Cálculo diferencial.

1. Determinar el dominio de definición de las funciones cuya expresión se indica:

(1.a) $f(x)=\sqrt{x+1}$

(1.b) $f(x)=\dfrac{\log(x)}{(3+2x)(x-5)}$

(1.c) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

(1.d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

2. Estudiar los puntos de continuidad y las discontinuidades de las funciones:

(2.a) $f(x)=\begin{cases}\log(x^5+1) & \text{si } x\geq 0\\ 2e^x-1 & \text{si } x<0\end{cases}$

(2.b) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}^2(x) & \text{si } x\geq \frac{\pi}{2}\\ (x+1)^2 & \text{si } x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$

(2.c) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(x) & \text{si } x\geq \frac{\pi}{2}\\ 1-\frac{\pi}{2}x+x^2 & \text{si } x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$

(2.d) $f(x)=\begin{cases}xe^{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x>1\\ x^2-x+1 & \text{si } x\leq 1\end{cases}$

3. Estudiar la existencia de los siguientes límites y calcularlos cuando existan:

(3.a) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$

(3.b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-2}$

(3.c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|^2+x}$

(3.d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(3.e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$

(3.f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log(e^{\frac{|x|}{x}})$

(3.g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(x)}{2\log(x)+4}$

(3.h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+2)^3}{|x-1|}$

(3.i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2}{2x^2-3x-1}$

(3.j) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2-5x+2}$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(4.a) $f(x)=\sqrt{1-2x^2}$

(4.b) $f(x)=\log(2x^2-4x+7)$

(4.c) $f(x)=\cos x\ \operatorname{sen} x$

(4.d) $f(x)=\dfrac{1+e^x}{e^x}$

(4.e) $f(x)=\log\left(\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{3+x}}\right)$

(4.f) $f(x)=\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{-x^4}{2}\right)$

(4.g) $f(x)=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{2-x^2}$

(4.h) $f(x)=\cos\left(\dfrac{5x+2}{1-x}\right)^2$

(4.i) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{x^2-2}{2}\right)$

(4.j) $f(x)=\sqrt{\pi-\operatorname{sen} x}$

(4.k) $f(x)=\dfrac{x-1}{2}\sqrt{x^2-1}$

(4.l) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

(4.m) $f(x)=e^{2-x^2}$

(4.n) $f(x)=\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$

(4.ñ) $f(x)=\operatorname{sen}(-x)\ \cos^2 x$

(4.o) $f(x)=5^{x-2x^3}$

(4.p) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

(4.q) $f(x)=\dfrac{\log(x^2+1)}{\cos 2x}$

5. Discute la derivabilidad de las siguientes funciones según los valores de $a,b\in\mathbb{R}$:

(5.a) $f(x)=\begin{cases}x^3-x & \text{si } x\geq 1\\ ax+b & \text{si } x<1\end{cases}$

(5.b) $f(x)=\begin{cases}ax^2-x+b & \text{si } x<1\\ x\log x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

(5.c) $f(x)=\begin{cases}a\ \operatorname{sen}\frac{x}{2}+b & \text{si } -\pi\leq x\leq 0\\ \dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} & \text{si } 0<x\leq\pi\end{cases}$

(5.d) $f(x)=\begin{cases}x\ \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{2}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$

6. Representar gráficamente las siguientes funciones estudiando su dominio de definición, asíntotas, monotonía, máximos y mínimos, concavidad/convexidad y puntos de inflexión:

(6.a) $y = \dfrac{-1}{1+e^{-x}}$

(6.b) $y = x^5 - 3x^2$

(6.c) $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$

(6.d) $y = \log(2x^2 + 4x + 1)$

(6.e) $y = \dfrac{e^x}{x-3}$

(6.f) $y = \dfrac{x^3}{(1+x)}$

(6.g) $y = x^2 e^x$

(6.h) $y = \dfrac{\log(x^2+1)}{x^2+1}$

(6.i) $y = \dfrac{e^{x-1}}{x}$

(6.j) $y = \dfrac{\log(3x)}{x}$, $x > 0$

(6.k) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$

7. Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$. Se pide:

   a) Determinar intervalos de crecimiento/decrecimiento de f. Calcular sus extremos.
   b) Determinar intervalos de convexidad/concavidad de f. Calcular los puntos de inflexión.
   c) Determinar los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, así como posibles asíntotas horizontales.

8. La desintegración del carbono 14, C14, sigue la ley $W(t) = W_0 e^{-\lambda t}$, con $t \geq 0$, siendo $W(t)$ la cantidad de C14 en el instante t, W_0 la cantidad inicial y $\lambda > 0$ la velocidad de desintegración. Supongamos que $W_0 = 2$ y $\lambda = 0{,}01$. Se pide:

   a) Comprobar que W es una función decreciente.
   b) ¿Qué le ocurre a la cantidad de C14 cuando pasa mucho tiempo?
   c) ¿En qué momento, t, es $W(t) = 1$?

9. Se considera la reacción química $A + B \longrightarrow AB$ en la que dos reactivos moleculares, A y B, dan lugar a otro producto molecular, AB. La velocidad de esta reacción, R, se puede expresar como la función $\boxed{R(x) = k(a-x)(b-x)}$, donde x es la concentración del producto AB, a y b son las concentraciones iniciales de A y B respectivamente, y k es una constante de proporcionalidad. Obsérvese que x varía en el intervalo $[0, \min(a,b)]$, ya que cuando se termina uno de los dos reactivos se detiene la reacción. Supongamos que $k = 2$, $a = 9$ y $b = 7$.

   a) ¿Para qué valores de la concentración, x, la velocidad es creciente? ¿y decreciente?
   b) ¿Para qué valores de la concentración, x, alcanza la velocidad el máximo? ¿Cuánto vale ese máximo?

10. La población de una especie sigue la siguiente función

$$P(t) = a + \frac{t+1}{e^{t/3}}, \quad t \geq 0,$$

donde $P(t)$ es el número de individuos de la población (medida en miles) y t el tiempo (medido en meses).

   a) Calcular a sabiendo que inicialmente había 3000 individuos.
   b) ¿En qué momento alcanza la población un máximo? ¿Cuánto es el valor de dicho máximo?
   c) ¿A qué tiende la población en el futuro?
   d) Esbozar la gráfica de la función.

11. Utilizando la parábola que mejor aproxima a la función dada $f(x)$ en el punto x_0 dado, calcular una aproximación de la función $f(x)$, del valor $f(a)$ y una acotación del error cometido, en los casos:

(11.a) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 0$, $a = 1'1$;

(11.b) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $a = 0'2$;

(11.c) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $a = 0'1$;

(11.d) $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$, $a = 0'1$.