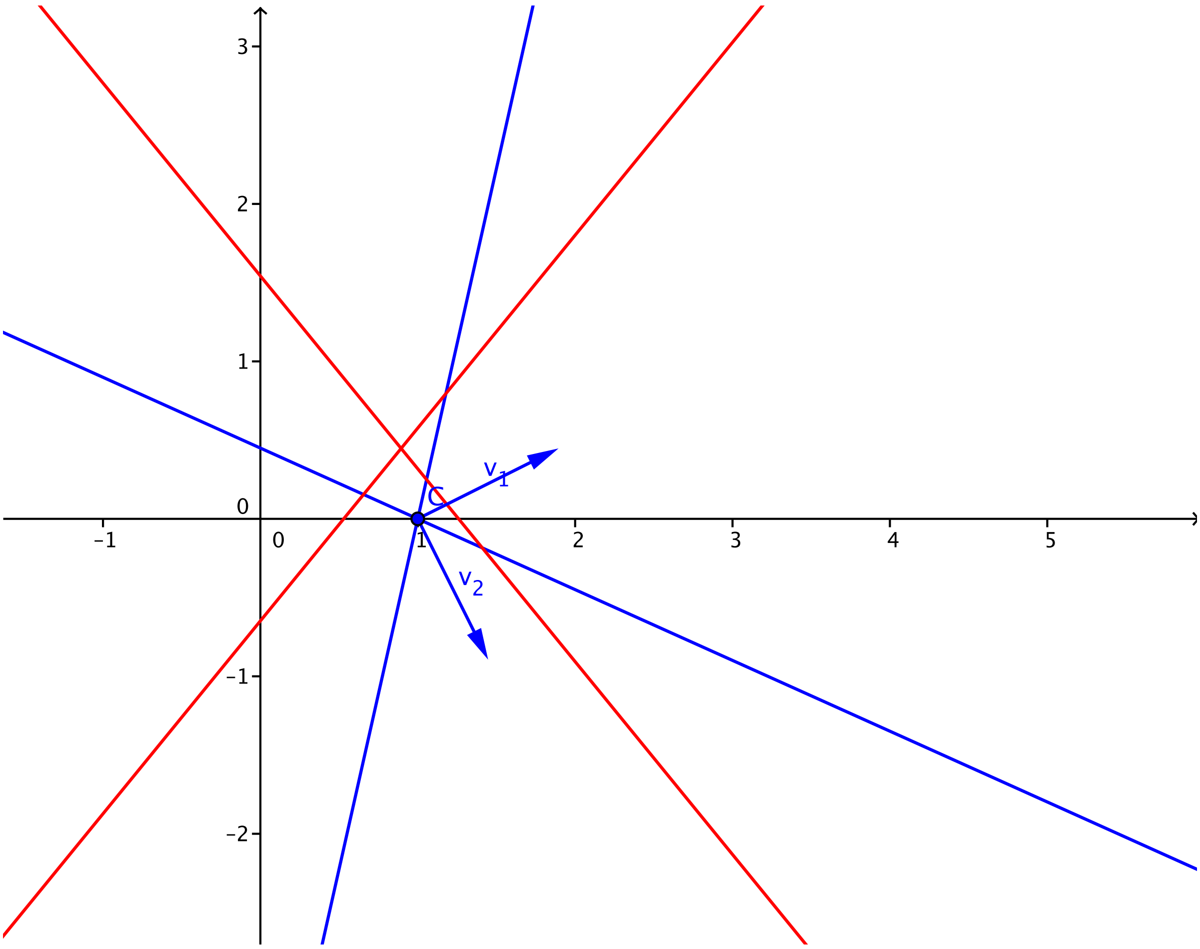


Figura 7.16: Rectas secantes del Ejemplo 7.26: En azul, cónica original y en rojo, cónica en ecuación reducida.

Ejemplo 7.27
Clasificar la cónica $2x^2 + 4xy - y^2 - 4x - 4y = -1$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).

Las matrices asociadas a esta cónica son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, se tiene $\det A = 6$ y $\det A_0 = -6 < 0$. Así, podemos concluir que se trata de una cónica hiperbólica no degenerada. En concreto, tenemos una **hipérbola**. Como en el ejemplo anterior, busquemos su ecuación reducida y comenzaríamos diagonalizando A_0. Como es la misma matriz, usamos los resultados del Ejemplo 7.26.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico es $p(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 6$ que nos proporciona dos autovalores $\boxed{\lambda_1 = 3}$ y $\boxed{\lambda_2 = -2}$. Los autovectores **ortogonales** y **unitarios** son (ver en el Ejemplo 7.26): $\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)}$ y $\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)}$.

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: En la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1)}, \quad \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1)}; \quad \boxed{x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y)}, \quad \boxed{y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y)}$$

(es el mismo cambio que en el Ejemplo 7.26). Así, la ecuación $2x^2 + 4xy - y^2 - 4x - 4y = -1$ equivale a

$$2\left(\frac{2x_1 + y_1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2x_1 + y_1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2x_1 + y_1}{\sqrt{5}}\right) - 4\left(\frac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}}\right) = -1,$$

es decir,

$$\boxed{3x_1^2 - 2y_1^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}y_1 = -1} \iff \boxed{3\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -1 + \frac{12}{5} - \frac{2}{5}}$$

Conclusión: Se trata de **hipérbola**. La ecuación reducida en las variables (x_1, y_1) es:

$$\boxed{\frac{\left(x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{3}} - \frac{\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 1}.$$

