Tema 2

Límite y continuidad de funciones de una variable

2.1 Sistemas de números

En el campo de las ciencias experimentales, dos de las operaciones básicas del investigador son "contar"y "medir". El resultado de estos procesos se representa mediante números.

Los **números naturales** (1, 2, 3, 4, ...) son el instrumento adecuado para "contar", para indicar cuantos elementos hay en un conjunto (cuantos individuos componen una población, el número de átomos que forman una molécula, ...). La totalidad de los números naturales se denota mediante el símbolo $\mathbb{N}$, así se suele escribir

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Sin embargo, los números naturales resultan insuficientes para "medir"magnitudes, tales como la longitud, el peso, el volumen, la temperatura .... Se necesita extender el conjunto $\mathbb{N}$ de manera que podamos describir una graduación continua de las medidas. Como sabemos, dicha extensión se lleva a cabo en varios pasos.

Por $\mathbb{Z}$ se denota el conjunto de los **números enteros**, es decir, el cero, los naturales y sus opuestos:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Los números enteros se suelen representan sobre una recta (recta numérica). Respecto a los números naturales, los enteros permiten dar una “orientación” a las medidas. El ejemplo quizás más típico aparece al describir un estado de cuentas: los números positivos indican haber mientras que los negativos indican deber. Otro ejemplo donde está “orientación” puede ser utilizada es en el estudio de la variación de la longitud de una varilla por el efecto del calor: un valor positivo se corresponde con una dilatación y uno negativo lo hace con una contracción. Observar que para este último ejemplo donde se mide longitud, los números enteros siguen siendo insuficientes.

Por $\mathbb{Q}$ se representa el conjunto de los **números racionales**, esto es, aquellos que se pueden escribir de la forma $\dfrac{p}{q}$, con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, con los racionales podemos medir la longitud de aquellos segmentos de la recta numérica que se obtienen al dividir la unidad en n partes iguales. Con los números racionales podemos medir cualquier longitud con un error tan pequeño como deseemos. Sin embargo, existen segmentos cuyas longitudes no se pueden expresar de manera exacta mediante números racionales. Resulta necesario una nueva extensión: los números irracionales.

Los **números irracionales**, cuyo conjunto se denota por $\mathbb{I}$, se caracterizan por tener una representación decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. Ejemplos de estos números son $\sqrt{2}$ (1.41421356...), π (3.14159265...), e (2.71828182...). El conjunto formado por los números racionales e irracionales se denota por $\mathbb{R}$, es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, y sus elementos se denominan **números reales**. Estos se pueden identificar con los puntos de una recta (recta numérica o real) y ya sí constituyen una herramienta adecuada para medir.

La siguiente definición introduce una herramienta para medir longitudes y distancias en $\mathbb{R}$.

Definición 2.1 *Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define el* **valor absoluto** *de x, y se denota por $|x|$, a la cantidad*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

De su definición se desprende que el valor absoluto es siempre una cantidad no negativa. Obsérvese que $|x|$ es la longitud del segmento de extremos 0 y x. También podemos interpretar $|x|$ como la distancia entre el 0 y x. De esta forma, dados x, $y \in \mathbb{R}$, la distancia entre x e y viene dada por $|x - y|$.

Los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se identifican con segmentos (acotados o no acotados) de la recta numérica se denominan **intervalos**. Para representarlos se utiliza la siguiente notación. Sean a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, entonces se definen

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad (2.1) \qquad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (2.2)$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (2.3) \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad (2.4)$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \quad (2.5) \qquad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \quad (2.6)$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad (2.7) \qquad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad (2.8)$$

Dependiendo de si los extremos pertenecen o no al intervalo, estos se clasifican en intervalos **abiertos**, **cerrados** o **semiabiertos**. Así, (2.1), (2.5), (2.7) son abiertos, (2.2), (2.6), (2.8) son cerrados, y (2.3), (2.4) son semiabiertos. Según el segmento correspondiente sea o no acotado, se habla de intervalos **acotados** ((2.1), (2.2), (2.3), (2.4)) o intervalos **no acotados** ((2.5), (2.7), (2.6), (2.8)).

Dado $a \in \mathbb{R}$, llamaremos **entorno de** a a todo intervalo abierto I que contenga a α. Llamaremos **entorno de** $+\infty$ a todo intervalo abierto I de la forma (2.5). Llamaremos **entorno de** $-\infty$ a todo intervalo abierto I de la forma (2.7).

Las siguientes propiedades son útiles para manipular igualdades y desigualdades entre números reales. Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
2. Si $a < b$. entonces $\begin{cases} ac < bc & \text{si } c > 0 \\ ac > bc & \text{si } c < 0 \end{cases}$
3. $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o $-a = b$.
4. $|a| < b$ si y sólo si $a < b$ y $a > -b$.
5. $|a| > b$ si y sólo si $a > b$ o $-a > b$.

2.2 Funciones reales de variable real

Dados dos conjuntos S y W, una función f de S en W es una relación que hace corresponder a un elemento x (**original**) de S un único elemento y (**imagen**) de W. Se suele escribir $f : S \longrightarrow W$, y al elemento $y \in W$ que se corresponde con $x \in S$ se denota por $f(x)$. Como ejemplo, podemos considerar la función f que a cada cuadrado le hace corresponder su área. En este curso se trabajará con funciones f para las que $S \subset \mathbb{R}$ (usualmente S será un intervalo o una unión de intervalos) y $W = \mathbb{R}$. Estas funciones se denominan **funciones reales de variable real**. Las funciones reales de variable real con las que trabajaremos serán definidas mediante un criterio o fórmula que nos indicará el criterio para obtener las imágenes a partir de los originales.

