EJERCICIO 1: Escribir las siguientes matrices:

a) $A = (a_{ij})_{3\times 4}$, $a_{ij} = i - j$.

b) $B = (b_{ij})_{3\times 4}$, $b_{ij} = (-1)^{i+j}$.

c) $C = (b_{ij})_{3\times 4}$, $c_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i \geq j, \\ -1 & \text{si } i < j. \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

EJERCICIO 2: Realizar (si se puede) las siguientes operaciones:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) No se puede ya que la matriz tiene 2 columnas y el vector tiene 3 filas.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ -x - 2y + z \\ y + 2z \end{pmatrix}$

EJERCICIO 3: Calcular AB y BA en los dos casos siguientes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2+2 & 0-1+4 \\ 2+2+0 & 0-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 1+0 & 2+0 \\ 6-2 & 2-1 & 4+0 \\ 3+4 & 1+2 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+3 \\ -1+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1+0 \\ 4-3 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 4: El director de una residencia de ancianos espera cuatro ancianos para pasar las vacaciones. Estos necesitan tres tipos de medicamentos distintos. La matriz $A = (a_{ij})$ representa las necesidades diarias de dichos medicamentos (por ejemplo, en mg.), siendo $i = 1, 2, 3$ cada tipo y $j = 1, 2, 3, 4$ los ancianos. El vector $x = (x_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ representa el número de días que cada anciano va a permanecer en el asilo.

a) Obtener las cantidades totales necesarias de cada producto si

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix},$$

b) Si el coste (en euros) de los medicamentos viene dado por el vector $(3, 2, 4)$, calcular el coste total de los tratamientos.

a) Las columnas de la matriz A representan las cantidades de cada medicamento que necesita diariamente cada anciano: el *anciano 1* necesita diariamente 20 mg. del medicamento 1, 0 mg. del medicamento 2 y 10 mg. del medicamento 3, etc.

El producto de la matriz A por el vector x dará como resultado un vector-columna de longitud 3 conteniendo las cantidades de cada medicamento que se necesitarán:

$$\begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \times 7 + 40 \times 14 + 30 \times 21 + 10 \times 28 \\ 10 \times 21 + 10 \times 28 \\ 10 \times 7 + 30 \times 21 + 50 \times 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1610 \\ 490 \\ 2100 \end{pmatrix}$$

es decir, se necesitarán 1600 mg. del medicamento 1, 490 mg. del medicamento 2 y 2100 mg. del medicamento 3.

b) El coste total de estos medicamentos se obtiene multiplicando cada cantidad por el precio unitario y sumando todas estas cantidades:

$$1600\,\text{mg.} \times 3\,€ + 490\,\text{mg.} \times 2\,€ + 2100\,\text{mg.} \times 4\,€ = 14.180\,€$$

Esto es equivalente al siguiente producto matricial: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1610 \\ 490 \\ 2100 \end{pmatrix} = 14.180.$

EJERCICIO 5: Comprobar que:

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -4, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 5.$

b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -10, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 19, \quad \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} = -5.$

c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -4, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 11 & 10 \\ 7 & 11 & 18 & 19 \end{pmatrix} = 0.$

EJERCICIO 6: Resolver la ecuación:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 4 & 6 \\ 4 & x & 12 \end{pmatrix} = 0.$$

Para obtener la expresión estándar de esta ecuación hay que "calcular" el determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 4 & 6 \\ 4 & x & 12 \end{pmatrix} = 48 + 48 + 3\,x^2 - (48 + 24\,x + 6\,x) = 3\,x^2 - 30\,x + 48$$

Luego la ecuación a resolver es $3\,x^2 - 30\,x + 48 = 0$ y sus soluciones son

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 576}}{6} = \frac{30 \pm 18}{6} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

EJERCICIO 7: Determinar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz 3×5, luego se tendrá $\text{rango}\,(A) \leq 3$.

Se tiene $\text{rango}\,(A) \geq 2$, ya que, por ejemplo, el menor de orden 2 $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$

También se tiene $\det\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 7 & -1 & 0 \end{array}\right) = -6 - 21 = -27 \neq 0,$ luego $\text{rango}\,(A) = 3$.

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz 4×4, luego se tendrá $2 \leq \text{rango}\,(A) \leq 4$, ya que, por ejemplo, $\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = -6 - 2 = -8 \neq 0$.

Buscamos ahora un menor no nulo de orden tres: $\det\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -4 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = 1 - 4 = -3 \neq 0$, luego $3 \leq \text{rango}\,(A) \leq 4$.

