Tema 3

Derivabilidad de funciones de una variable

El objetivo del presente tema es la derivación de funciones reales de variable real, así como sus diversas aplicaciones entre las que destacamos la representación gráfica de funciones y la optimización.

1.1 Definición e interpretación de la derivada

Definición 1.1.1 *Sea* $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. *Se dice que* f *es derivable en* x_0 *si existe el siguiente límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y pertenece a $\mathbb{R}$. *En este caso, al límite anterior se le llama derivada de* f *en* x_0. *Se suele notar de alguna de las siguientes formas*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Si existe la derivada de f *en todos los puntos de* (a,b), *entonces se dice que* f *es derivable en* (a,b). *En este caso se puede definir una función* $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ *que le asocia a cada punto* x *de* (a,b), *la derivada* $f'(x)$ *de* f *en* x_0 *y que se llama función derivada de* f.

Para ver si una función es derivable en un punto, es a veces interesante calcular las derivadas laterales, las cuales se definen por

Definición 1.1.2 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f se dice derivable a la derecha en x_0 si existe (y es finito) el siguiente límite*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

En este caso, al límite anterior se le llama derivada por la derecha de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)^+$.

Análogamente, se dice que f es derivable a la izquierda en x_0 si existe (y es finito) el límite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

en este caso, al límite anterior se le llama derivada por la izquierda de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)^-$.

Claramente se tiene

Teorema 1.1.3 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. La función f es derivable en x_0 si y sólo si existen las derivadas laterales y coinciden.*

A partir de la definición de derivada de f en x_0, está claro que tomando

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \tag{1.1}$$

entonces se tiene

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Por otra parte, despejando el valor de $f(x)$ de la fórmula (1.1), se obtiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + g(x)(x - x_0). \tag{1.2}$$

Teniendo en cuenta que $g(x)$ tiende a cero cuando x tiende a cero, está claro que para valores de x cercanos a x_0 el valor absoluto del término $g(x)(x - x_0)$ que aparece en la fórmula anterior es muy pequeño, de hecho mucho más pequeño que la distancia $|x - x_0|$ de x a x_0. Ello significa que si definimos la recta $r(x)$ por

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.3}$$

entonces

$$f(x) \sim r(x), \tag{1.4}$$

cuando x está muy cerca de x_0. Esto nos da una primera idea de en qué consiste derivar, la idea es aproximar la función f, la cual puede tener una estructura muy compleja, por una recta, la cual es mucho más simple de manejar. Como hemos mencionado anteriormente esta aproximación sólo sirve para valores de x cercanos a x_0.

Ejemplo 1.1.4 *Sabiendo que la derivada de la función $log\, x$ es $1/x$, calcular aproximadamente el valor de $log\, 1'1$.*

Tomamos $x_0 = 1$ con lo que la recta r que hemos definido antes viene ahora dada por

$$r(x) = log\, 1 + \frac{1}{1}(x-1) = x - 1.$$

Por tanto si x está cerca de 1, el valor de $log\, x$ es aproximadamente $x-1$. En particular se tiene

$$log\, 1'1 \sim 0'1,$$

lo que podemos comparar con el valor de $log(1'1) = 0'0953102$. Observar que en el presente caso $(x = 1'1, x_0 = 0'1)$, $|x - x_0| = 0'1$ es mucho mayor que $|log(x) - r(x)| = 0'0046899$.

La recta $r(x)$ que hemos calculado anteriormente, tiene una fácil **interpretación geométrica**, para ello, dados x_0 y h consideremos la recta secante a la gráfica de f que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h)$. La pendiente de esta recta viene dada por

$$tg(\beta) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Teniendo en cuenta que cuando h tiende a cero, esta recta se acerca a la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ se deduce que las pendientes también se acercan y por tanto se tiene

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = tg(\alpha),$$

es decir la derivada de f en x_0 nos da la pendiente (tangente trigonométrica) de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$. Dicha recta tangente vendrá por tanto dada por la ecuación

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

que no es otra que la recta r definida por (1.3). Por tanto la fórmula (1.4), establece simplemente el hecho de que para x cercano a x_0 la recta tangente a f en $(x_0, f(x_0))$ está muy próxima a la gráfica de f.

Ejemplo 1.1.5 *Sabiendo que la derivada de la función* $\operatorname{sen} x$ *es* $\cos x$*, calcular la recta tangente a la función seno en el punto* $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$*:*

Solución. *Por la fórmula anterior, la recta pedida vendrá dada por*

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\,(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{8}.$$

El concepto de derivada también es de gran importancia en las distintas ramas de la ciencia y la tecnología, gracias a su **interpretación física**. Consideremos el siguiente ejemplo: Supongamos un móvil que se mueve por una recta. Este movimiento se puede representar matemáticamente a partir de una función x la cual asocia a cada instante t la posición $x(t)$ del móvil en el instante t. Si consideramos entonces dos instantes t_0, $t_0 + h$, la velocidad media (con signo) recorrida por el móvil entre esos dos instantes vendrá dada por (recordar que velocidad=espacio/ tiempo)

$$v_m = \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}.$$

La velocidad del móvil en el instante t_0 se define como el límite cuando h tiende a cero de la velocidad media anterior y vendrá por tanto dada por $x'(t_0)$. Es decir la derivada nos sirve para calcular la velocidad del móvil en cada instante a partir de la que nos da su posición. De la misma forma, la derivada se puede usar por ejemplo para medir la velocidad de una reacción química, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo, la velocidad de crecimiento de una población, etc.

