1. Escribir las siguientes matrices:

   a) $A = (a_{ij})_{3\times 4}$, $a_{ij} = i - j$.

   b) $B = (b_{ij})_{3\times 4}$, $b_{ij} = (-1)^{i+j}$.

   c) $C = (b_{ij})_{3\times 4}$, $c_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i \geq j, \\ -1 & \text{si } i < j. \end{cases}$

2. Realizar (si se puede) las siguientes operaciones:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. Calcular AB y BA en los dos casos siguientes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. El director de una residencia de ancianos espera cuatro ancianos para pasar las vacaciones. Estos necesitan tres tipos de medicamentos distintos. La matriz $A = (a_{ij})$ representa las necesidades diarias de dichos medicamentos (por ejemplo, en mg.), siendo $i = 1, 2, 3$ cada tipo y $j = 1, 2, 3, 4$ los ancianos. El vector $x = (x_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ representa el número de días que cada anciano va a permanecer en el asilo.

   a) Obtener las cantidades totales necesarias de cada producto si

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix},$$

   b) Si el coste de los medicamentos viene dado por el vector $(3, 2, 4)$, calcular el coste total de los tratamientos.

5. Comprobar que:

   a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -4, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 5.$

   b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -10, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 19, \quad \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} = -5.$

   c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -4, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 11 & 10 \\ 7 & 11 & 18 & 19 \end{pmatrix} = 0.$

6. Resolver la ecuación:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 4 & 6 \\ 4 & x & 12 \end{pmatrix} = 0.$$

7. Determinar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. Estudiar el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro λ:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

9. Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 2 \\ 2x + y + 3z & = & 1 \\ 3x + 2y + z & = & 6 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y + z + t & = & 1 \\ x + y + t & = & 1 \\ x + z + t & = & 1 \end{array} \right.$$

10. Utilizar el Método de Gauss para resolver los siguientes sistemas lineales:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 - 2x_2 & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{lcl} x + y & = & 1 \\ 2x - y + z & = & 2 \\ x + 2y - z + t & = & 3 \\ 2x - t & = & 3 \end{array} \right. \qquad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - y + 3z & = & 6 \\ 4x + 2y + 6z & = & 9 \\ x - y + z & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - y + z & = & 3 \\ 4x - 4y + 3z & = & 2 \\ 2x - 3y + 2z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{lcl} 3x + 5y - z & = & 10 \\ 2x - y + 3z & = & 9 \\ 4x + 2y - 3z & = & -1 \end{array} \right. \qquad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{lcl} x - 3y + z & = & 4 \\ x - 2y + 3z & = & 6 \\ 2x - 6y + 2z & = & 8 \end{array} \right.$$

11. Determinar los coeficientes a_i, $i = 1, 2 \ldots 7$ para la siguiente reacción química:

$$a_1\mathrm{H\,Cl} + a_2\mathrm{K\,Mn\,O_4} + a_3\mathrm{H_3\,As\,O_3} = a_4\mathrm{H_3\,As\,O_4} + a_5\mathrm{MnCl_2} + a_6\mathrm{K\,Cl} + a_7\mathrm{H_2\,O}$$

12. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. La correspondiente matriz de Leslie es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Interpretar el significado de los elementos de la matriz anterior.

13. Se considera una población de hembras dividida en tres clases de edad: un año de edad, dos años de edad y tres años de edad. Se sabe que las hembras de 1 año producen un promedio de 3 hembras, las de dos años de edad producen 7 hembras y las de 3 años de edad producen un promedio de 1.5 hembras. Además, se sabe que el 20 % de las hembras de edad 1 sobrevive hasta la edad 2 y el 40 % de las hembras de edad 2 sobreviven hasta la edad 3.

    a) Escribir la matriz de Leslie correspondiente.

b) Determinar la evolución de esta población durante dos siguientes periodos reproductivos, comenzando con 1000 hembras de edad 1.

14. Sea la matriz de Leslie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar el número de clases de edad de la población.

b) Determinar el porcentaje de hembras de 2 años de edad que sobreviven hasta el final del siguiente periodo reproductivo.

15. Tenemos una población de hembras dividida en tres clases de edad: un años de edad, dos años de edad y tres años de edad. Se sabe que el 20 % de las hembras de edad 1 y el 70 % de hembras de edad 2 sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva. Además, las hembras de edad 2 tienen un promedio de 1.6 crías hembra y que las hembras de edad 3 tienen un promedio de 1.7 crías hembra.

a) Escribir la matriz de Leslie correspondiente.

b) Determinar la distribución de edades en el instante 3, sabiendo que en el instante inicial la población consta de 2000 hembras de edad 1, 800 de edad 2 y 200 de edad 3.

16. Supongamos que la edad máxima de una población de hembras es 20 años y que esta población se divide en cuatro clases de edades iguales con intervalos de 5 años. La matriz de crecimiento de Leslie viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si inicialmente hay 100 individuos de la primera clase, 60 en la segunda, 20 en la tercera y 10 en la cuarta, determinar la evolución de la población dentro de 20 años.