Tema 1

Sistemas lineales de ecuaciones

1.1 Matrices

Una **matriz** es un conjunto de números colocados en una determinada disposición, ordenados en filas y columnas. Las líneas horizontales de una matriz se denominan **filas** y las líneas verticales se denominan **columnas**. Cuando una matriz contiene m filas y n columnas se dice que es de **orden** $m \times n$. Los elementos de una matriz se suelen encerrar entre paréntesis o corchetes rectos.

EJEMPLO:
El siguientes matrices son respectivamente de orden 3×3, 3×2, 3×4 y 2×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 5 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 22 \\ 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz cuadrada** es la que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir de orden $n \times n$ o simplemente de orden n.
- **Matriz diagonal** es una matriz cuadrada cuyos elementos son todos nulos salvo los de la diagonal principal, es decir la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha.
- **Vector fila** es una matriz de una sola fila y varias columnas. Por ejemplo, una matriz $1 \times n$ es un vector fila de longitud n.
- **Vector columna** es una matriz de varias filas y una sola columna. Por ejemplo, una matriz $n \times 1$ es un vector columna de longitud n.
- **Matriz triangular inferior** (resp. **superior**) es una matriz cuadrada cuyos elementos por encima (resp. debajo) de la diagonal principal son todos nulos.

EJEMPLO:
Las siguientes matrices son respectivamente vector fila, vector columna, matriz triangular superior, matriz triangular inferior y matriz diagonal:

$$(1, 0, 3, 4), \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera general, una matriz de m filas y n columnas se representa, en abstracto, de la forma siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ o bien } A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Obsérvese que el primer subíndice de cada elemento representa el número de la fila y el segundo el número de la columna a la que pertenece dicho elemento. Así a_{ij} es el elemento que está en la intersección de la fila i con la columna j.

1.2 Operaciones con matrices

Las siguientes operaciones tienen sentido entre matrices:

- **Sumar y restar matrices.** Sean A y B dos matrices del mismo orden, $m \times n$. La suma $A + B$ es otra matriz de orden $m \times n$ cuyos elementos son la suma de los elementos homólogos de las matrices a sumar. La resta $A - B$ se define de forma análoga.

  EJEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+5 & 2+0 \\ 1+1 & 0+6 & 0+4 \\ 2+0 & 1+5 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

- **Producto de una matriz por un escalar.** Dada una matriz A de orden $m \times n$ y un número c, el producto cA es una nueva matriz $m \times n$ que se calcula multiplicando cada elemento de A por el número c.

  EJEMPLO:

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 8 & 2 \times -3 \\ 2 \times 4 & 2 \times -2 & 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

- **Producto de una matriz por un vector columna.** Para poder hacer esta multiplicación, el número de columnas de la matriz ha de ser igual al número de filas del vector columna, es decir dada una matriz A de orden $m \times n$ y un vector columna b de longitud n , el producto $A\,b$ es un nuevo **vector columna**, de longitud m, que se calcula como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix}$$

EJEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\times 5 + 1\times 0 + 3\times 2 \\ 4\times 5 + 0\times 0 + -1\times 2 \\ 3\times 5 + 6\times 0 + 4\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

- **Producto de matrices.** El producto de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times k$, entonces su producto matricial AB es la matriz $m \times k$ (m filas, k columnas) dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{pk} \\ \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{pk} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0\times 5 + 1\times 0 + 3\times 2 & 0\times 1 + 1\times 1 + 3\times 0 \\ 4\times 5 + 0\times 0 + -1\times 2 & 4\times 1 + 0\times 1 + (-1)\times 0 \\ 3\times 5 + 6\times 0 + 4\times 2 & 3\times 1 + 6\times 1 + 4\times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 18 & 4 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En el producto matricial, el orden es fundamental: puede tener sentido el producto AB y no tenerlo el producto BA, como en el ejemplo anterior. Pero, incluso en el caso de matrices cuadradas del mismo orden, en que tienen sentido ambos productos (AB y BA), en general el resultado no es el mismo. Es decir, **el producto matricial no es conmutativo**:

$$AB \neq BA.$$

EJEMPLO:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.3 Determinante de una matriz cuadrada

Si una matriz A es cuadrada de orden n, es decir con n filas y n columnas, su determinante es **un número**, que se denota como $\det(A)$. El procedimiento para calcular el determinante de una matriz es fácil si $n \leq 3$, y mucho más complicado en los casos en que $n \geq 4$.

