MATEMÁTICAS - CURSO 2007/08
2^a PRUEBA (17-1-2008)

1. Dada la ecuación:

$$-2x + \ln(x+3) = 0.$$

a) Indicar, razonadamente, el número de raíces de la ecuación anterior.

b) Hallar un intervalo donde se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar la mayor de estas raíces y obtener hasta la segunda iteración.

2. a) Calcular la integral siguiente

$$\int (2-x)\, e^x \, dx.$$

b) Calcular el área comprendida entre la curva $y = (2-x)e^x$, el eje OX y la recta $x = 0$.

3. A una laguna llega un río con un caudal de 10 m^3/minuto arrastrando cobre con una concentración de δ gr/m^3. Se supone que dentro del lago la concentración de cobre es homogénea y que el río sale del lago con un caudal de salida de 10 m^3/minuto.

a) Siendo V el volumen del lago, obtén una ecuación diferencial para la cantidad $y(t)$ de cobre al cabo de t minutos.

b) Cuando el volumen del lago es $V = 100.000$ m^3 y la concentración de cobre es $\delta = 0.1$ gr/m^3 la ecuación anterior se escribe:

$$y' = 1 - \frac{y}{10000}.$$

Obtén $y(t)$ en este caso sabiendo que al principio no había cobre en el lago.

c) ¿Cuándo habrá en el lago una concentración de cobre de 0.05 gr/m^3?

Tiempo: 2 horas.
Puntuación: Ejercicio 1: 3 puntos, Ejercicios: 2 y 3: 3.5 puntos.

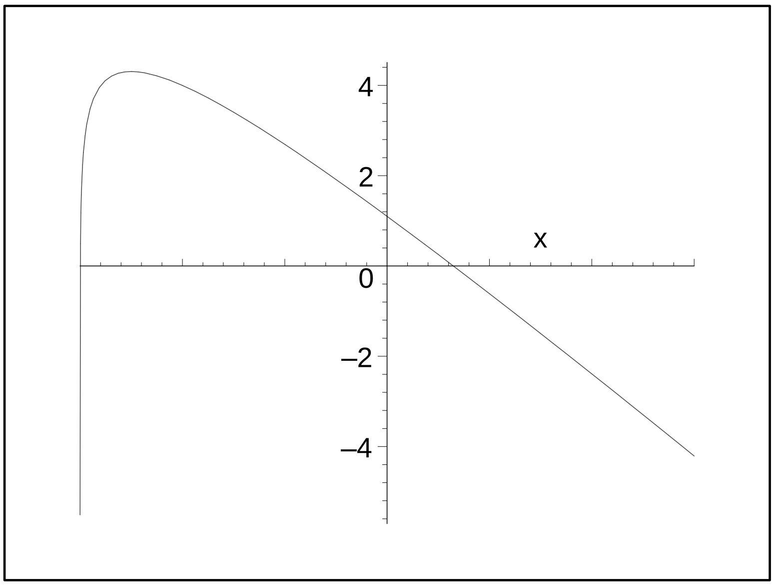
Resolución:

Ejercicio 1: Estudiamos la función $f(x) = -2x + \ln(x+3)$.

a) El estudio de las raíces de la ecuación anterior corresponde al corte de la función $y = f(x)$ con el eje OX. Como se trata de una ecuación no lineal, no podemos resolverla directamente. Procedemos entonces a esbozar su representación gráfica en su dominio de definición, que es $(-3, +\infty)$:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

La derivada de la función es $f'(x) = -2 + \dfrac{1}{x+3}$, que se anula en el punto $x = -5/2$, luego la función es creciente en $(-3, -5/2)$ y decreciente en $(-5/2, +\infty)$. Por tanto, en $x = -5/2$ se alcanza un máximo (absoluto) de la función, que es $f(-5/2) = 5 - \ln 2 > 0$. La gráfica de la función viene dada por:



Tenemos entonces dos raíces reales: una raíz en el intervalo $(-3, -5/2)$ y otra en el intervalo $(-5/2, +\infty)$.

b) Buscamos la mayor de las raíces, que es la que se encuentra en el intervalo $(-5/2, +\infty)$. Para poder aplicar la regla de Fourier, necesitamos un intervalo cerrado. Proponemos como candidato $[0, 1]$, ya que:

$$f(0) = \ln 3 = 1,09861229 > 0, \qquad f(1) = -2 + 2\ln 2 = -0,61370564 < 0$$

Veamos que se verifican las condiciones de la regla de Fourier:

- f es una función 2 veces diferenciable en $[0, 1]$.
- $f(0) \cdot f(1) < 0$
- $f'(x) = -2 + \dfrac{1}{x+3} \neq 0$ para todo punto del intervalo $[0, 1]$.
- $f''(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2} < 0$ para todo punto de $[0, 1]$

Como $signo(f(1)) = signo(f''(1))$, entonces el punto inicial x_0 que garantiza la convergencia del método de Newton es $x_0 = 1$.