Ejemplo 2.2

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = x+1$: *La imagen se obtiene incrementando el original una unidad.*

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = 2x$: *La imagen se obtiene doblando el original.*

En la mayoría de las aplicaciones, aparecen funciones $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ en las que S no está formado por números reales. En esas situaciones se suele tratar de identificar S con algún subconjunto de $\mathbb{R}$. Así, para el ejemplo anterior de la función f que a cada cuadrado le hace corresponder su área, podemos identificar cada cuadrado con su lado. De esta forma la función se puede escribir $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$.

Definición 2.3 *Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.*

- *Al conjunto S se le denomina el* **dominio** *de f, y se denota por $D(f)$.*

- *Se define la* **imagen** *o* **recorrido** *de f como el conjunto $Im(f) \subset \mathbb{R}$ dado por*

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, \exists x \in D(f),\, y = f(x)\}$$

- *El* **grafo** *o* **gráfica** *de f es el subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definido por*

$$\{(x, f(x)) \,:\, x \in D(f)\}$$

Ejemplo 2.4 (Algunas funciones elementales)

1. *Función constante.* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = c$ *con* $c \in \mathbb{R}$ *fijo*

   $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \{c\}$

2. *Función identidad.* $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = i(x) = x$

   $D(i) = \mathbb{R}$, $Im(i) = \mathbb{R}$

3. *Función exponencial.* $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = h(x) = a^x$, $a \in (0, +\infty)$

   $D(h) = \mathbb{R}$, $Im(h) = (0, +\infty)$

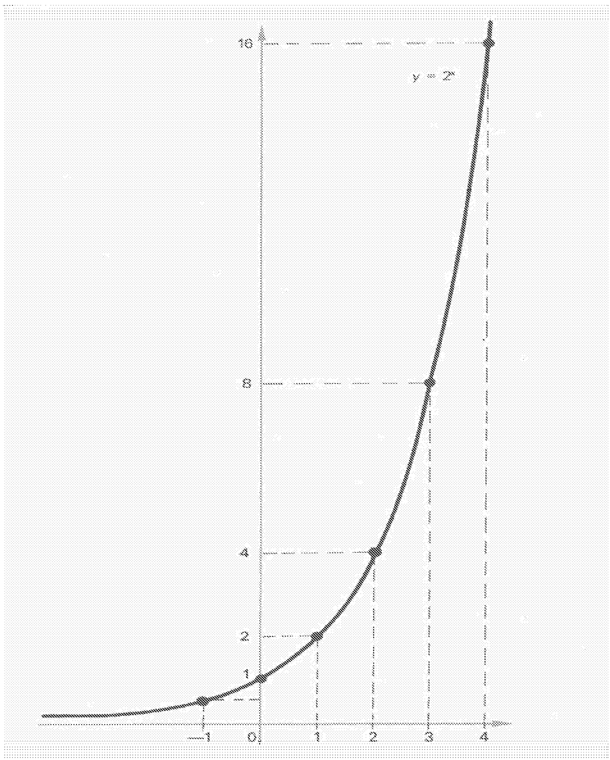

Figura 1. Función $h(x) = 2^x$

4. *Funciones trigonométricas.* sen, cos, tg

   $D(sen) = D(cos) = \mathbb{R}$, $D(tg) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$

   $Im(sen) = Im(cos) = [-1, 1]$, $Im(tg) = \mathbb{R}$

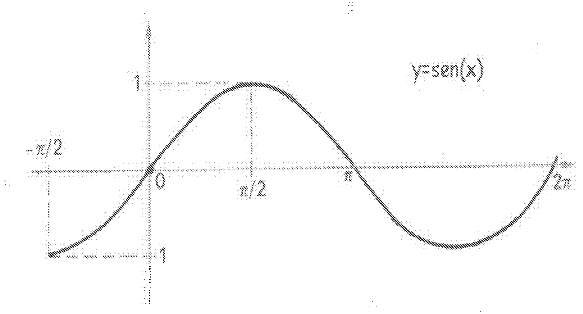

Figura 2. Función seno

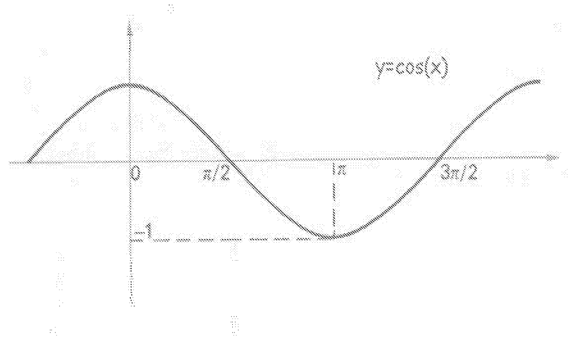

Figura 3. Función coseno

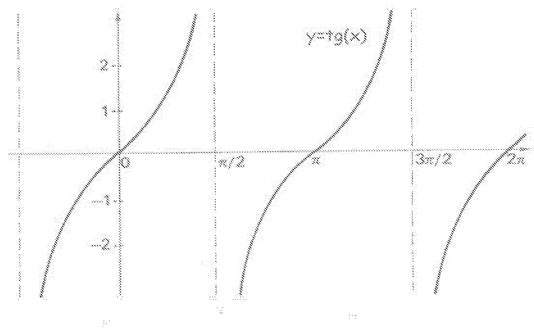

Figura 4. Función tangente

Las siguientes definiciones son útiles para describir y clasificar las funciones.