- Determinante de orden 1:
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}\,.$$
- Determinante de orden 2:
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$
- Determinante de orden 3:
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}\,.$$
- Determinante de orden $\geq$4: se puede utilizar el procedimiento de **desarrollo por los elementos de una fila o columna**, que reduce el cálculo de un determinante de orden n al cálculo de, como máximo, n determinantes de orden $n-1$.

  En el caso $n = 4$ este procedimiento es el siguiente: se elige una fila o columna cualquiera, se multiplica cada uno de sus elementos, a_{ij}, por el determinante (de orden 3) de la matriz que se obtiene eliminando de la matriz original la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se suman todos estos factores.

  Por ejemplo, el cálculo del determinate de orden 4 desarrollando por los elementos de la primera fila es:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} =$$

$$a_{11}(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} + a_{14}(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

A la vista de este procedimiento, es obvio que interesa elegir aquélla fila o columna de la matriz que contenga más ceros, ya que así se reduce el número de determinantes de orden 3 que es preciso calcular.

`EJEMPLO:`
Desarrollando por la segunda columna, se tiene

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} &= 2(-1)^3\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} + 2(-1)^5\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\
&= -2(45-2+0-36-0-5) - 2(5-3+0-6+2-0) \\
&= -2(45-43) - 2(-2) = -4+4 = 0.
\end{aligned}$$

El desarrollo por los elementos de una fila o columna es válido para determinantes de cualquier orden (superior o inferior a cuatro).

`EJEMPLO:`

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= 2\det\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2\times 7 + 3\times 16 + (-22) = 40.
\end{aligned}$$

1.4 Menor de orden k

Se llama menor de orden k de una matriz de orden $n \geq k$ al determinante de cualquier matriz que se puede formar con la intersección de k filas y k columnas de dicha matriz.

EJEMPLO:
Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Son menores de orden 2: $\det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, etc.
- Son menores de orden 3: $\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, etc.

1.5 Rango de una matriz

El **rango** de una matriz es el **mayor orden** de todos sus menores distintos de cero. Por tanto, el rango de una matriz no puede ser mayor que el número de sus filas ni mayor que el número de sus columnas. Las matrices nulas, esto es, con todos sus elementos iguales a cero, tienen rango cero. Todas las demás tienen rango mayor o igual que 1.

Para calcular el rango de una matriz cualquiera se puede usar el procedimiento siguiente:

- Si la matriz no es nula, el rango es, como mínimo 1.
- Se busca un menor de orden 2 distinto de cero. Si no se encuentra, entonces el rango es $= 1$ y se ha terminado el proceso. Si se encuentra, entonces el rango es ≥ 2.
- Se añade al menor de orden 2 no nulo encontrado una de las filas, i, que no contiene y, sucesivamente, cada una de las columnas que en él no figuran. Se obtienen así menores de orden 3. Si todos estos menores son nulos, se repite este proceso con otra fila.
- Si con este procedimiento no se encuentra ningún menor no nulo de orden 3, se tendrá que el rango de la matriz es 2 y se termina el proceso.
- Si se encuentra algún menor no nulo de orden 3, esto significa que el rango de la matriz es ≥ 3. Entonces habrá que repetir el proceso anterior buscando menores no nulos de orden 4, etc.

EJEMPLO:
Cálculo del rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Buscar un menor no nulo de orden 2: $\det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \implies$ $\text{rango}\,(A) \geq 2$.
- Considerar menores de orden 3:

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} = (-1+6) + 5(2-3) = 5 - 5 = 0 \implies \text{rango}\,(A) \geq 2.$$

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} = -2(-6+5) - (3-1) = 2 - 2 = 0 \implies \text{rango}\,(A) = 2.$$

EJEMPLO:
Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Menor de orden 2: $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{rango}\,(A) \geq 2$.
- Menor de orden 3: $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -2 - 2(9-1) = -18 \neq 0 \implies \text{rango}\,(A) \geq 3$.
- Menor de orden 4: $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 0 \implies \text{rango}\,(A) = 3$.