Por último, comprobamos si $\det(B) \neq 0$, desarrollando por los elementos de la fila 3:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -24-34 = -58 \neq 0,$$

luego, finalmente, se tiene $\operatorname{rango}(A) = 4$.

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz 3×4 luego $1 \leq \operatorname{rango}(A) \leq 3$.

$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = 18 \neq 0$, luego $2 \leq \operatorname{rango}(A) \leq 3$.

$\det \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ \hline 0 & -3 & -1 \end{array}\right) = 24 \neq 0$, luego se tiene $\operatorname{rango}(A) = 3$.

EJERCICIO 8: Estudiar el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro λ:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Para estudiar el rango de la matriz A, comenzamos por calcular su determinante y ver los valores que toma, en función del valor de λ:

$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1) \neq 0$, si y sólo si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. Luego, en estos dos casos $(\lambda \neq 0, 1)$, el rango de la matriz A es 3.

Si $\lambda = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene un menor no nulo de orden 2: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$, luego $\operatorname{rango}(A) = 2$.

Si $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que también tiene un menor no nulo de orden 2: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, luego $\operatorname{rango}(A) = 2$.

En resumen:

$$\operatorname{rango}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = 1 \\ 3 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

b) $\det(B) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$, y esta expresión (polinomio en la variable λ) sólo se anula para dos valores de λ: para $\lambda = 1$ y para $\lambda = -1$. En consecuencia, salvo para esos dos valores, $\det(B) \neq 0$.

Si $\lambda = 1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1 ya que todos los menores de orden 2 que se pueden formar a partir de ella son iguales a $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Si $\lambda = -1$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2 ya que, por ejemplo, $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

En resumen se tiene, para la matriz B:

$$\text{rango}\,(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 1 \\ 2 & \text{si } \lambda = -1 \\ 3 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

EJERCICIO 9: Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 2 \\ 2x + y + 3z & = & 1 \\ 3x + 2y + z & = & 6 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \end{array} \right.$ (c) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y + z + t & = & 1 \\ x + y + t & = & 1 \\ x + z + t & = & 1 \end{array} \right.$

(a) En primer lugar escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

de modo que la matriz del sistema y la matriz ampliada son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Se tiene que $\det(A) = 12 \neq 0$, luego $\text{rango}\,(A) = 3$. Por lo tanto, al tratarse de un sistema lineal de dimensión 3 con matriz cuadrada con determinante no nulo, el sistema tiene **solución única**: el sistema es **compatible determinado**.

(b) Ahora se tiene

$$Ax = b, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\det(A) = -4 \neq 0$, luego el sistema es, también, compatible determinado, es decir, posee una única solución.

(c) En este caso el sistema se escribe, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y se tiene, desarrollando por la primera columna,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

luego, también en este caso, el sistema es compatible determinado.

EJERCICIO 10: Utilizar el Método de Gauss para resolver los siguientes sistemas lineales:

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 & = & 1 \\ 2x_1-x_2+x_3 & = & 2 \\ x_1-2x_2 & = & 1 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ 2x-y+z & = & 2 \\ x+2y-z+t & = & 3 \\ 2x-t & = & 3 \end{array}\right.$ (c) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+3z & = & 6 \\ 4x+2y+6z & = & 9 \\ x-y+z & = & 3 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & 3 \\ 4x-4y+3z & = & 2 \\ 2x-3y+2z & = & 1 \end{array}\right.$ (e) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y-z & = & 10 \\ 2x-y+3z & = & 9 \\ 4x+2y-3z & = & -1 \end{array}\right.$ (f) $\left\{\begin{array}{rcl} x-3y+z & = & 4 \\ x-2y+3z & = & 6 \\ 2x-6y+2z & = & 8 \end{array}\right.$

(a) $[A|b] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2\to 2F_1-F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3-F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\underset{F_3\to F_3+F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, que ya corresponde a un sistema con matriz triangular:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 3y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

La última ecuación $(0 = 0)$ se verifica siempre, independientemente del valor que tome z. Esto significa que z puede tomar cualquier valor; pongamos $z = \alpha \in \mathbb{R}$. Por tanto el sistema es **compatible indeterminado**.

Fijado el valor de $z = \alpha$, de la segunda ecuación se tiene $y = -z/3 = -\alpha/3$.

Y, por último, de la primera ecuación, $x = 1 - y - z = 1 + \dfrac{\alpha}{3} - \alpha = 1 - \dfrac{2}{3}\alpha$.