Definición 2.5 *Sea $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.*

1. *Se dice que f está* **acotada superiormente** *si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in S$.*

2. *Se dice que f está* **acotada inferiormente** *si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$ para todo $x \in S$.*

3. *Se dice que f está* **acotada** *si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in S$, es decir, si está acotada superiormente e inferiormente.*

De manera intuitiva, una función está acotada superiormente (inferiormente) si podemos trazar una recta horizontal que deje a la gráfica de f por debajo (arriba).

Una propiedad de gran importancia en el estudio de funciones es la monotonía. Una función es monótona creciente (decreciente) si al recorrer su gráfica de izquierda a derecha también lo hacemos en sentido ascendente (descendente). Estos conceptos se definen de una manera más precisa como sigue.

Definición 2.6 *Sea* $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real. Se dice que* f *es* **monótona creciente** *en* S *si* $f(x_1) \leq f(x_2)$ *para todo* x_1, $x_2 \in S$ *con* $x_1 < x_2$. *Se dice que* f *es* **monótona decreciente** *en* S *si* $f(x_1) \geq f(x_2)$ *para todo* x_1, $x_2 \in S$ *con* $x_1 < x_2$.

Definición 2.7 *Sea* $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real. Se dice que* f *es* **estrictamente creciente** *en* S *si* $f(x_1) < f(x_2)$ *para todo* x_1, $x_2 \in S$ *con* $x_1 < x_2$. *Se dice que* f *es* **estrictamente decreciente** *en* S *si* $f(x_1) > f(x_2)$ *para todo* x_1, $x_2 \in S$ *con* $x_1 < x_2$.

Destacar que toda función estrictamente creciente o decreciente cuyo dominio sea un intervalo corta a lo sumo una vez a toda recta horizontal. Esta simple observación constituye una útil herramienta para demostrar la unicidad de solución de muchas ecuaciones.

Otra propiedad que facilita el estudio de las funciones es la existencia de simetrías.

Definición 2.8 *Sea* $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real. Se dice que* f *es* **una función par** *si* $f(x) = f(-x)$ *para todo* $x \in S$. *Se dice que* f *es* **una función impar** *si* $f(x) = -f(-x)$ *para todo* $x \in S$.

Ejemplo 2.9 *La función* $y = x^2$ *es par mientras que* $y = x^3$ *es impar.*

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas y la de una función impar lo es respecto al origen de coordenadas. Por tanto, al estudiar una función par o impar basta analizar ésta únicamente para los valores no negativos.

2.3 Operaciones entre funciones

Una forma de construir nuevas funciones consiste en combinar funciones conocidas mediante operaciones racionales. De una manera completamente natural se definen la **suma**, **resta**, **multiplicación** y **división** de funciones del siguiente modo:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad (f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Se tiene que $D(f+g) = D(f-g) = D(fg) = D(f) \cap D(g)$, mientras que $D(f/g) = (D(f) \cap D(g)) \setminus \{x \in D(g) \,:\, g(x) = 0\}$.

Otra operación básica consiste en formar funciones de funciones o funciones compuestas. Sean $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable real tales que $Im(f) \subset T$. Se define la **función compuesta** de f por g, y se denota $(g \circ f)$, por $(g \circ f) : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplo 2.10 *Sean* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = 2x$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = g(x) = x + 1$. *Entonces* $(g \circ f)(x) = 2x + 1$, *mientras que* $(f \circ g)(x) = 2(x + 1) = 2x + 2$.

Ejemplo 2.11 *Sean* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = 2 + sen(x)$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = g(x) = 2^x$. *Entonces* $(g \circ f)(x) = 4 \cdot 2^{sen(x)}$, *mientras que* $(f \circ g)(x) = 2 + sen(2^x)$.

De los ejemplos anteriores se deduce que en general $(g \circ f) \neq (f \circ g)$.

A continuación, con ayuda de las funciones elementales y las operaciones anteriores, se introducen algunas clases de funciones que aparecen muy frecuentemente:

- **Funciones polinómicas.** Se construyen combinando la función identidad y las funciones constantes mediante las operaciones suma, resta y producto. El dominio de una función polinómica p es todo $\mathbb{R}$, y siempre admite una representación de la forma
$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{2.9}$$
para cierto $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se llama **grado del polinomio** (2.9) al mayor natural $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que $a_m \neq 0$ (el polinomio idénticamente nulo, $p(x) = 0$, se dice de grado cero). En cursos anteriores se ha prestado especial atención a los polinomios de grado uno $p(x) = mx + n$, $m \neq 0$, cuyos grafos representan rectas, y a los de grado dos $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, que representan parábolas.

- **Funciones racionales.** Son las funciones que se pueden expresar como cocientes de polinomios, es decir, funciones r de la forma $y = r(x) = p(x)/q(x)$ con p y q polinomios. Se tiene que $D(r) = \mathbb{R} \setminus \{x \,:\, q(x) = 0\}$.

- **Funciones irracionales.** Se denominan así las funciones que se obtienen al componer polinomios con raíces o a las combinaciones de éstas por operaciones racionales.

Para determinar el dominio de una función racional es preciso tener en cuenta los valores que anulan los denominadores o hacen negativo las raíces de orden par que intervienen.

Ejemplo 2.12

(i) $p(x) = x^5 - 2x^4 - 6x + 1$ *polinomio de grado 5.*

(ii) $r(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$, *función racional cuyo dominio es* $D(r) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

(iii) $z(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x+7}$, *función irracional con* $D(z) = (-\infty, 1] \setminus \{-7\} = (-\infty, -7) \cup (-7, 1]$.