En este caso, el **centro** de la hipérbola es $\boxed{C' = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})}$. Deshaciendo el cambio, obtenemos que el **centro** de la hipérbola original es $\boxed{C = (1,0)}$. Por otro lado, los focos de la hipérbola en las variables (x_1, y_1) están situados sobre la recta horizontal $\boxed{y_1 = 1/\sqrt{5}}$ (que es el eje mayor). El eje menor es la recta vertical $\boxed{x_1 = 2/\sqrt{5}}$. Deshaciendo el cambio podemos obtener los ejes de la hipérbola original:

$$\begin{cases} \text{Eje mayor: } y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \iff \boxed{x - 2y = 1} \iff \boxed{y = \frac{1}{2}(x+1)}, \\ \text{Eje menor: } x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \iff \boxed{2x + y = 2} \iff \boxed{y = 2 - 2x}. \end{cases}$$

Además, podemos calcular los valores a, b y distancia focal (c):

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{3}}}, \quad \boxed{b = \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}}.$$

Esto nos permite obtener el resto de elementos de la hipérbola (recordemos que los autovectores son los vectores directores unitarios de los ejes; ver Figura 7.17):

$$\begin{cases} \text{Vértices: } A_1, A_2 = C \pm a v_1 \iff \boxed{A_1 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)} \text{ y } \boxed{A_2 = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}\right)}, \\ \text{Focos: } F_1, F_2 = C \pm c v_1 \iff \boxed{F_1 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)} \text{ y } \boxed{F_2 = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}. \end{cases}$$

Como alternativa, podemos calcular los demás elementos de la hipérbola original, calculando los correspondientes elementos de la hipérbola mediante su ecuación reducida (en variables (x_1, y_1)) para después deshacer el cambio. Así, para la hipérbola en variables (x_1, y_1), se tiene:

$$\begin{cases} \text{Vértices: } A_1', A_2' = C' \pm a(1,0) \iff \boxed{A_1' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \text{ y } \boxed{A_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}, \\ \text{Focos: } F_1', F_2' = C' \pm c(1,0) \iff \boxed{F_1' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \text{ y } \boxed{F_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}. \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables, llegamos a los valores dados más arriba (compruébese).

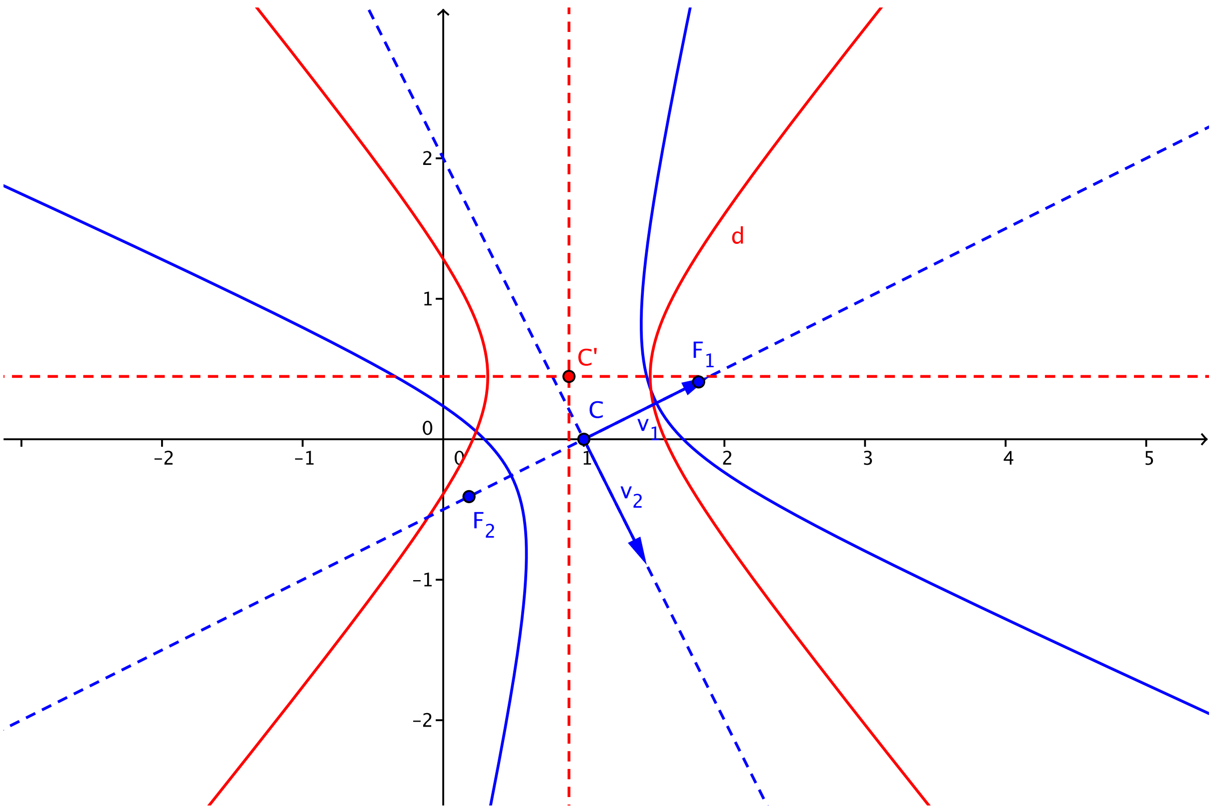


Figura 7.17: Hipérbolas del Ejemplo 7.27: En azul, cónica original y en rojo, cónica en ecuación reducida.