1.6 Sistemas lineales

Una ecuación lineal (sistema de orden 1) es de la forma:

$$ax = b,$$

donde a y b son números dados y x es la **incógnita** a determinar.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que comparten las mismas incógnitas.

Un sistema de ecuaciones de orden 2 es de la forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax + by & = & c \\ dx + ey & = & f, \end{array}\right.$$

donde a, b, c, d, e, f son números dados y x e y son las incógnitas.

EJEMPLO:

$$2x = 5 \quad \text{(orden 1)}, \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 4x - 2y & = & 5 \end{array}\right. \quad \text{(orden 2)}, \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ x_1 + 4x_3 & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{(orden 3)}.$$

Cuando hay más de 3 o 4 ecuaciones y/o incógnitas, se suele utilizar una notación con subíndices para designar tanto las incógnitas como los coeficientes. Así, un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas se representa, de forma general:

$$\left\{\begin{array}{lclclclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \dots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Este sistema se puede escribir de forma equivalente utilizando notación matricial, que es, en general, más fácil de escribir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

Llamando A a la matriz $m \times n$ de los coeficientes del sistema, x al vector columna de longitud n de las incógnitas y b al vector columna de longitud m del segundo miembro, el sistema de ecuaciones anterior se puede finalmente escribir en la forma más resumida:

$$Ax = b. \tag{1.2}$$

Una **solución** del sistema (1.1) es un conjunto de n valores (ordenados) tales que, al sustituir las incógnitas por estos valores, las ecuaciones se convierten en identidades. Colocando estos valores en forma de vector columna, x de longitud n, se tiene, obviamente, una solución del sistema escrito en forma matricial (1.2). Por ello se suele hablar de **vector solución**, tanto de (1.1) como de (1.2).

Los sistemas lineales no siempre tienen solución. Si un sistema no tiene solución, se dice que es **incompatible**.

EJEMPLO:
El siguiente sistema es incompatible (no tiene solución):

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2. \end{array} \right.$$

Si un sistema lineal tiene alguna solución, se dice que es **compatible**. En este caso, la solución no tiene porqué ser única.

EJEMPLOS:

- El siguiente sistema tiene una única solución:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- El siguiente sistema tiene infinitas soluciones:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 2 \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

De hecho, en relación con el número de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones, **sólo pueden darse los tres casos siguientes**:

1. **No tener ninguna solución:** se dice que el sistema es **incompatible**.
2. **Tener una única solución:** el sistema es **compatible determinado**.
3. **Tener infinitas soluciones:** el sistema es **compatible indeterminado**.

El resultado fundamental para determinar si un sistema es compatible o no, es el siguiente teorema, que se basa en el análisis del rango de la matriz del sistema A y de su matriz ampliada, $[A|b]$, que se forma añadiendo a la matriz A, por la derecha, una columna igual al vector b del segundo miembro.

Teorema 1.1 (Rouché-Fröbenius)

1. *Un sistema de m ecuaciones y de n incógnitas tiene solución (es compatible) si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada:* $\text{rango}(A) = \text{rango}([A|b])$.

2. *Suponiendo que* $\text{rango}(A) = \text{rango}([A|b]) = r$ *se tiene que:*

   - *Si $r = n$, es decir si el rango anterior es igual al número de incógnitas, entonces el sistema tiene una única solución.*
   - *Si $r < n$, es decir si el rango es menor que el número de incógnitas, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*

EJEMPLOS: Aplicación del Teorema de Rouché-Fröbenius.

1. Para el sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array} \right.$ se tiene:

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{rango}\,(A) = 1, \quad \text{rango}\,([A|b]) = 2,$$

   luego el sistema es incompatible.

2. Para el sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array} \right.$,

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{rango}\,(A) = 2, \quad \text{rango}\,([A|b]) = 2,$$

   luego el sistema es compatible determinado, ya que el número de incógnitas es, también, igual a 2.

3. Para el sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \end{array} \right.$,

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad [A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{rango}\,(A) = 1, \quad \text{rango}\,([A|b]) = 1,$$

   luego el sistema es compatible ya que coinciden ambos rangos, pero es indeterminado porque el número de incógnitas es igual a 2 (mayor que el rango).