Así pues, este sistema tiene infinitas soluciones, una para cada valor que demos a α en

$$x = 1 - \frac{2}{3}\alpha, \quad y = -\frac{\alpha}{3}, \quad z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) $[A|b] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to 2F_1-F_2 \\ F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to 2F_1-F_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3\to 3F_3-F_2 \\ F_4\to 3F_4-2F_2}}{\longrightarrow}$

$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \underset{F_4\to F_3+F_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$

El sistema triangular correspondiente es:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & & & & & = & 1 \\ & & 3y & - & z & & & = & 0 \\ & & & - & 2z & + & 3t & = & 6 \\ & & & & & & 6t & = & 3 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{|l} \uparrow \; x = 1 - y = 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4} \\ y = (\dfrac{1}{3})z = -\dfrac{3}{4} \\ z = (-\dfrac{1}{2})(6-3t) = -\dfrac{9}{4} \\ z = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

El sistema tiene, por tanto, una única solución que es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ -3/4 \\ -9/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) $[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to 2F_3 - F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_2 + 4F_3}{\longrightarrow}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array}\right)$, que, escrito en forma de sistema es:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 6 \\ & & 4y & & & = & -3 \\ & & & - & 4z & = & -3 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{|l} \uparrow \; x = \dfrac{1}{2}(6 + y - 3z) = \dfrac{1}{2}(6 - \dfrac{3}{4} - \dfrac{9}{4}) = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

Luego la (única) solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$,

donde ya se ve que el sistema es incompatible, ya que las dos últimas ecuaciones son:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2y + z & = & -4 \\ -2y + z & = & -2 \end{array}\right.$$

(e) $[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to 3F_3 - 4F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & -13 & 11 & 7 \\ 0 & -14 & -5 & -43 \end{array}\right) \underset{F_3 \to 13F_3 - 14F_2}{\longrightarrow}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & -13 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & -219 & -657 \end{array}\right), \text{ que, escrito en forma de sistema es:}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & z & = & 10 \\ & - & 13y & + & 11z & = & 7 \\ & & & - & 219z & = & -657 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}(10 - 5y + z) = \frac{1}{3}(10 - 10 + 3) = 1 \\ y = -\frac{1}{13}(7 - 11z) = -\frac{1}{13}(7 - 33) = \frac{26}{13} = 2 \\ z = \frac{-657}{-219} = 3 \end{array}\right.\Bigg\uparrow$$

Luego la (única) solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(f) $[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -6 & 2 & 8 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, que ya está en forma triangular.

El sistema es por tanto compatible indeterminado, siendo sus soluciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 + 3y - z = 4 + 6(1-\alpha) - \alpha = 10 - 7\alpha \\ y = 2 - 2z = 2(1-\alpha) \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \text{ cualquiera} \end{array}\right.\Bigg\uparrow$$

EJERCICIO 11:
Determinar los coeficientes a_i, $i = 1, 2 \ldots 7$ para la siguiente reacción química:

$$a_1 \mathrm{H\,Cl} + a_2 \mathrm{K\,Mn\,O_4} + a_3 \mathrm{H_3\,As\,O_3} = a_4 \mathrm{H_3\,As\,O_4} + a_5 \mathrm{MnCl_2} + a_6 \mathrm{K\,Cl} + a_7 \mathrm{H_2\,O}$$

El número de átomos de cada elemento debe ser el mismo en cada lado de la igualdad, luego:

$$(\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{H} & : a_1 + 3a_3 = 3a_4 + 2a_7 \\ \mathrm{Cl} & : a_1 = 2a_5 + a_6 \\ \mathrm{K} & : a_2 = a_6 \\ \mathrm{Mn} & : a_2 = a_5 \\ \mathrm{O} & : 4a_2 + 3a_3 = 4a_4 + a_7 \\ \mathrm{As} & : a_3 = a_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{H} & : a_1 + 3a_3 - 3a_4 - 2a_7 = 0 \\ \mathrm{Cl} & : a_1 - 2a_5 - a_6 = 0 \\ \mathrm{K} & : a_2 - a_6 = 0 \\ \mathrm{Mn} & : a_2 - a_5 = 0 \\ \mathrm{O} & : 4a_2 + 3a_3 - 4a_4 - a_7 = 0 \\ \mathrm{As} & : a_3 - a_4 = 0 \end{array}\right.$$