Caso parabólico. Para analizar este último caso, volvemos de nuevo a la ecuación reducida (7.6) obtenida mediante el cambio (7.5). Supongamos ahora que $\det A_0 = \lambda_1\lambda_2 = 0$. En este caso, un autovalor es cero y el otro es distinto de cero (A_0 no es la matriz nula). Podemos suponer que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$. Reescribimos de nuevo (7.6) como:

$$\boxed{\lambda_2(y_1 - \beta)^2 + 2b_{01}x_1 + c = 0},$$

para ciertos valores reales β y c. Así,

1. Si $\boxed{b_{01} = 0}$ tenemos una cónica degenerada:

$$\boxed{(y_1 - \beta)^2 = -\frac{c}{\lambda_2}} \iff \boxed{y_1 = \beta \pm \sqrt{-\frac{c}{\lambda_2}}}.$$

Si $\boxed{c \neq 0}$ y $\boxed{\text{sign}\, c = \text{sign}\, \lambda_2}$, tenemos **dos rectas imaginarias**. Si $\boxed{c \neq 0}$ y $\boxed{\text{sign}\, c \neq \text{sign}\, \lambda_2}$, obtenemos **dos rectas paralelas**. Deshaciendo el cambio (7.5) obtenemos las rectas paralelas en las variables originales (x, y). Por último, si $\boxed{c = 0}$, tenemos **dos rectas coincidentes**. De nuevo, deshaciendo el cambio (7.5) obtenemos la rectas en las variables originales (x, y).

2. Si $\boxed{b_{01} \neq 0}$, entonces, escribimos la fórmula anterior como

$$\boxed{(y_1 - \beta)^2 = -2\frac{b_{01}}{\lambda_2}(x_1 - \alpha)}.$$

Esta igualdad nos proporciona el **vértice** de la parábola en las variables (x_1, y_1): $C' = (\alpha, \beta)$. Deshaciendo el cambio (7.5)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C}.$$

También esta igualdad nos proporciona el foco y la recta directriz de la parábola en las variables (x_1, y_1): $\boxed{c = \left|\frac{b_{01}}{\lambda_2}\right|}$ y el foco, la recta directriz y el eje (en variables (x_1, y_1)) son

$$\boxed{F' = \left(\alpha \pm \frac{c}{2}, \beta\right)}, \quad \boxed{x_1 - \alpha = \pm\frac{c}{2}}, \quad \boxed{y_1 = \beta},$$

donde los signos $\pm$ dependen del signo que tenga $-b_{01}/\lambda_2$. Deshaciendo el cambio (7.5), obtendríamos los elementos de la parábola en las variables originales.

Ejemplo 7.28
Clasificar la cónica $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y = 3$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).

Comenzamos calculando las matrices asociadas a esta cónica:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, se tiene $\det A = -16$ y $\det A_0 = 0$. Podemos concluir que se trata de una cónica parabólica no degenerada, es decir, tenemos una **parábola**. Siguiendo el procedimiento descrito, busquemos su ecuación reducida. Para ello, diagonalicemos A_0.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico asociado a A_0 es $p(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda$, con autovalores $\boxed{\lambda_1 = 0}$ y $\boxed{\lambda_2 = 2}$. Los autovectores **ortogonales** y **unitarios** se obtienen resolviendo los sistemas lineales homogéneos $(A_0 - \lambda_i I)\, v = 0$. En este caso, es fácil calcular estos autovectores (se deja como ejercicio) dando como resultado:

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)}, \text{ (autovector asociado a } \lambda_1 = 0), \quad \boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)}, \text{ (autovector asociado a } \lambda_2 = 2)$$

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: En la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)}, \quad \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1)}; \quad \boxed{x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)}, \quad \boxed{y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)}.$$

Llevando este cambio de variables a la expresión de la cónica se deduce:

$$\boxed{2y_1^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}y_1 = 3} \iff \boxed{2\left(y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}}x_1 + 3 + 1} \iff \boxed{\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Tenemos el ejemplo casi acabado, pues esta ecuación reducida nos da los elementos de la parábola en variables (x_1, y_1): $\boxed{c = \frac{2}{\sqrt{2}}}$, el **vértice** es $\boxed{C' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, el **foco** es $\boxed{F' = C' + \frac{c}{2}(1,0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, el **eje** es $\boxed{y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ y, finalmente,

$$\boxed{\textbf{recta directriz}: x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{c}{2}} \iff \boxed{x_1 = -\frac{2}{\sqrt{2}}}.$$

Volviendo a las variables originales, deducimos (ver Figura 7.18): **vértice**: $\boxed{C = (0,1)}$; **foco**: $\boxed{F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$; **eje** es $\boxed{x + y = 1}$; **recta directriz**: $\boxed{x - y = -2}$