Una función hace corresponder a cada original su imagen. En ocasiones interesa, dada una imagen, conocer su original. Así, al calentar un cuerpo, aparece la función que a cada instante de tiempo le hace corresponder la temperatura; por otra parte también es de interés la función que dada una temperatura nos da el tiempo en el que el cuerpo la ha alcanzado. Estas consideraciones nos llevan al concepto de función inversa.

Definición 2.13 *Sea* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real. Se dice que* f *admite una* **función inversa** *si* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *para todo* $x_1,\ x_2 \in S$. *En ese caso existe una función* f^{-1}, *denominada función inversa, con* $D(f^{-1}) = Im(f)$ *y tal que* $(f^{-1} \circ f) = (f \circ f^{-1})$ *es la función identidad.*

Se satisface que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Ejemplo 2.14 *A continuación se muestran algunas funciones y sus inversas.*

- $y = f(x) = 2x$, $D(f) = \mathbb{R}$; $x = f^{-1}(y) = y/2$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.
- $y = g(x) = x^2$, $D(g) = [0, +\infty)$; $x = g^{-1}(x) = \sqrt{y}$, $D(g^{-1}) = [0, +\infty)$.
- $y = h(x) = x^3$, $D(h) = \mathbb{R}$; $x = h^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. $D(h^{-1}) = \mathbb{R}$
- $sen^{-1} = arcsen$, $cos^{-1} = arccos$, $tg^{-1} = arctg$.
- $y = z(x) = a^x$ $(a \in (0, +\infty))$, $D(z) = \mathbb{R}$; $x = z^{-1}(y) = log_a(y)$, $D(z^{-1}) = (0, +\infty)$.

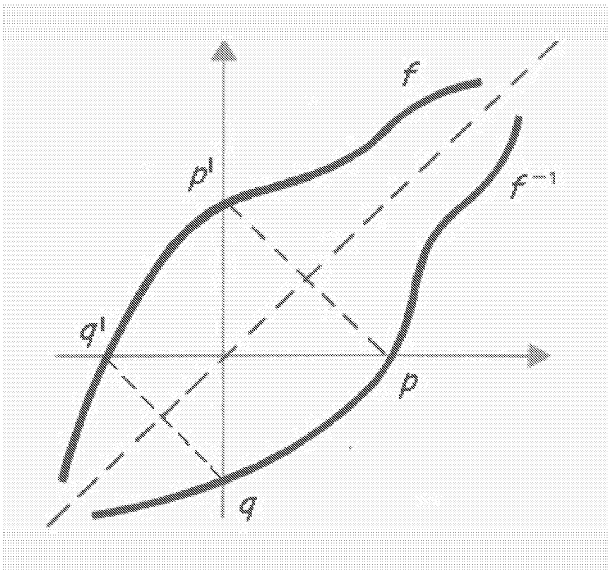

Figura 5. Gráfica de f^{-1}

Ejemplo 2.15 *Calcula la inversa de las siguientes funciones:*

$$\textbf{1)}\ y = f(x) = x^3 + 4 \qquad \textbf{2)}\ y = g(x) = \frac{x+2}{2x+1} \qquad \textbf{3)}\ y = h(x) = e^{x^2}$$

Solución. Despejando x en función de y, obtenemos la inversa de f

$$y = x^3 + 4 \Leftrightarrow x^3 = y - 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-4} = f^{-1}(y)\,,$$

la inversa de g

$$\begin{aligned} y = \frac{x+2}{2x+1} &\Leftrightarrow y(2x+1) = x + 2 \Leftrightarrow 2xy - x = 2 - y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(2y-1) = 2 - y \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{2y-1} = g^{-1}(y)\,, \end{aligned}$$

y la inversa de h

$$y = e^{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \ln(y) \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(y)} = h^{-1}(y)\,.$$

□

2.4 Límite de funciones

Los conceptos de derivada e integral descansan sobre la noción de límite. Aquí nos vamos a adentrar en el estudio del límite de funciones reales de variable real. Para el

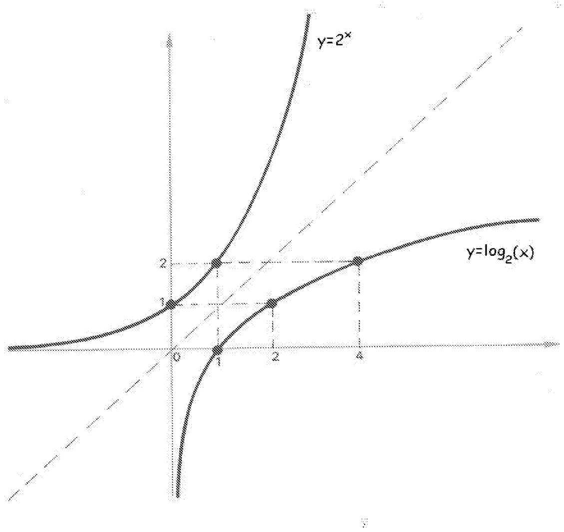

Figura 6. Gráfica de log_2

estudiante que se adentra por primera vez, la idea intuitiva del concepto de límite puede resultar fácilmente entendible. Sin embargo, como veremos, la formulación precisa de ese concepto es compleja.

Se llama límite de la función f en el punto a, al valor b al que se van acercando las imágenes $f(x)$ cuando x se acerca al valor a.