Puesto que tres de las incógnitas se encuentran trivialmente a partir de las otras ($a_6 = a_5 = a_2$ y $a_4 = a_3$), podemos sustituirlas y reducir el sistema a uno con 4 incógnitas y 3 ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{H} & : a_1 + 3a_3 - 3a_3 - 2a_7 \equiv a_1 - 2a_7 = 0 \\ \mathrm{Cl} & : a_1 - 2a_2 - a_2 \equiv a_1 - 3a_2 = 0 \\ \mathrm{O} & : 4a_2 + 3a_3 - 4a_3 - a_7 \equiv 4a_2 - a_3 - a_7 = 0 \end{array}\right.$$

que, en forma matricial se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular su solución (si existe) por el método de Gauss:

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 \to 4F_2 + 3F_3}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} a_1 & & & -2a_7 = 0 \\ & -3a_2 & & +2a_7 = 0 \\ & & -3a_3 & +5a_7 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2\,a_7 \\ a_2 = \dfrac{2}{3}\,a_7 \\ a_3 = \dfrac{5}{3}\,a_7 \end{array} \right. \uparrow$$

Es decir, a_7 puede tomar cualquier valor, pongamos $a_7 = t \in \mathbb{R}$, y todas las demás incógnitas vienen dadas en función de t. Son, por lo tanto soluciones del sistema global (S) todas las de la forma

$$a_1 = 2\,t, \quad a_2 = \frac{2}{3}\,t, \quad a_3 = \frac{5}{3}\,t, \quad a_4 = \frac{5}{3}\,t, \quad a_5 = \frac{2}{3}\,t, \quad a_6 = \frac{2}{3}\,t, \quad a_7 = t, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Ahora bien, en la ecuación de la reacción química se necesita que los coeficientes sean números enteros, ya que representan el número de moléculas de los diferentes reactivos. Por lo tanto, habrá que elegir el valor de t adecuado que haga que todos los a_i sean enteros, que, claramente, es $t = 3$:

Así pues, la solución del ejercicio es:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 5, \quad a_5 = 2, \quad a_6 = 2, \quad a_7 = 3.$$

EJERCICIO 12: La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. La correspondiente matriz de Leslie es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Interpretar el significado de los elementos de la matriz anterior.

Ponemos:

$$J_t = \text{número de jóvenes de la población en el tiempo } t,$$

$$A_t = \text{número de adultos de la población en el tiempo } t.$$

El modelo de Leslie se escribe, en este caso:

$$\begin{pmatrix} J_{t+1} \\ A_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_t \\ A_t \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_{t+1} = 3\,A_t \\ A_{t+1} = \dfrac{1}{2}\,J_t + \dfrac{1}{4}\,A_t \end{array} \right.$$

Supongamos, para más claridad, que el tiempo se mide en años. La primera ecuación indica que el número de individuos jóvenes en un año determinado es proporcional al número de individuos adultos del año anterior, concretamente igual a 3 veces dicho número. Esto significa que, de media, cada adulto tiene 3 hijos. Como sólo tienen hijos las hembras, y suponiendo que la mitad de la población son hembras, esto significa, en realidad que cada hembra tiene, de media, 6 hijos.

Por otro lado, la segunda ecuación indica que el número de adultos en un año determinado tiene dos orígenes: por un lado, la mitad de los jóvenes del año anterior sobreviven y alcanzan la edad adulta. Por otro lado, 1/4 de los adultos del año anterior sobreviven un año más.

`EJERCICIO 13:` Se considera una población de hembras dividida en tres clases de edad: un año de edad, dos años de edad y tres años de edad. Se sabe que las hembras de 1 año producen un promedio de 3 hembras, las de dos años de edad producen 7 hembras y las de 3 años de edad producen un promedio de 1.5 hembras. Además, se sabe que el 20 % de las hembras de edad 1 sobrevive hasta la edad 2 y el 40 % de las hembras de edad 2 sobreviven hasta la edad 3.

1. Escribir la matriz de Leslie correspondiente.
2. Determinar la evolución de esta población durante dos siguientes periodos reproductivos, comenzando con 1000 hembras de edad 1.