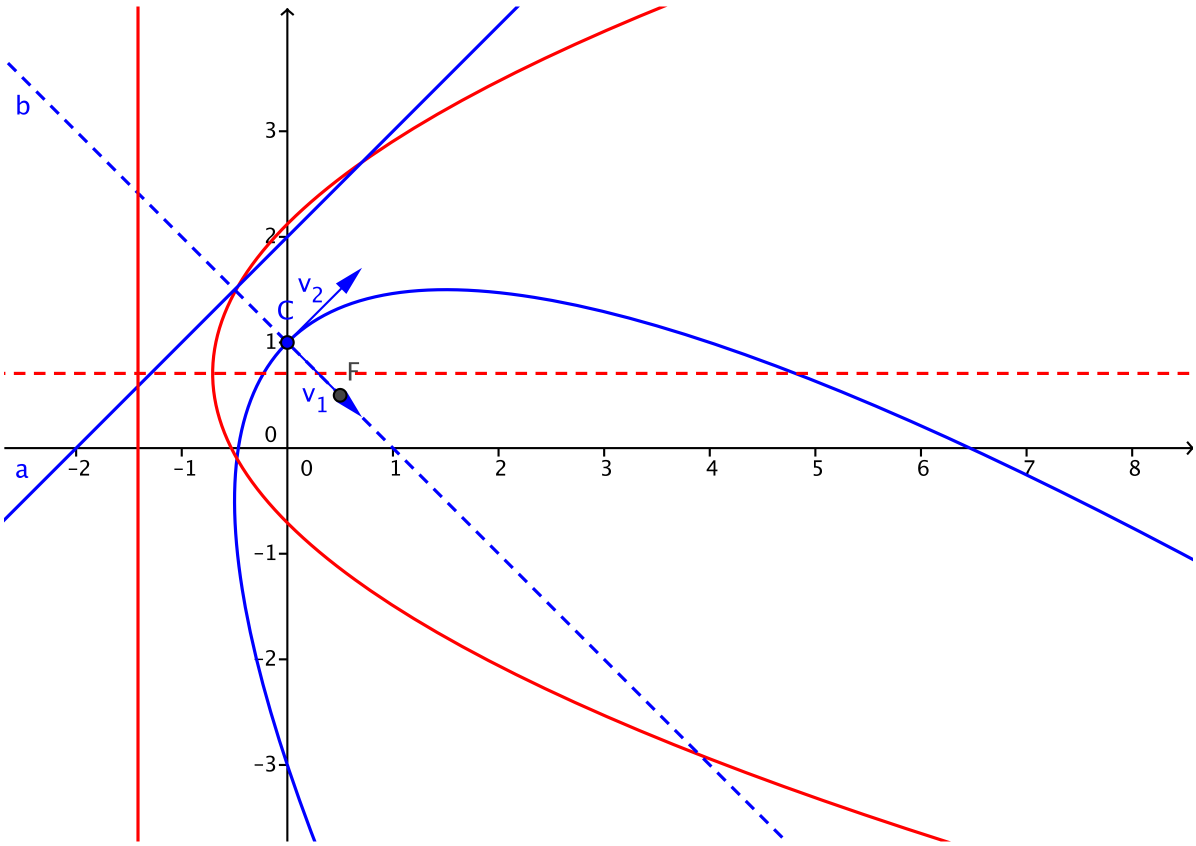


Figura 7.18: Parábolas del Ejemplo 7.28: En azul, cónica original y en rojo, cónica en ecuación reducida.

7.4 Ejemplos

Dedicamos esta sección a clasificar las cónicas presentadas en los Ejemplos 7.21 y 7.23. Comenzamos por las cónicas del Ejemplo 7.21:

Ejemplo 7.29 (Ver Ejemplo 7.21.1)
Clasificar la cónica $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2 = 0$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).
Las matrices asociadas a la ecuación de esta cónica son

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = -16 \neq 0$ y $\det A_0 = 8 > 0$, deducimos que la cónica es de tipo elíptico no degenerada, por tanto, se trata de una elipse o de una elipse imaginaria.

1. Diagonalización de A_0: La matriz A_0 coincide con la matriz del Ejemplo 7.25. Por tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ (hemos llamado λ_1 al autovalor de A_0 con menor valor absoluto) con autovectores ortogonales asociados (los hemos tomado **unitarios**):

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} \quad \text{y} \quad \boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)}.$$

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: En la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1), \end{cases}} \iff \boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y). \end{cases}}$$

Así, $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2 = 0$ equivale a:

$$3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)\right]^2 + 3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1)\right]^2 - 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1)\right] = 2 \iff 2x_1^2 + 4y_1^2 = 2.$$

De la última ecuación deducimos que la cónica es una **elipse** cuya ecuación reducida es:

$$\boxed{x_1^2 + \frac{y_1^2}{\frac{1}{2}} = 1}.$$

3. Elementos: Los elementos de la elipse en ecuación reducida (variables (x_1, y_1)) son: $\boxed{a = 1}$; $\boxed{b = \frac{1}{\sqrt{2}}}$; $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{2}}}$; **Centro**: $\boxed{C' = (0,0)}$; **Eje mayor**: $\boxed{y_1 = 0}$; **Eje menor**: $\boxed{x_1 = 0}$;

$$\begin{cases} \text{Vértices: } \boxed{A_1', A_2' = (\pm a, 0) = (\pm 1, 0)}, \quad \boxed{B_1', B_2' = (0, \pm b) = \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \\ \text{Focos: } \boxed{F_1', F_2' = (\pm c, 0) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}. \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio (ver más arriba) obtenemos los elementos de la ecuación original (ver Figura 7.19): **Centro**: $\boxed{C = (0,0)}$; **Eje mayor**: $\boxed{x - y = 0}$; **Eje menor**: $\boxed{x + y = 0}$;

$$\begin{cases} \text{Vértices: } \boxed{A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad A_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}, \quad \boxed{B_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B_2' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}, \\ \text{Focos: } \boxed{F_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad F_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}. \end{cases}$$