Ejemplo 1

Consideremos la función $f(x) = x^2$ y el punto $a = 2$. Estudiemos los valores de $f(x)$ para x próximo a 2:

x	f(x)
1'9	3'61
1'99	3'9601
1'999	3'996001
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
2	4

x	f(x)
2'1	4'41
2'01	4'0401
2'001	4'004001
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
2	4

Tanto si nos acercamos a 2 por la derecha (2'1, 2'01, ...) como si lo hacemos por la izquierda (1'9, 1,99, ...) la función se acerca a 4. Se tiene pues que el límite de la función

$f(x) = x^2$ *cuando* x *tiende a* 2 *es* 4, *y se escribe*

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

En el ejemplo anterior el límite de f cuando x tiende a 2 coincide con el valor $f(2) = 2^2 = 4$, lo que puede llevar al error de pensar que el concepto de límite de una función en un punto no aporta nada nuevo: se trata simplemente de evaluar la función en dicho punto. Sin embargo, en el próximo ejemplo se considera una función f y un punto a que no se encuentra en $D(f)$, por tanto no tiene sentido hablar de $f(a)$, y sin embargo sí del límite de f en a. Destacar eso sí, que aunque el punto a no pertenezca a $D(f)$, si debe ser un punto "muy cercano"a $D(f)$.

Ejemplo 2

Sea $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *y* $a = 3$. *Calculemos algunos valores de* $f(x)$ *para* x *próximo a* 3*:*

x	f(x)
2'9	*5'9*
2'99	*5'99*
2'999	*5'999*
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
3	*6*

x	f(x)
3'1	*6'1*
3'01	*6'01*
3'001	*6'001*
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
3	*6*

Tanto si nos acercamos a 3 *por la derecha como si lo hacemos por la izquierda la función se acerca a* 6. *Se tiene pues*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6.$$

Se considera a continuación un ejemplo en el que no existe el límite.

Ejemplo 3

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ x+3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Estudiemos el límite de f cuando x tiende a 1:

x	f(x)
0'9	2'459603111...
0'99	2'691234472...
0'999	2'715564905
⋮	⋮
↓	↓
1	e=2'718281828...

x	f(x)
1'1	4'1
1'01	4'01
1'001	4'001
⋮	⋮
↓	↓
1	4

Observamos que si nos acercamos a 1 por la derecha la función f se acerca al número e, lo que denotamos por

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = e,$$

mientras que si nos acercamos a 1 por la izquierda f se aproxima a 4, lo que denotamos por

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4.$$

Como los valores límites son distintos según nos acercamos por la derecha o por la izquierda, decimos que no existe el límite de f en 1.

Destacar que en el ejemplo anterior el valor $f(1) = 1$ no ha jugado papel alguno en el cálculo de los límites laterales, i.e., el límite por la derecha y el límite por la izquierda.

En ocasiones nuestro interés se centra en el comportamiento de una una función $y = f(x)$ cuando la variable independiente x toma valores muy grandes (o muy pequeños). Así por ejemplo, si imaginamos que x representa el tiempo y que y representa el número de individuos de una población en el instante $x \in [0, +\infty)$, ese comportamiento nos indicaría si con el paso del tiempo la población desaparece, crece de manera no acotada, se estabiliza en un determinado número, etc. El último ejemplo es un caso muy sencillo en relación con la idea anterior.

Ejemplo 4

Calculemos algunos valores de $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$ *para* x *"grande":*

x	*f(x)*
10	*1'001*
1000	*1'001*
100000	*1'00001*
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	*1*

A medida que x *se va haciendo más grande, el valor de* $f(x)$ *se va aproximando más a 1. En esta situación decimos que el límite de* f *cuando* x *tiende a* $+\infty$ *es* 1, *y lo denotamos por*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Los conceptos anteriores se formalizan de una manera precisa con las siguientes definiciones.

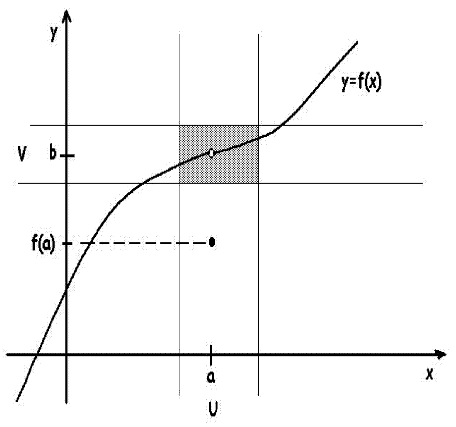

Figura 7.

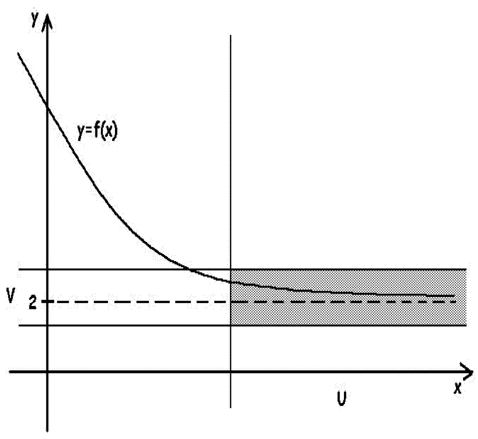

Figura 8.

Definición 2.16 *Sean* $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real y* $a,\ b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Supongamos que* $(U \setminus \{a\}) \cap S \neq \varnothing$ *para todo* U *entorno de* a. *Se dice*

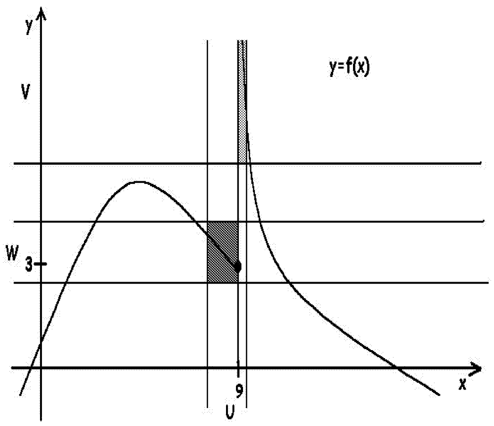

Figura 9.

que b **es el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor** *a, y se escribe*

$$b = \lim_{x \to a} f(x),$$

si para todo entorno V de b existe un entorno U de a tal que $f(x) \in V$ para todo $x \in (U \setminus \{a\}) \cap S$.