1.7 Resolución de sistemas lineales de matriz cuadrada

En el caso particular en que un sistema lineal tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, la matriz del sistema es cuadrada,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

y del Teorema de Rouché-Fröbenius se deduce que:

> Un sistema de matriz cuadrada es compatible determinado $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Los métodos de reducción, sustitución e igualación que se estudian en la enseñanza secundaria están diseñados principalmente para sistemas de pocas ecuaciones e incógnitas (2 ó 3). Por otra parte, la conocida *regla de Cramer* proporciona fórmulas para las soluciones de sistemas compatibles determinados: si en (1.3), la matriz A es tal que $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema posee una única solución, que es el vector columna x de componentes:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde A_i es la matriz obtenida a partir de A reemplazando su i-ésima columna por el vector b.

En la práctica, es necesario resolver sistemas lineales con un número elevado de ecuaciones e incógnitas y la resolución de tales sistemas por la regla de Cramer es inviable, incluso para un ordenador, a causa de la enorme cantidad de operaciones que exige: aproximadamente $2(n+1)!$ Por ejemplo, con un ordenador capaz de realizar 10^9 operaciones por segundo, se necesitarían en torno a 12 horas para resolver un sistema de dimensión $n = 15$ (aprox. 4×10^{13} operaciones) por este método, y en torno a 3240 años para un sistema de dimensión $n = 20$ (aprox. 10^{20} operaciones).

Más adecuados para la resolución de sistemas lineales son los métodos basados en la construcción de un **sistema equivalente** al dado, es decir, con la misma solución (ver la Sección 1.7.2), pero que sea más fácil de resolver, concretamente que tenga una **matriz triangular** (ver la Sección 1.7.1). Estos métodos, en general, requieren del orden de $2n^3/3$ operaciones para resolver el sistema lineal (1.3), es decir aprox. 2250 operaciones para $n = 15$ y 5300 para $n = 20$.

Existen muchos otros métodos de resolución de sistemas lineales, que están especialmente adaptados a la estructura particular de la matriz del sistema, cuya descripción se escapa del objetivo de estos apuntes.

A continuación presentamos el método más sencillo e intuitivo para resolver sistemas lineales con matriz triangular.

1.7.1 Resolución de sistemas triangulares

Cuando la matriz del sistema lineal (1.3) es triangular inferior (resp. superior) dicho sistema se puede resolver fácilmente, ya que las incógnitas se pueden ir despejando de una en una y sustituyendo en las demás ecuaciones, como se muestra en el siguiente ejemplo de dimensión 3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

que se escribe en forma desarrollada:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\,. \end{cases}$$

Este sistema tendrá solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$, y puesto que, en este caso, $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$, el sistema tiene solución si y sólo si $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, 3$.

Suponiendo, pues, que éste es el caso, una simple inspección del sistema muestra que se pueden calcular las incógnitas de forma sucesiva, comenzando por x_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1/a_{11}\,, \\ x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}\,, \\ x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}\,. \end{aligned}$$

Este procedimiento se denomina **algoritmo de bajada**, ya que las incógnitas se van obteniendo por recurrencia, desde arriba hacia abajo.

En general, un sistema de dimensión $n \times n$ con matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

tiene solución si y sólo si todos sus elementos diagonales son no nulos y el algoritmo de bajada se traduce en lo siguiente:

`ALGORITMO DE BAJADA:`

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}}\,, \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - (a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \dots + a_{i(i-1)}\,x_{(i-1)})\right) = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j\right), \\ &\quad \text{para } i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Para un sistema lineal con matriz triangular superior se puede utilizar un procedimiento análogo, pero comenzando desde abajo hacia arriba, por lo cual se denomina **algoritmo de subida**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

se puede utilizar un procedimiento análogo, pero comenzando desde abajo hacia arriba, por lo cual se denomina **algoritmo de subida**:

`ALGORITMO DE SUBIDA:`

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}}, \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j \right), \quad i = n-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

`EJEMPLOS`: Resolución de sistemas triangulares.

1.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & & & = & 6 \\ x & + & 2y & & & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 6/3 = 2 \\ y & = & (1-x)/2 = (1-2)/2 = -1/2 \\ z & = & -2 - x + y = -2 - 2 - 1/2 = -9/2 \end{array} \right.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 6 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 2z & = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 6 - 3y - z = 6 - 6 + 1 = 1 \\ y & = & 1 - z = 1 - (-1) = 2 \\ z & = & -1 \end{array} \right.$$

1.7.2 Sistemas equivalentes

Dos sistemas se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Determinadas operaciones pueden transformar un sistema en otro equivalente, por ejemplo:

1. Cambiar el orden de las ecuaciones de un sistema.
2. Multiplicar los dos miembros de una de las ecuaciones por el mismo número (distinto de cero).
3. Suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las demás.
4. Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella misma y alguna/s otra/s.