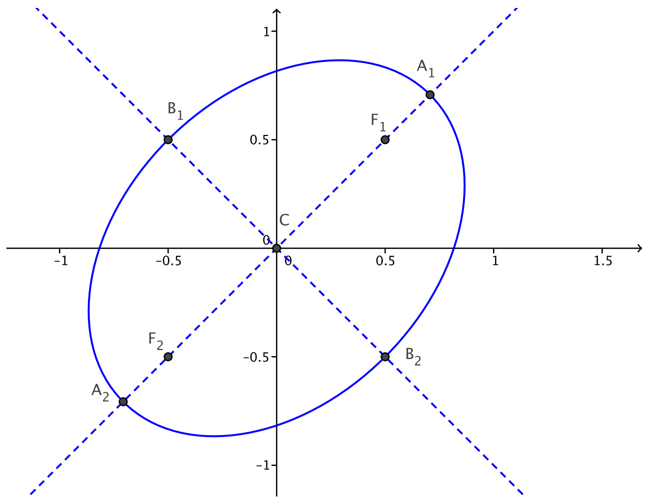


Figura 7.19: Elipse del Ejemplo 7.29.

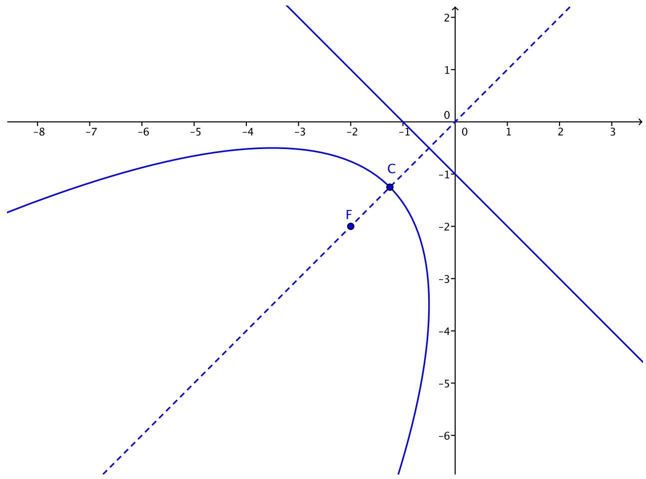


Figura 7.20: Parábola del Ejemplo 7.30.

Ejemplo 7.30 (Ver Ejemplo 7.21.2)
Clasificar la cónica $x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).

Las matrices asociadas a la fórmula de la cónica son

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $\det A = -36 < 0$ y $\det A_0 = 0$. Por tanto, se trata de una cónica no degenerada de tipo parabólico, es decir, se trata de una parábola.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico asociado a la matriz A_0 está dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$. Así, los autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ (hemos llamado λ_1 al autovalor nulo de A_0). Elegimos ahora dos autovectores ortogonales y unitarios asociados, por ejemplo:

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} \quad \text{y} \quad \boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)}.$$

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: En la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1), \end{cases}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y). \end{cases}}$$

Así, la ecuación de la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 6y + 15 = 0$ equivale a:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1)\right]^2 - 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)\right]^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) + \frac{6}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) + 15 = 0.$$

Operando en la última ecuación deducimos que la ecuación reducida de la parábola está dada por:

$$\boxed{2y_1^2 = -\frac{12}{\sqrt{2}}x_1 - 15} \Longleftrightarrow \boxed{y_1^2 = -\frac{6}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)}.$$

3. Elementos: De la ecuación reducida de la parábola (variables (x_1, y_1)) y, en particular, debido a que $-\frac{6}{\sqrt{2}} < 0$, deducimos en primer lugar que la rama de la parábola está orientada hacia la izquierda y que su foco se va a situar a la izquierda del vértice. Por otro lado, la recta directriz se va a situar a la derecha del vértice. Con esta información y con la ecuación reducida, podemos deducir cuáles son sus elementos: $\boxed{c = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$; **Vértice**: $\boxed{C' = \left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{4}, 0\right)}$; **Eje**: $\boxed{y_1 = 0}$. Como hemos dicho antes, la rama de la parábola está orientada hacia la izquierda. Así, su foco está a la izquierda del vértice (a distancia $c/2$) y la recta directriz a su derecha (también a distancia $c/2$). Así, deducimos

Foco: $\boxed{F' = \left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{4} - \dfrac{c}{2}, 0\right) = \left(-2\sqrt{2}, 0\right)}$, Recta directriz: $\boxed{x_1 = -\dfrac{5\sqrt{2}}{4} + \dfrac{c}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

Deshaciendo el cambio (ver más arriba) obtenemos los elementos de la ecuación original (ver Figura 7.20): **Vértice**: $\boxed{C = \left(-\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{4}\right)}$; **Eje**: $\boxed{-x + y = 0}$, es decir, $\boxed{y = x}$;

Foco: $\boxed{F = (-2, -2)}$, Recta directriz: $\boxed{x + y = -1}$.

Ejemplo 7.31 (Ver Ejemplo 7.21.3)
Clasificar la cónica $x^2 - 8xy + y^2 + 3x + 3y - \frac{1}{2} = 0$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).