Definición 2.17 *Sean $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Supongamos que $(U \cap (a, +\infty)) \cap S \neq \varnothing$ para todo U entorno de a. Se dice que b* **es el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a por la derecha**, *y se escribe*

$$b = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

si para todo entorno V de b existe un entorno U de a tal que $f(x) \in V$ para todo $x \in (U \cap (a, +\infty)) \cap S)$.

Definición 2.18 *Sean $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Supongamos que $(U \cap (-\infty, a)) \cap S \neq \varnothing$ para todo U entorno de a. Se dice que b* **es el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a por la izquierda**, *y se escribe*

$$b = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

si para todo entorno V de b existe un entorno U de a tal que $f(x) \in V$ para todo $x \in (U \cap (-\infty, a)) \cap S$.

El siguiente resultado es obvio.

Teorema 2.19 *Sean* $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real,* $a \in \mathbb{R}$ *y* $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*. Entonces se satisface la siguiente relación*

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} b = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \\ b = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \end{cases}$$

En la Definición 2.16, cuando a y b son números reales, nos podemos restringir a entornos de b de la forma $V = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, y a entornos de a de la forma $U = (a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$. Con este argumento se obtiene la siguiente caracterización del límite. Esta caracterización es la adoptada normalmente como definición de límite de una función en un punto.

Proposición 2.20 *Sean* $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real y* a*,* $b \in \mathbb{R}$*. Entonces,* $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *si y sólo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - b| < \varepsilon$ *para todo* $x \in D(f)$ *con* $0 < |x - a| < \delta$*.*

Introducimos a continuación un convenio de notación que es útil para simplificar el enunciado de posteriores resultados y propiedades. Diremos que el límite de una función $y = f(x)$ cuando x tiende al valor a es ∞, y escribiremos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, si se verifica $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$. Esta notación se extiende de manera natural para los límites laterales de f en a.

Ejemplo 2.21 *Con las definiciones dadas anteriormente no existe el límite* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ *puesto que los límites laterales no son iguales*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Sin embargo por convenio y abusando de la notación se tiene que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Ahora con ayuda del concepto de límite se puede formalizar la idea intuitiva de asíntota de una función.

Definición 2.22 *Sea* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real.*

1. *Diremos que la recta* $x = c$*, con* $c \in \mathbb{R}$*, es una asíntota vertical de* f *si se verifica*

$$\exists \lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \quad o \quad \exists \lim_{x \to c^-} f(x) = \infty.$$

2. *Diremos que la recta* $y = d$*, con* $d \in \mathbb{R}$*, es una asíntota horizontal de* f *si se verifica*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = d \quad o \quad \exists \lim_{x \to -\infty} f(x) = d.$$

3. *Diremos que la recta* $y = mx + n$*, con* $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*,* $n \in \mathbb{R}$*, es una asíntota oblicua de* f *si se verifica*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0 \quad o \quad \exists \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Ejemplo 2.23

1. *La recta* $x = 0$ *es una asíntota vertical de* $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2. *La función* $g(x) = \dfrac{1+x}{x}$ *tiene una asíntota horizontal en* $y = 1$ *(ver el Ejemplo 4 de la motivación del concepto de límite).*

3. *La recta* $y = x + 2$ *es una asíntota oblicua de la función* $h(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}$*. Para comprobarlo basta tener en cuenta la igualdad*

$$h(x) = x + 2 + \frac{1}{x}, \tag{2.10}$$

y entonces al aplicar la definición se obtiene

$$\lim_{x \to +\infty} [h(x) - x - 2] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

La relación anterior sigue siendo cierta si sustituimos $+\infty$ *por* $-\infty$*.*

El siguiente lema es útil para el cálculo de las asíntotas oblicuas:

Lema 2.24 *Supongamos que se verifica*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Entonces los valores de m *y* n *vienen dados por*

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

Ejemplo 2.25 *Consideremos la función (2.10) del Ejemplo 2.23, y mostremos como emplear el lema anterior para estudiar la existencia de alguna asíntota oblicua* $y = mx + n$. *De existir, el valor de* m *ha satisfacer*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right] = 1.$$

Si el límite anterior no existiera o fuese infinito, deduciríamos que "no existe asíntota oblicua en $+\infty$*". Empleando el valor de* m*, se obtiene* n *por la igualdad*

$$n = \lim_{x\to+\infty} [h(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[2 + \frac{1}{x}\right] = 2.$$

Luego, como ya sabíamos, $y = x + 2$ *es una asíntota oblicua de* h*. Un análisis análogo con* $x \to -\infty$ *conduce a los mismos resultados.*

Un resultado análogo al Lema 2.24 anterior cambiando $+\infty$ por $-\infty$ sigue siendo cierto.

2.5 Operaciones con límites

Ya sabemos que si tenemos dos funcione f y g, podemos definir nuevas funciones combinándolas mediante operaciones racionales o componiéndolas con otras funciones conocidas. En algunos casos podemos deducir a priori el límite de las nuevas funciones a partir de los límites de f y g. En otros casos no es posible predecir el valor del límite, decimos que nos encontramos ante casos indeterminados, pues depende de la elección particular de f y g.