Aplicando ahora la fórmula del método de Newton, obtenemos que:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 0,64931106$$

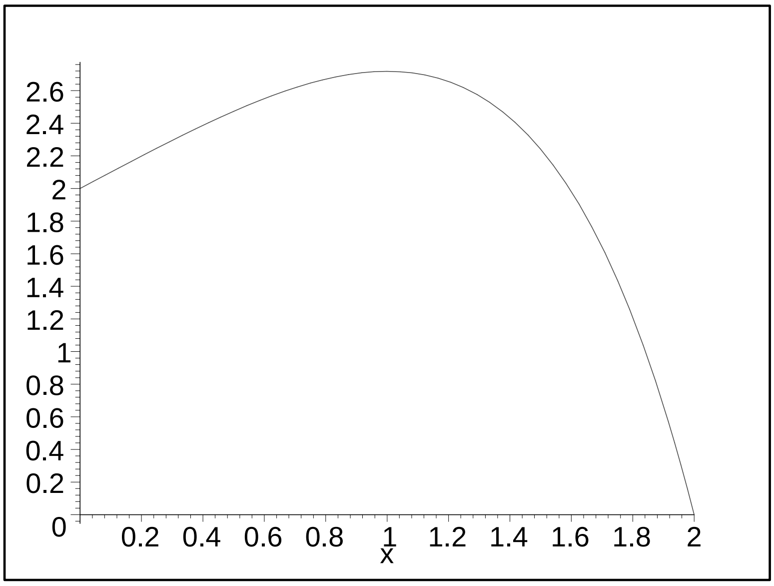
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,64694502$$

Ejercicio 2:

a) Utilizando el método de integración por partes obtenemos, usando que $u = (2-x)$, $dv = e^x\,dx$ (y, por tanto, $du = -dx$, $v = e^x$):

$$\int (2-x)\,e^x\,dx = (2-x)\,e^x + \int e^x\,dx = (3-x)\,e^x + c$$

b) Para tener una intuición de la forma que tiene el recinto del que tenemos que calcular el área, vemos el corte de la función $y = f(x)$ con los ejes. El corte con el eje OX es $x = 2$, y el corte con el eje OY es $y = 2$. La función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[0,2]$. Concretamente, el recinto es de la forma:



Por tanto, el área A viene dada por:

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (2-x)\,e^x\,dx = \left[(3-x)\,e^x\right]_{x=0}^{x=2} = e^2 - 3 = 4,3890561$$

Ejercicio 3:

a) Denotamos por $y(t)$ la cantidad de cobre en el lago laguna en el minuto t. El lago tiene un volumen de $V\ m^3$, pero la cantidad de cobre disuelto va variando, ya que le está llegando un río con una concentración de δ gr/m^3. La variación de cobre, $y'(t)$, viene dada por la diferencia entre la cantidad de cobre a la entrada y a la salida por unidad de tiempo.

Si llamamos c_e a la concentración de cobre en la disolución de entrada, c_s a la concentración de cobre en la disolución de salida, v_e a la velocidad de entrada y v_s a la velocidad de salida, entonces:

$$y'(t) = c_e \cdot v_e - c_s \cdot v_s.$$

Obsérvese la compatibilidad de las unidades:

$$y(t) \sim g. \quad \Rightarrow \quad y'(t) \sim g./min.$$

$$\left.\begin{array}{r} c \sim g./m^3. \\ v \sim m^3/min. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c \cdot v \sim g/min.$$

Según los datos del problema, $v_e = v_s = 10$, $c_e = \delta$, y

$$c_s = \frac{\text{cantidad de cobre}}{\text{n}^o\ m^3} = \frac{y(t)}{\text{V}},$$

es decir, $y'(t) = 10 \cdot \delta - \dfrac{y(t)}{V} \cdot 10 = 10\delta - \dfrac{1}{V}\, y(t)$. Por tanto, la ecuación lineal que aparece es:

$$y'(t) = -\frac{10}{V}\, y(t) + 10\delta.$$

b) Cuando $V = 100000\ m^3$ y $\delta = 0.1$ gr/m^3, la ecuación anterior viene dada efectivamente por:

$$y'(t) = -\frac{1}{10000}\, y(t) + 1.$$

Si consideramos que se trata de una ecuación lineal completa, para resolverla la escribimos de la forma $y' = a(t)\, y + b(t)$ con $a(t) = -\dfrac{1}{10000}$. Entonces, $A(t) = \displaystyle\int a(t)\, dt = \int -\frac{1}{10000}\, dt = -\frac{1}{10000}\, t$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{\frac{t}{10000}}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{10000}}\, y\right) = e^{\frac{t}{10000}}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{\frac{t}{10000}}\, y = \int e^{\frac{t}{10000}}\, dt = 10000\, e^{\frac{t}{10000}} + C.$$

La solución general es entonces $\boxed{y(t) = 10000 + C\, e^{-\frac{t}{10000}},\ C \in \mathbb{R}}$.

Según el enunciado, $y(0) = 0$. Entonces $C = -10000$. Finalmente, la evolución de la cantidad de cobre en el lago es:

$$y(t) = 10000\left(1 - e^{-\frac{t}{10000}}\right).$$

c) La concentración de cobre en el lago es $\dfrac{y(t)}{V} = \dfrac{10000(1-e^{-\frac{t}{10000}})}{100000} = \dfrac{1-e^{-\frac{t}{10000}}}{10}$.

Por tanto, para calcular el instante de tiempo t en el que la concentración de cobre en el lago será de $0,05$ gr/m^3 resolvemos:

$$\frac{1-e^{-\frac{t}{10000}}}{10} = 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^{-\frac{t}{10000}} = 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t}{10000}} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{t}{10000} = \ln(0,5) \quad \Leftrightarrow \quad t = -10000 \ln 0,5 = 6831,47181\, min.$$

es decir, 4 días, 19 horas, 31 minutos y 28 segundos.