Las matrices asociadas a la fórmula de la cónica son

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & -4 \\ -\frac{3}{2} & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, $\det A = -15/2 \neq 0$ y $\det A_0 = -15 < 0$, por tanto, se trata de una cónica no degenerada de tipo hiperbólico, es decir, se trata de una hipérbola.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico asociado a A_0 está dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 15$. Así, los autovalores son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -3$ (hemos llamado λ_1 al autovalor positivo de A_0). Elegimos ahora dos autovectores ortogonales y unitarios asociados, por ejemplo:

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)} \quad \text{y} \quad \boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)}.$$

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: En la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1+y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1), \end{array} \right.} \iff \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y), \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y). \end{array} \right.}$$

Así, la ecuación de la cónica $x^2 - 8xy + y^2 + 3x + 3y - \frac{1}{2} = 0$ equivale a:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1+y_1)\right]^2 - 8\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1+y_1)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1)\right]^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(-x_1+y_1) + \frac{3}{\sqrt{2}}(x_1+y_1) - \frac{1}{2} = 0,$$

es decir,

$$5x_1^2 - 3\left(y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1\right) = \frac{1}{2} \iff 5x_1^2 - 3\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -1.$$

Operando en la última ecuación deducimos que la ecuación reducida de la hipérbola está dada por:

$$\boxed{\frac{\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{3}} - \frac{x_1^2}{\frac{1}{5}} = 1}.$$

3. Elementos: Comenzamos resaltando que el eje mayor de la hipérbola, en variables (x_1, y_1) (ecuación reducida), es paralelo al eje y_1, es decir, tendrá la forma $x_1 = \alpha$, donde α será obtenido a partir del centro. Teniendo en cuenta la observación anterior, deducimos:

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{1}{3}}}, \quad \boxed{b = \sqrt{\frac{1}{5}}} \Longrightarrow \boxed{c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{8}{15}}},$$

con el centro: **Centro**: $\boxed{C' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$; **Eje mayor**: $\boxed{x_1 = 0}$; **Eje menor**: $\boxed{y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$. Los focos y los vértices están situados sobre el eje mayor, a distancia c y a del centro. Así,

$$\text{Focos: } \boxed{F_1', F_2' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \pm c\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{8}{15}}\right)}, \quad \text{Vértices: } \boxed{A_1', A_2' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \pm a\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Deshaciendo el cambio (ver más arriba) obtenemos los elementos de la ecuación original (ver Figura 7.21): **Centro**: $\boxed{C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$; **Eje mayor**: $\boxed{-x+y=0}$; **Eje menor**: $\boxed{x+y=1}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Focos: } \boxed{F_1, F_2 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{4}{15}}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{4}{15}}\right), \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4}{15}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4}{15}}\right)}; \\ \text{Vértices: } \boxed{F_1, F_2 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{6}}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{6}}\right), \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{6}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{6}}\right)}. \end{array} \right.$$

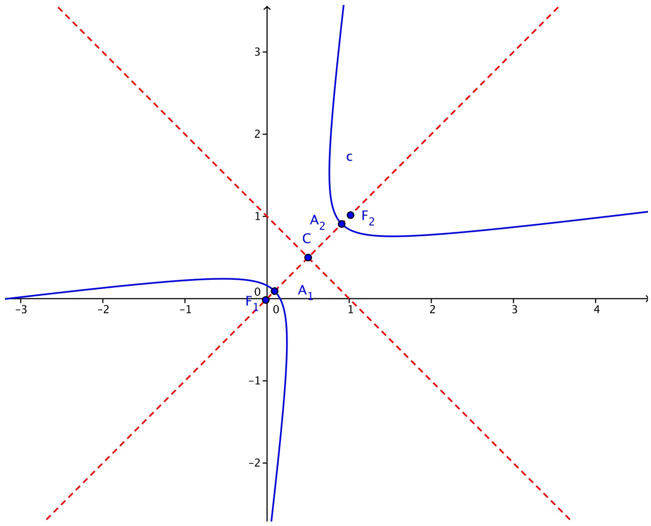


Figura 7.21: Hipérbola del Ejemplo 7.31.

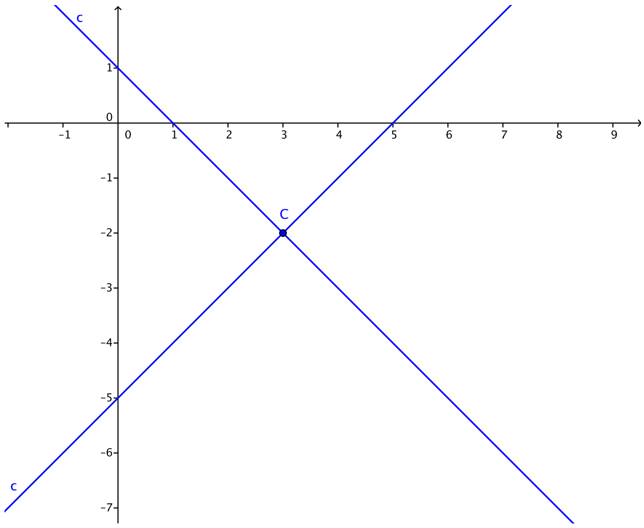


Figura 7.22: Rectas secantes del Ejemplo 7.32.

Pasemos a continuación a clasificar las cónicas que aparecen en el Ejemplo 7.23

Ejemplo 7.32 (Ver Ejemplo 7.23.1)
Clasificar la cónica $x^2 - y^2 - 6x - 4y = -5$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).
Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ya vimos que $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = -1 < 0}$ y que, por tanto, tenemos una cónica **hiperbólica degenerada**.

1. Diagonalización de A_0: La matriz A_0 es diagonal, por tanto, no es necesario este paso. De hecho, la cónica tiene ecuación reducida.