El método siguiente hace uso de estas propiedades para transformar un sistema dado en otro equivalente de matriz triangular superior que, como se ha visto, es “fácil” de resolver.

1.7.3 Método de Gauss

Se procede, en etapas sucesivas, como sigue:

- En cada etapa, se trata de "sustituir" por cero uno de los coeficientes por debajo de la diagonal.
- Para ello, y mediante las transformaciones elementales descritas en al apartado anterior, se sustituye la ecuación correspondiente por otra que haga el sistema equivalente y que tenga nulo dicho coeficiente.
- Se llega así a un sistema triangular equivalente, que se resuelve por el algoritmo de subida.

Se describe con detalle en un caso particular:

`EJEMPLO:`
Resolución por el método de Gauss del sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y-2z & = & -1 \\ 2x-3y+4z & = & 4 \\ 5x-y+3z & = & 16. \end{array}\right.$$

1. Anular el coeficiente de x en la segunda ecuación: se observa que, si se suman la primera ecuación multiplicada por -2 y la segunda, en la ecuación resultante el coeficiente de la incógnita x es nulo.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 2y & + & 4z & = & +2 \\ & & & + & & & \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 4 \end{array}\right. \longrightarrow 0\,x-1\,y+8z \;=\; 6 \iff -y+8z=6$$

2. Anular el coeficiente de x en la tercera ecuación: se puede sustituir la tercera ecuación por la suma de ella misma más la primera multiplicada por -5:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -5x & + & 5y & + & 10z & = & +5 \\ & & & + & & & \\ 5x & - & y & + & 3z & = & 16 \end{array}\right. \longrightarrow 0\,x+4\,y+13z \;=\; 21 \iff 4\,y+13\,z=21$$

3. Tras estas dos etapas, en las que no se ha modificado la primera ecuación, se ha transformado el sistema original en el siguiente sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 4 \\ 5x & - & y & + & 3z & = & 16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -1 \\ & - & y & + & 8z & = & 6 \\ & & 4y & + & 13z & = & 21 \end{array}\right.$$

4. Anular el coeficiente de y en la tercera ecuación: se puede conseguir sustituyendo la tercera ecuación por la suma de ella misma más la segunda multiplicada por 4:

$$\left\{\begin{array}{rrcrcr} - & 4y & + & 32z & = & 24 \\ & 4y & + & 13z & = & 21 \end{array}\right. \longrightarrow 0\,y+45z \;=\; 45 \iff 45\,z=45$$

5. Finalmente, el sistema original se ha transformado en:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & 4 \\ 5x & - & y & + & 3z & = & 16 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -1 \\ & - & y & + & 8z & = & 6 \\ & & & & 45z & = & 45 \end{array}\right.$$

que se resuelve por el algoritmo de subida:

$$\left\{\begin{array}{|l} \uparrow\ x = y + 2z - 1 = 2 + 2 - 1 = 3 \\ y = 8z - 6 = 8 - 6 = 2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

lo que, además de proporcionar la solución, prueba que ésta es única.

En el ejemplo que sigue, que muestra el caso de un sistema incompatible, se lleva a cabo este método sobre la matriz del sistema ampliada ($[A|b]$), lo cual es equivalente a lo anterior y es la forma en que se hace habitualmente, por ser más fácil de escribir. Además se usa una notación abreviada para indicar las operaciones efectuadas. Por ejemplo:

$$F_2 \rightarrow -2F_1 + F_2$$

indica que se sustituye la segunda fila de la matriz ampliada (F_2) por la suma de la primera multiplicada por -2 más la segunda ($-2F_1 + F_2$).

Además, este ejemplo muestra el procedimiento a seguir cuando el elemento diagonal de la columna sobre la que se está actuando vale cero: en este caso no es posible convertir en ceros los elementos de dicha columna que están por debajo de él. Lo que hay que hacer es permutar la fila del elemento nulo con otra de más abajo que no tenga cero en esa columna. Intercambiar dos filas de la matriz ampliada es equivalente a intercambiar la posición de dos ecuaciones del sistema, y esto no cambia la solución.