1. Denotemos:

$$\begin{aligned} A_t &= \text{número de hembras de 1 año de edad,} \\ B_t &= \text{número de hembras de 2 años de edad,} \\ C_t &= \text{número de hembras de 3 años de edad.} \end{aligned}$$

   Las relaciones entre las tres poblaciones en un año y el siguiente se pueden expresar:

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= 3A_t + 7B_t + 1.5C_t \\ B_{t+1} &= 0.20A_t \\ C_{t+1} &= 0.40B_t \end{aligned}$$

   Al escribirlo en forma matricial se obtiene la matriz de Leslie:

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \\ C_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1.5 \\ 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \\ C_t \end{pmatrix}$$

2. Comenzando con la población inicial $A_0 = 1000$, $B_0 = 0$, $C_0 = 0$, y calculando, mediante la relación anterior, los valores para $t = 0, 1, 2$ y 3, se obtiene:

Tiempo	Edad 1	Edad 2	Edad 3
t	A_t	B_t	C_t
0	1000	0	0
1	3000	200	0
2	10400	600	80
3	35520	2080	240

EJERCICIO 14: Sea la matriz de Leslie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar el número de clases de edad de la población.
2. Determinar el porcentaje de hembras de 2 años de edad que sobreviven hasta el final del siguiente periodo reproductivo.

1. Este modelo corresponde a una población dividida en tres clases de edad: Edad 1 (A_t), Edad 2 (B_t) y Edad 3 (C_t).

   Las ecuaciones del modelo se escriben:

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \\ C_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0.8 & 0 & \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \\ C_t \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} A_{t+1} = 5B_t \\ B_{t+1} = 0.8A_t \\ C_{t+1} = 0.3B_t \end{array}$$

2. Claramente, el porcentaje de individuos de edad 2 (B_t) que sobreviven y pasan a la edad 3 (C_t) es el 30 % ($C_{t+1} = 0.3B_t = \dfrac{30}{100} B_t$).

EJERCICIO 15: Tenemos una población de hembras dividida en tres clases de edad: un año de edad, dos años de edad y tres años de edad. Se sabe que el 20 % de las hembras de edad 1 y el 70 % de hembras de edad 2 sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva. Además, las hembras de edad 2 tienen un promedio de 1.6 crías hembra y que las hembras de edad 3 tienen un promedio de 1.7 crías hembra.

(a) Escribir la matriz de Leslie correspondiente.

(b) Determinar la distribución de edades en el instante 3, sabiendo que en el instante inicial la población consta de 2000 hembras de edad 1, 800 de edad 2 y 200 de edad 3.

Denotemos por:

$$\begin{aligned} A_t &= \text{número de hembras de 1 año de edad,} \\ B_t &= \text{número de hembras de 2 años de edad,} \\ C_t &= \text{número de hembras de 3 años de edad.} \end{aligned}$$

(a) Las relaciones entre las tres poblaciones en un año y el siguiente se pueden expresar:

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= 1.6B_t + 1.7C_t \\ B_{t+1} &= 0.20A_t \\ C_{t+1} &= 0.70B_t \end{aligned}$$

Escribiendo estas ecuaciones en forma matricial se obtiene la matriz de Leslie:

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \\ C_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 & 1.7 \\ 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.70 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \\ C_t \end{pmatrix}.$$

(b) Para determinar la distribución en edades de la población en el instante $t = 3$, construimos una tabla, a partir de las ecuaciones anteriores, es decir, calculando:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 800 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 & 1.7 \\ 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.70 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 800 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1620 \\ 400 \\ 560 \end{pmatrix}, \dots$$

Tiempo	Edad 1	Edad 2	Edad 3
t	A_t	B_t	C_t
0	2000	800	200
1	1620	400	560
2	1592	324	280
3	994	318	226

Indicación: para calcular la distribución de la población en el instante $t = 3$ también se puede usar la fórmula:

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.238 & 0.512 & 0.544 \\ 0.064 & 0.238 & 0 \\ 0 & 0.224 & 0.238 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

siendo M la matriz de Leslie.

EJERCICIO 16: Supongamos que la edad máxima de una población de hembras es 20 años y que esta población se divide en cuatro clases de edad con intervalos de 5 años. La matriz de Leslie viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si inicialmente hay 100 individuos de la primera clase, 60 en la segunda, 20 en la tercera y 10 en la cuarta, determinar la evolución de la población dentro de 20 años.

Denotemos por:

A_t = número de hembras de entre 1 y 5 años de edad,
B_t = número de hembras de entre 6 y 10 años de edad,
C_t = número de hembras de entre 11 y 15 años de edad,
D_t = número de hembras de entre 16 y 20 años de edad.

La tabla con la evolución de la población es:

Tiempo	Edad 1	Edad 2	Edad 3	Edad 4
Años	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20
t	A_t	B_t	C_t	D_t
0	100	60	20	10
1-5	140	25	30	2
6-10	119	35	12	3
11-15	77	29	17	1
16-20	82	19	14	1
21-25	63	20	9	1