Supongamos que se tiene

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

A continuación se muestra el comportamiento del límite cuando se operan estas funciones. Para no hacer excesivamente la lista se han suprimido algunos casos simétricos (por ejemplo, $b = 0$, $c = \infty$) y no se ha distinguido entre $+\infty$ y $-\infty$ (basta tener en cuenta la regla de los signos).

• Límite de la suma:

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \begin{cases} b+c & \text{si } b, c \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{si } b \in \mathbb{R},\ c=\infty, \\ \infty & \text{si } b=c=\infty, \\ \text{IND.} & \text{si } b=-c=\infty. \end{cases}$$

(IND.=Indeterminado)

• Límite del producto:

$$\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \begin{cases} bc & \text{si } b, c \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{si } b=\infty,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \infty & \text{si } b=\infty,\ c=\infty, \\ \text{IND.} & \text{si } b=\infty,\ c=0. \end{cases}$$

• Límite del cociente:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{b}{c} & \text{si } b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 0 & \text{si } b \in \mathbb{R},\ c=\infty, \\ \infty & \text{si } b \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ c=0, \\ \infty & \text{si } b=\infty,\ c \in \mathbb{R}, \\ \text{IND.} & \text{si } b=c=0 \text{ o } b=\infty,\ c=\infty. \end{cases}$$

• Límite de $r^{f(x)}$, $r \in (0,+\infty)$:

Caso $r>1$

$$\lim_{x\to a} r^{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } b=+\infty \\ r^b & \text{si } b \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } b=-\infty \end{cases}$$

Caso $r<1$

$$\lim_{x\to a} r^{f(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } b=+\infty \\ r^b & \text{si } b \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{si } b=-\infty \end{cases}$$

• Límite de $log_r(f(x))$, $r \in (0,+\infty)$:

Caso $r>1$

$$\lim_{x\to a} log_r(f(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } b=+\infty \\ log_r(b) & \text{si } b \in (0,+\infty) \\ -\infty & \text{si } b=0 \end{cases}$$

Caso $r < 1$

$$\lim_{x\to a} log_r(f(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } b = 0 \\ log_r(b) & \text{si } b \in (0, +\infty) \\ -\infty & \text{si } b = +\infty \end{cases}$$

• Límite de $f(x)^{g(x)}$:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} \left(e^{g(x)Ln(f(x))}\right)$$

Indeterminaciones: 0^0, 1^∞, ∞^0

Para terminar esta sección, enunciemos algunas propiedades que pueden resultar útiles para el cálculo de límites:

1. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ y f es una función acotada, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y existe $M > 0$ tal que $|f| > M$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \left(1 + \dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$.
4. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)(f(x)-1)}$.
5. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{sen(f(x))}{f(x)} = 1$.

2.6 Funciones continuas

La idea de continuidad está implícita en el uso cotidiano de las matemáticas elementales. Así por ejemplo, cuando para facilitar un cálculo redondeamos algunos resultados intermedios, estamos suponiendo que pequeñas diferencias en los operandos provocan pequeñas diferencias en los resultados. Otros ejemplos aparecen al realizar mediciones de magnitudes básicas que emplearemos para obtener otras magnitudes derivadas. Normalmente usamos instrumentos que sólo pueden registrar una cantidad discreta de valores, con ayuda de los cuales aproximamos aquellos valores no registrados. Esto nuevamente se apoya en la suposición que pequeñas variaciones en las magnitudes básicas provocan pequeñas variaciones en las derivadas.

En términos de funciones y de manera intuitiva, diremos que f es continua en $a \in D(f)$ si el valor de $f(x)$ y $f(a)$ son próximos cuando x está suficientemente cerca de a. Utilizando la noción de límite, podemos formalizar la definicón anterior como sigue.

Definición 2.26 *Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $a \in S$. Diremos que f* **es continua en** *a, si existe $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ y toma el valor $f(a)$.*

Por tanto, determinar la continuidad de una función en un punto pasa por el estudio de un límite. Otra forma usual de comprobar que una función es continua en un punto consiste en expresarla en términos de funciones que sí sabemos que son continuas en dicho punto y a continuación aplicar el siguiente resultado.

Teorema 2.27

1. *Si f y g son dos funciones continuas en a, entonces $f+g$, $f-g$, fg y f^g son funciones continuas en a. Si además $g(a) \neq 0$, entonces f/g también es continua en a.*

2. *Si f es una función continua en a, y g es una función continua en $b = g(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.*

Diremos que una función f **es discontinua en** $a \in D(f)$, o que a es un punto de discontinuidad de f, cuando f no es continua en a. Que a sea un punto de discontinuidad de f se puede deber a varias causas, y según éstas se habla de:

1. **Discontinuidad evitable**: Si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pero este no coincide con $f(a)$.

2. **Discontinuidad de primera especie**: Si existen los límites laterales $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$, pero son distintos. Si b, $c \in \mathbb{R}$, a la diferencia $b - c$ se le llama el salto de f en a, y se habla de **discontinuidad de salto finito**. Cuando uno de los límites laterales no es un número, se habla de **discontinuidad de salto infinito**.

3. **Discontinuidad de segunda especie**: Si alguno de los límites laterales de f en a no existe.

Definición 2.28 *Diremos que $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $E \subset S$, si f es continua en cada punto a de E.*

Cuando $D(f)$ es un intervalo, intuitivamente f es una función continua en $D(f)$ si podemos dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. Como consecuencia fácil del Teorema 2.27 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.29 *Las funciones polinómicas, racionales e irracionales son continuas en sus dominios.*

2.7 Teoremas del Valor Intermedio y Weierstrass

En la sección anterior, ya hemos mencionado la idea intuitiva de que las funciones continuas definidas sobre intervalos se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel, es decir, no pueden tener saltos. Esta propiedad se muestra claramente en el Teorema del Valor Intermedio o Teorema de Darboux.