EJEMPLO:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + 3z & = & 6 \\ 4x - 2y + 6z & = & 9 \\ x - y + z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{F_2 \rightarrow 2F_1 - F_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{F_3 \rightarrow 2F_3 - F_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{(F_2 \leftrightarrow F_3)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

El sistema ya está en forma triangular, y la última ecuación es $0\,z = 3$, lo cual es imposible. Luego el sistema es incompatible, es decir no tiene solución.

EJEMPLO:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 4 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & - & 6y & + & 2z & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -6 & 2 & 8 \end{array}\right] \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 8 \end{array}\right] \underset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema ya está en forma triangular, por lo que no es necesario continuar el procedimiento.
La última ecuación es $0\,z = 0$ lo que significa que z puede tomar cualquier valor: $z = \alpha$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.
La segunda ecuación es $y + 2z = 2$, de donde se deduce $y = 2 - 2z = 2 - 2\alpha$.
Y por último, de la primera ecuación se deduce $x = 4 - z + 3y = 4 - \alpha + 3(2 - 2\alpha) = 10 - 7\alpha$.

Así pues, el sistema tiene infinitas soluciones (una para cada valor que tome α), que son de la forma:

$$x = 10 - 7\alpha, \quad y = 2 - 2\alpha, \quad z = \alpha, \qquad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.8 Un modelo de crecimiento de poblaciones: el modelo de Leslie

La **dinámica de poblaciones** es la especialidad científica que se ocupa del estudio de las poblaciones biológicas desde el punto de vista de su tamaño, dimensiones físicas de sus miembros, estructuración en edad y sexo y otros parámetros que las definen. La dinámica de poblaciones modela mediante ecuaciones matemáticas el comportamiento de las poblaciones, para así poder predecir los cambios numéricos que sufren, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas.

Es uno de los principales campos de interés de la biología matemática y ha demostrado su utilidad en diversas aplicaciones, como la gestión de recursos biológicos (por ejemplo, pesquerías), en la evaluación de las consecuencias ambientales de las acciones humanas y también en campos de la investigación médica relacionados con las infecciones y la dinámica de las poblaciones celulares.

En esta sección vamos a considerar, como muestra de la utilización de matrices, un modelo de la dinámica de poblaciones denominado *modelo de Leslie* en honor del autor, el fisiólogo Patrick Holt Leslie (1900-1974).

Comenzamos por presentar un modelo sencillo en el que todos los individuos de la población se tratan del mismo modo.

1.8.1 Modelo simple de crecimiento poblaciones

Supongamos que estamos estudiando el crecimiento de una determinada población (por ejemplo moscas). Es razonable pensar que, en un periodo determinado de tiempo, el número de individuos aumentará, por natalidad, en una cantidad n proporcional a la población del periodo anterior y también que disminuirá, por muerte, en otra cantidad m proporcional también a la población.

Sea P_t el número de individuos de la población en el periodo de tiempo t. Entonces podemos expresar que la diferencia o incremento del número de individuos entre el periodo t y el periodo $t+1$ viene dada por

$$P_{t+1} - P_t = nP_t - mP_t \tag{1.4}$$

o bien que el número de individuos en el periodo de tiempo $t+1$ es

$$P_{t+1} = P_t + nP_t - mP_t = (1+n-m)P_t = \lambda P_t\,, \quad \lambda = 1+n-m. \tag{1.5}$$

Esto significa que dado P_t = número de individuos de la población en un periodo de tiempo t, por ejemplo $P_t = 500$ y las tasas de natalidad n y de muerte m, por ejemplo $n = 0.1$ y $m = 0.03$, podemos **predecir** el número de individuos de la población en el periodo de tiempo siguiente, $t+1$:

$$P_{t+1} = (1+n-m)P_t = (1+0.1-0.03)500 = 535.$$

Si las tasas de natalidad y de muerte se mantienen constantes en el tiempo, este modelo nos permite también predecir el número de individuos de la población en cualquier instante posterior.