2. Ecuación reducida: En este caso no hay que realizar ningún cambio de variables. Podemos directamente operar en la ecuación de la cónica:

$$\boxed{x^2 - y^2 - 6x - 4y = -5} \iff \boxed{(x-3)^2 - (y+2)^2 = -5 + 9 - 4} \iff \boxed{(x-3)^2 - (y+2)^2 = 0}.$$

De la última ecuación deducimos que la cónica es un **par de rectas secantes**.

3. Elementos: De la última ecuación deducimos que la rectas vienen dadas por:

$$\boxed{(y+2)^2 = (x-3)^2} \iff \boxed{y + 2 = \pm(x-3)},$$

es decir, las rectas son $\boxed{y + 2 = x - 3}$ e $\boxed{y + 2 = -(x-3)}$. El punto de corte de las rectas es $\boxed{C = (3, -2)}$ (ver Figura 7.22).

Ejemplo 7.33 (Ver Ejemplo 7.23.2)
Clasificar la cónica $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y = -4$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).

Las matrices asociadas a esta cónica son:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como ya vimos más arriba, $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = 0}$. Así, tenemos una cónica **parabólica degenerada**. Veamos de qué tipo de cónica se trata.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico asociado a A_0 está dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$. Así, los autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$ (hemos llamado λ_1 al autovalor nulo de A_0). Es fácil obtener dos autovectores ortogonales y unitarios asociados a los anteriores autovalores (se deja como ejercicio al lector):

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)} \quad \text{y} \quad \boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)}.$$

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: Para obtener la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2y_1), \end{array}\right.} \iff \boxed{\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y), \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y). \end{array}\right.}$$

Así, la ecuación de la cónica $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y = -4$ equivale a:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1)\right]^2 - 4\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2y_1)\right] + 4\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2y_1)\right]^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1) - \frac{8}{\sqrt{5}}(x_1 + 2y_1) = -4,$$

es decir,

$$5y_1^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}y_1 + 4 = 0 \iff 5\left(y_1^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{4}{5}\right) = 0 \iff \boxed{5\left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0}.$$

De la última igualdad, deducimos que la cónica corresponde a **rectas coincidentes**: $\boxed{y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}}$.

3. Elementos: Basta ahora deshacer el cambio de variable inicial para obtener la recta en las variables originales (ver Figura 7.23):

$$\boxed{-x + 2y = 2}.$$

Ejemplo 7.34 (Ver Ejemplo 7.23.3)
Clasificar la cónica $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 12y = -5$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).

Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix},$$

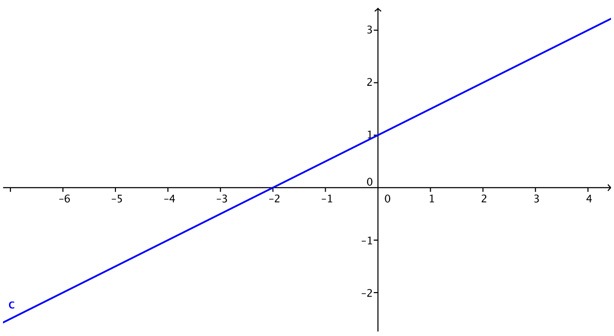


Figura 7.23: Rectas coincidentes del Ejemplo 7.33.

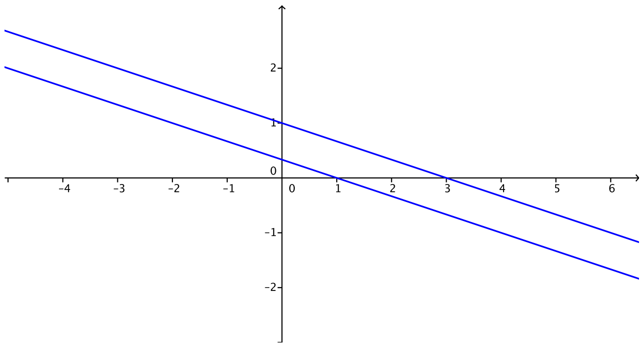


Figura 7.24: Rectas paralelas del Ejemplo 7.35.

que satisfacen, $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = 0}$. Como vimos, se trata de una cónica **parabólica degenerada**. Determinemos el tipo de cónica que corresponde a la ecuación.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico asociado a A_0 está dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda$. Así, los autovalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 10$ (hemos llamado λ_1 al autovalor nulo de A_0). Dos autovectores ortogonales y unitarios asociados a los anteriores autovalores (se deja como ejercicio al lector) son:

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)} \quad \text{y} \quad \boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)}.$$

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: Para obtener la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x_1 + y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x_1 + 3y_1), \end{cases}} \iff \boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y), \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y). \end{cases}}$$

La ecuación de la cónica $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 12y = -5$ equivale a:

$$\frac{1}{10}(-3x_1 + y_1)^2 + \frac{6}{10}(-3x_1 + y_1)(x_1 + 3y_1) + \frac{9}{10}(x_1 + 3y_1)^2 - \frac{4}{\sqrt{10}}(-3x_1 + y_1) - \frac{12}{\sqrt{10}}(x_1 + 3y_1) = -5,$$

es decir,

$$10\left(y_1^2 - \frac{4}{\sqrt{10}}y_1\right) + 5 = 0 \iff 10\left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 + 5 = 0 \iff \boxed{10\left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = -1}.$$

De la última igualdad, deducimos que la cónica corresponde a **dos rectas imaginarias**: $\boxed{y_1 = \frac{2}{\sqrt{10}} \pm \frac{1}{\sqrt{10}}i}$.