Teorema 2.30 (Teorema del valor intermedio o de Darboux) *Sea f una función continua en un intervalo I y sean a, $b \in I$. Si z es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe c entre a y b tal que $f(c) = z$.*

El siguiente resultado es un caso particular del Teorema de Darboux y resulta de gran utilidad para demostrar la existencia de ceros de funciones.

Corolario 2.31 (Teorema de Bolzano) *Sea f una función continua en un intervalo I y sean a, $b \in I$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe c entre a y b tal que $f(c) = 0$.*

Observación 2.32 *La condición de que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos se suele escribir $f(a)f(b) < 0$.*

Otra propiedad importante de las funciones continuas sobre intervalos cerrados y acotados hace referencia a su acotación y a la existencia de máximos y mínimos.

Teorema 2.33 (Teorema de Weiertrass o del valor óptimo) *Sea f una función continua en el intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$, con a, $b \in \mathbb{R}$. Entonces existen x_m, $x_M \in I$ tales que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Como muestra los siguientes ejemplos, la condición que I sea un intervalo cerrado y acotado es fundamental:

1. $f(x) = x^2$, $I = [0, 1)$: Esta función alcanza su mínimo en $x = 0$ y, aunque está acotada superiormente, no alcanza un valor máximo.

2. $f(x) = x$, $I = (-\infty, 1)$: Alcanza su valor máximo en $x = 1$ y no está acotada inferiormente.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = (0, 1)$: Alcanza su valor mínimo en $x = 1$, y no está acotada superiormente.

Bibliografía complementaria

- COURANT R., JOHN F. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Limusa 1984.

- EDWARDS C.H., PENNEY D.E. Cálculo diferencial e integral. Prentice Hall 1997.

- STEWART, J. Cálculo. Conceptos y Contextos. International Thomson Publ. Company 1999.

Problemas de Matemáticas	Biología	2003/2004	Hoja 1

1. Determinar el dominio de definición de las funciones cuya expresión se indica:

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}\sqrt{x^2+x-2}$ (b) $f(x) = (|x|-x)^{-\frac{1}{2}}$ (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(d) $f(x) = \text{arc sen}(x^2-2)$ (e) $f(x) = \dfrac{(x-2)\sqrt{x}}{(1+3x)(x-1)}$ (f) $f(x) = \sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$

(g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ (i) $f(x) = \ln(\text{sen}\, x)$

(j) $f(x) = \ln(x(2-x)(x+3))$ (k) $f(x) = \sqrt{\pi^2-x^2}\text{tg}\ x$ (l) $f(x) = \ln(|x-1|-2)$.

2. Dadas las funciones f y g hallar $f\circ g$, $g\circ f$ en cada uno de los casos:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$.

(b) $f(x) = 1-x$, $\quad g(x) = x^2+2x$.

(c) $f(x) = x+5$, $\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Estudiar la existencia de los siguientes límites y calcularlos cuando existan:

(a) $\lim \dfrac{x-1}{|x-1|}$ cuando x tiende a 1^+, 1^-, 1, $+\infty$, $-\infty$.

(b) $\lim \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$ cuando x tiende a $-\infty$, -1, 0.

(c) $\lim \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ cuando x tiende a $+\infty$, 1, 0.

4. Hallar a y b para que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right) = 0$.

5. Estudiar la existencia de los siguientes límites y calcularlos cuando existan:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2+x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}$ - $\sqrt{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{|x|}{x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2+\text{sen}\frac{1}{x}}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\text{sen}^2 x)^{\dfrac{1}{1-\cos x}}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\text{tg}^2 x)^{\dfrac{2}{\text{sen}^2 x}}$ (k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1\text{-tg}x}{\cos(2x)}$ (l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ae^{ax}}{be^{ax}+c}$

6. Estudiar los puntos de continuidad y las discontinuidades de las funciones:

   (a) $f(x) = \text{tg } x$

   (b) $f(x) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq x < k + \frac{1}{2} \\ k+1 & \text{si } k + \frac{1}{2} \leq x \leq k+1 \end{cases}$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} |x|^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \\ (x+1)^2 & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{\ln\ |x|}$

7. Calcular los valores de $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ para que sean continuas en $\mathbb{R}$ las funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} |x|^b \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\ln\ (1+x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

8. Se consideran

   (a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \\ |x-1| & \text{si } 0 < x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } 0 < x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

   En ambos casos se pide: ¿es aplicable el teorema de Weierstrass? Justificar la respuesta.

9. Probar que las siguientes ecuaciones tienen al menos una raíz real:

   (a) $x - \operatorname{sen} x = 1$, (b) $x + e^x + 1 = 15$, (c) $e^x + \operatorname{sen} x = 0$, (d) $x \ln(x+1) - 2 = x - 2x^2$ y (e) $e^x + 2x = 1$.

10. Probar que la función $f(x) = x - 2^{-x}$ tiene al menos una raíz real ¿Toma f el valor $\frac{\pi}{2}$ alguna vez si $x \in [1,2]$? Razonar la respuesta.

11. Dada una función f continua en $[0,1]$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]$, demostrar que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$ (es un teorema del punto fijo).

12. Demostrar que todo polinomio con coeficientes reales y grado impar tiene por lo menos una solución real ¿Ocurre esto si el grado es par?