Por ejemplo, si en un periodo de tiempo inicial, $t = 0$, el número de individuos de la población es $P_0 = 500$, se tiene para los periodos siguientes:

$$\begin{cases} P_{t+1} = \lambda P_t\,, \quad \lambda = 1+n-m = 1.07\,, \quad t \geq 0 \\ P_0 = 500, \end{cases}$$

lo que produce

$$\begin{cases} P_1 = \lambda P_0 \\ P_2 = \lambda P_1 = \lambda(\lambda P_0) = \lambda^2 P_0 \\ P_3 = \lambda P_2 = \lambda(\lambda P_1) = \lambda^3 P_0 \\ \ldots, \end{cases}$$

de donde, en general,

$$P_{t+1} = \lambda P_t = \lambda^2 P_{t-1} = \cdots = \lambda^{t+1} P_0 \,.$$

Podemos construir una tabla de valores que refleja la predicción del crecimiento de la población en distintos periodos de tiempo del futuro, siendo $\lambda = 1.07$:

Periodo de tiempo: t	Población: P_t
0	500
1	$500\lambda = 535$
2	$500\lambda^2 = 572.45$
3	$500\lambda^3 \approx 612.52$
4	$500\lambda^4 \approx 655.40$
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 1.1: Modelo simple de crecimiento de poblaciones

`EJEMPLO:` Población humana
Si suponemos que una población humana vive de media 70 años es razonable pensar que $1/70$ de la población muere cada año. Si por otro lado suponemos que se producen 4 nacimientos por cada 100 cien individuos, tenemos $m = 1/70$ y $n = 4/100$. Luego

$$P_{t+1} - P_t = (n-m)P_t = (\frac{4}{100} - \frac{1}{70})P_t \quad \Longrightarrow \quad P_{t+1} = (1 + \frac{4}{100} - \frac{1}{70})P_t = \frac{718}{700}P_t = 1.026P_t \,.$$

1.8.2 Modelo de poblaciones estructuradas en edad. Matriz de Leslie

En la sección anterior se considera un modelo muy simplificado de crecimiento de poblaciones en el que todos los individuos de la población son tratados del mismo modo.

Sin embargo, en la mayoría de las poblaciones hay distintos grupos de individuos con distinto comportamiento vital. Por ejemplo, en los humanos, la tasa de natalidad de los individuos antes de la pubertad es nula y a partir de cierta edad también. También, obviamente, la tasa de muerte depende mucho de la edad. Los modelos de este tipo se conocen como modelos de **poblaciones estructuradas en edad.**

Presentamos a continuación algunos ejemplos sencillos.

EJEMPLO:
Un determinado insecto tiene 3 etapas vitales: huevo, larva y adulto. Este insecto progresa de huevo a larva en un determinado periodo de tiempo, de larva a adulto en otro periodo de tiempo y, finalmente, el adulto pone huevos y se muere en el periodo de tiempo siguiente. Pongamos:

$$\begin{array}{rcl} H_t & = & \text{número de huevos en el periodo } t \\ L_t & = & \text{número de larvas en el periodo } t \\ A_t & = & \text{número de adultos en el periodo } t. \end{array}$$

Se sabe que sólo un 4 % de los huevos llegan a larva, sólo un 39 % de las larvas llegan a adultos y que cada adulto pone una media de 73 huevos. Esto se puede expresar mediante las siguientes relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} H_{t+1} & = & 73\, A_t, & \text{(cada adulto pone 73 huevos)} \\ L_{t+1} & = & 0.04\, H_t & \text{(4 \% de huevos pasan a larvas)} \\ A_{t+1} & = & 0.39\, L_t & \text{(39 \% de larvas pasan a adulto)}\,, \end{array} \right.$$

o bien de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 73 \\ 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_t$$

La matriz que aparece en este sistema, que denotaremos por M, se llama **matriz de Leslie**. Estas ecuaciones permiten conocer el número de individuos de cada grupo de edad en un periodo de tiempo determinado si conocemos los que había en algún periodo anterior, ya que:

$$\begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_{t+1} = M \begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_t = M^2 \begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_{t-1} = \cdots = M^{t+1} \begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_0$$

siendo H_0, L_0 y A_0, el número individuos de los distintos grupos de edad correspondientes al periodo inicial de observación.
Obsérvese que, en este caso, la evolución de la población se puede expresar mediante una sola ecuación lineal, ya que, por ejemplo para el número de adultos se tiene:

$$A_t = 0.39\, L_{t-1} = 0.39\,(0.04\, H_{t-2}) = 0.39\,(0.04\,(73\, A_{t-3})) = (0.39 \times 0.04 \times 73)\, A_{t-3}\,.$$