3. Elementos: Al tratarse de una cónica no real, no hay elementos asociados. En cualquier caso, deshaciendo el cambio de variables, podemos deducir las ecuaciones de las rectas imaginarias:

$$\boxed{x + 3y = 2 \pm i}.$$

Ejemplo 7.35 (Ver Ejemplo 7.23.4)
Clasificar la cónica $x^2+6xy+9y^2-4x-12y=-3$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).
Este ejemplo solo se diferencia del anterior en el elemento a_{00}. Por tanto la matriz A cambia, pero no la matriz A_0:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, $\boxed{\det A=0}$ y $\boxed{\det A_0=0}$. Como vimos, se trata de una cónica **parabólica degenerada**. Determinemos el tipo de cónica que corresponde a la ecuación.

1. Diagonalización de A_0: Este apartado coincide con el Ejemplo 7.34. Así, la diagonalización de A_0 está dada por:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad P=(v_1\,|\,v_2)=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^t=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: Para obtener la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5) que, en esta caso, coincide con el Ejemplo 7.34:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x_1+y_1), \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(x_1+3y_1), \end{array}\right.} \iff \boxed{\left\{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x+y), \\ y_1=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(x+3y). \end{array}\right.}$$

Como hemos comentado, la ecuación de la cónica $x^2+6xy+9y^2-4x-12y=-3$ solo se diferencia con el ejemplo anterior en el término a_{00} que ahora vale 3 (en lugar de 5). De los cálculos del ejemplo anterior, deducimos que la ecuación reducida es:

$$10\left(y_1-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2+3=0 \iff \boxed{10\left(y_1-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2=1}.$$

La última ecuación nos dice que la cónica corresponde a **dos rectas paralelas**: $\boxed{y_1=\dfrac{2}{\sqrt{10}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$, es decir,

$$\boxed{y_1=\frac{3}{\sqrt{10}}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_1=\frac{1}{\sqrt{10}}}.$$

3. Elementos: Deshaciendo el cambio de variables, podemos deducir las ecuaciones de las rectas paralelas en las variables originales (x,y) (ver Figura 7.24):

$$\boxed{x+3y=3} \quad \text{y} \quad \boxed{x+3y=1}.$$

Ejemplo 7.36 (Ver Ejemplo 7.23.5)
Clasificar la cónica $5x^2+6xy+5y^2+4x+4y=-1$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).
Las matrices asociadas son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se tiene, $\boxed{\det A = 0}$ y $\boxed{\det A_0 = 16 > 0}$. Así, se trata de una cónica **elíptica degenerada**. Determinemos el tipo de cónica que corresponde a la ecuación.

1. Diagonalización de A_0: El polinomio característico asociado a A_0 está dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 16$. Así, los autovalores son $\boxed{\lambda_1 = 2}$ y $\boxed{\lambda_2 = 8}$ (hemos llamado λ_1 al autovalor de A_0 con menor valor absoluto). Como hemos hecho otras veces, no es difícil calcular dos autovectores **ortogonales** y **unitarios** asociados a λ_1 y λ_2. Podemos tomar, por ejemplo, (se dejan los detalles para el lector):

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)}, \quad \boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)}.$$

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: Para obtener la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5), es decir,

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1), \end{array} \right.} \iff \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y), \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y). \end{array} \right.}$$

La ecuación de la cónica $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 4y = -1$ equivale a:

$$\frac{5}{2}(-x_1 + y_1)^2 + \frac{6}{2}(-x_1 + y_1)(x_1 + y_1) + \frac{5}{2}(x_1 + y_1)^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1) + \frac{4}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) = -1,$$

es decir,

$$2x_1^2 + 8y_1^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}y_1 + 1 = 0 \iff \boxed{2x_1^2 + 8\left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 0}.$$

De la última igualdad, deducimos que la cónica corresponde a un **punto**: $\boxed{C' = \left(0, \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}\right)}$.

3. Elementos: En este caso, el único elemento de la cónica corresponde al punto. Deshaciendo el cambio de variables, podemos deducir de qué punto de trata:

$$\boxed{C = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)}.$$

Terminamos el tema con el último ejemplo:

Ejemplo 7.37 (Ver Ejemplo 7.23.6)
Clasificar la cónica $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 4y = -2$ dando sus elementos (centro, vértices, focos, ejes, rectas directrices, ...).

Las matrices asociadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se tiene, $\boxed{\det A = 16}$ y $\boxed{\det A_0 = 16 > 0}$. Así, se trata de una cónica **elíptica no degenerada**. Determinemos el tipo de cónica que corresponde a la ecuación.

1. Diagonalización de A_0: La matriz A_0 coincide con la matriz del Ejemplo 7.37. Obtuvimos:

Conclusión: Podemos diagonalizar la matriz A_0 con la matriz diagonal y matriz de paso ortogonal siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = (v_1 \,|\, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ecuación reducida: Para obtener la ecuación de la cónica hacemos el cambio de variables dado en (7.5) (coincide con el ejemplo anterior), es decir,

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1), \end{cases}} \iff \boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y), \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y). \end{cases}}$$

Como en el ejemplo anterior, tras algunos cálculos, obtenemos que la ecuación de la cónica $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 4y = -2$ equivale a:

$$\boxed{2x_1^2 + 8\left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = -1}.$$

De la última igualdad, deducimos que la cónica corresponde a una **elipse imaginaria**.

3. Elementos: En este caso, no hay ningún elemento asociado.