Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Autovalores y autovectores.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcular:

   a) $2A + 3B - C$.

   b) $3C - B + \frac{1}{2}A$.

   c) Determinar D para que $A - B + C + D = 0$.

   d) La matriz traspuesta de A.

2. Realizar las siguientes operaciones de matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   c) $\left(2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   e) $(1, -1, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   g) $(3, 4, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   h) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (-1, 1)$

   i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$

   j) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2$

   k) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^3$

3. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. Calcular las inversas de las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

5. Resolver los siguientes sistemas lineales:

   a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$

6. Resolver los siguientes sistemas lineales:

$$a)\ \left\{\begin{array}{l} x-y-z=-1 \\ 2x+y-z=2 \\ -x+2y+z=2 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-z=1 \\ -x-2y+3z=0 \\ x-2y+2z=-1 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=-1 \\ -x+y+z=-2 \\ x+5y-z=-4 \end{array}\right.$$

7. Resolver los siguientes sistemas lineales:

$$a)\ \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x-3z=0 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y+3t=0 \\ 2y+z-t=1 \\ x+y+t=-1 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{l} -x+y-z=2 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x+y-3z=0 \end{array}\right.$$

8. Resolver los siguientes sistemas lineales:

$$a)\ \left\{\ x+y+z=1\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{l} 3x-y+z=-1 \\ 3y-z=-2 \\ -x-y-z=-1 \end{array}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=4 \\ 3x-y=6 \end{array}\right.$$

9. Calcular los autovalores y autovectores asociados a las siguientes matrices. Deducir si la matriz es diagonalizable y en caso afirmativo escribir la matriz diagonal y la matriz de paso asociada:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Dadas las matrices simétricas, calcular sus autovalores y autovectores asociados. Calcular la matriz diagonal asociada y una matriz de paso ortogonal.

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad c)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad e)\ A=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$