EJEMPLO:
Suponemos ahora que, en el ejemplo anterior, en lugar de morir tras poner los huevos, un 35 % de los adultos sobrevive un periodo de tiempo adicional. Esto se expresa ahora mediante las siguientes relaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcll} H_{t+1} & = & 73\,A_t & \text{(cada adulto pone 73 huevos)} \\ L_{t+1} & = & 0.04\,H_t & \text{(4 \% de huevos llegan a larvas)} \\ A_{t+1} & = & 0.39\,L_t + 0.35\,A_t & \text{(39 \% larvas llegan a adulto + 35 \% adultos sobrevive),} \end{array}\right.$$

o en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 73 \\ 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_t = M \begin{bmatrix} H \\ L \\ A \end{bmatrix}_t$$

donde M es la matriz de Leslie correspondiente.
Obsérvese que, en este caso, no se puede expresar la evolución de la población mediante una sola ecuación, como antes.
Conociendo los valores iniciales de la población de los distintos grupos, por ejemplo $H_0 = 10$, $L_0 = 10$, $A_0 = 10$, podemos construir una tabla de la evolución de esta población en sus tres estados como la que aparece a continuación (Tabla 1.2).

Periodo de tiempo: t	Huevos: H_t	Larvas: L_t	Adultos: A_t
0	10	10	10
1	730	0.4	7.4
2	540.2	29.2	2.7
3	200.5	21.6	12.3
4	901.5	8.0	12.7
5	930.7	36,1	7.6
6	554	37.2	16.7
7	1220.5	22.2	20.4
8	1487.1	48.8	15.8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabla 1.2: Evolución de un determinado insecto que tiene 3 etapas vitales: huevo, larva, adulto, según el modelo de poblaciones estructuradas en edad del ejemplo de la página anterior.

EJEMPLO:
En algunas especies la capacidad de reproducción varía considerablemente con la edad. Para tener esto en cuenta, podemos crear "clases de edad". Por ejemplo para una población humana se puede considerar, tomando periodos de 15 años:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \text{número de individuos con edad uno (entre 0 y 14) en el periodo } t \\
x_2(t) &= \text{número de individuos con edad dos (entre 15 y 29) en el periodo } t \\
x_3(t) &= \text{número de individuos con edad tres (entre 30 y 44) en el periodo } t \\
x_4(t) &= \text{número de individuos con edad cuatro (entre 45 y 55) en el periodo } t \\
x_5(t) &= \text{número de individuos con edad cinco (entre 60 y 75)}
\end{aligned}
$$

Entonces podemos describir la evolución de la población mediante el siguiente sistema de relaciones:

$$
\left\{
\begin{array}{lcccccccccc}
x_1(t+1) & = & n_1 x_1(t) & + & n_2 x_2(t) & + & n_3 x_3(t) & + & n_4 x_4(t) & + & n_5 x_5(t) \\
x_2(t+1) & = & s_{12} x_1(t) & & & & & & & & \\
x_3(t+1) & = & & & s_{23} x_2(t) & & & & & & \\
x_4(t+1) & = & & & & & s_{34} x_3(t) & & & & \\
x_5(t+1) & = & & & & & & & s_{45} x_5(t) & &
\end{array}
\right.
$$

donde n_i, $i = 1, \ldots, 5$ denota la tasa de nacimiento (en el periodo de 15 años) correspondiente a la población de la clase de edad i y $s_{i,i+1}$ denota la tasa de supervivencia para aquellas clases i que pasan de i a $i+1$.
Usando la notación matricial este sistema se escribe en la forma

$$X_{t+1} = M\, X_t$$

donde el vector X_t de clases de edad y la matriz de Leslie M vienen dados por

$$
X_t = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}, \qquad
P = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \\ s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & 0 \end{bmatrix}
$$

Se observa, de los ejemplos anteriores que la matriz de Leslie tiene en la primera fila los valores de la fertilidad y en su subdiagonal principal los valores de supervivencia, los demás elementos de la matriz son ceros.