Una aplicación importante de la fórmula (1.2), es el siguiente teorema

Teorema 1.1.6 *Sea* $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$*. Si* f *es derivable en* x_0*, entonces* f *es continua en* x_0*.*

Demostración. Gracias a la fórmula (1.2), se tiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + g(x)(x - x_0)$$

donde

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Tomando entonces límite se tiene

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + g(x)(x - x_0)) = f(x_0),$$

con lo que f es continua en x_0. □

Observación 1.1.7 *Existen funciones que son continuas en un punto y sin embargo no son derivables en él. Consideremos por ejemplo la función valor absoluto definida por*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0. \end{cases}$$

Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero sin embargo no es derivable en cero ya que

$$f'(0)^+ = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$
$$f'(0)^- = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

1.2 Cálculo de derivadas

La definición de derivada se ha dado a través de un determinado límite. Sin embargo, resulta difícil calcular dicho límite cada vez que queramos saber cual es la derivada de una función en un punto, en la práctica lo que se hace es usar ciertas reglas que nos ayudan a calcular las derivadas y que pasamos a exponer en los siguientes resultados Es lo que se conoce como **Álgebra de derivadas.**

Teorema 1.2.1 *Sean, $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que son derivables en un punto $x_0 \in (a, b)$. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, fg son derivables en x_0 y se tiene*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Si $g(x_0) \neq 0$ entonces f/g también es derivable en x_0 y se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Ejemplo 1.2.2 *Sabiendo que la derivada de la función $f(x) = x$ es $f'(x) = 1$ y que la derivada de las constantes es cero, calcular la derivada de*

$$h(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Usando las reglas de derivación para el cociente y la resta de funciones se tiene

$$h'(x) = \frac{1(x-1) - (1-0)x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

El siguiente resultado nos muestra como derivar una composición de funciones

Teorema 1.2.3 *(**Regla de la cadena**) Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (c,d) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que $f(x) \in (c,d)$, para todo $x \in (a,b)$. Supongamos que f es derivable en un punto $x_0 \in (a,b)$ y que g es derivable en el punto $f(x_0)$. Entonces la función $(g \circ f)$ es derivable en x_0 y se tiene*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Ejemplo 1.2.4 *Sabiendo que la derivada de la función $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$ y el ejemplo anterior calcular la derivada de la función*

$$f(x) = sen\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Usando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = cos\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = -\frac{cos\left(\frac{x}{x-1}\right)}{(x-1)^2}.$$

Respecto a derivada de la función inversa, se tiene

Teorema 1.2.5 *Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, inyectiva y supongamos $x_0 \in (a,b)$ tal que f es derivable en x_0 y $f'(x_0) \neq 0$. Entonces la función f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y se tiene*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Observación 1.2.6 *El resultado anterior se puede mejorar, ya que se puede probar que si $f'(x_0) \neq 0$, entonces f es inyectiva en un entorno de x_0. Ello permite suprimir la condición de inyectividad.*

Ejemplo 1.2.7 *Sabiendo que la derivada de la función $f(x) = e^x$ es $f'(x) = f(x) = e^x$, vamos a calcular la derivada de la función $f^{-1}(x) = log\, x$.*

Usando la regla anterior se tiene

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{log\, x}} = \frac{1}{x}.$$

Además de las reglas anteriores, a fin de calcular la derivada de una función es también importante conocer las derivadas de las funciones elementales las cuales vienen dadas por la siguiente tabla

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha,\ \alpha \neq 0$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x,\ a > 0$	$a^x log\, a$
$log_a\, x$	$\frac{1}{x log\, a}$	$sen\, x$	$cos\, x$
$cos\, x$	$-sen\, x$	$tg\, x$	$sec^2 x$
$arcsen\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arccos\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$		

Una de las principales utilidades de la derivada es su aplicación al estudio de problemas de mínimos y máximos. Se recuerda

Definición 1.2.8 *Sea $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$, se dice que f alcanza un mínimo local en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in S \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Análogamente se dice que f alcanza un máximo local en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall\, x \in S \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

El siguiente teorema da una condición necesaria para que una función derivable alcance un mínimo o un máximo local en un punto.

Teorema 1.2.9 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ tal que f es derivable en x_0. Si f alcanza un máximo o un mínimo local en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.*

Demostración. Vamos a suponer que f alcanza un mínimo en x_0, la demostración para el caso de un máximo es análoga. Por definición, se tiene

$$f'(x_0)^+ = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

pero como f alcanza un mínimo local en x_0, sabemos que $f(x_0+h)-f(x_0)$ es no negativo para h suficientemente pequeño, por tanto se deduce

$$f'(x_0)^+ = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Análogamente, se prueba

$$f'(x_0)^- = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Usando entonces $f'(x_0) = f'(x_0)^+ = f'(x_0)^-$, se concluye que $f'(x_0)$ sólo puede ser cero. □

Observación 1.2.10 *Nótese que en la demostración anterior se ha usado el hecho de f es derivable tanto a la derecha como a la izquierda de x_0, el resultado es falso si f sólo está definida a un lado de x_0. Como ejemplo consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Está claro que f alcanza el mínimo en cero y el máximo en 1, sin embargo $f'(0) = f'(1) = 1$ (donde estas derivadas serían en realidad derivadas laterales ya que la función sólo la suponemos definida en $[0,1]$).*

El resultado anterior se puede usar por ejemplo para calcular los máximos y los mínimos de una función continua definida en un intervalo cerrado. Se tiene

Proposición 1.2.11 *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua. Entonces los puntos en los que f alcanza máximo o mínimo absoluto (los cuales existen por el teorema de Weierstrass) se encuentran entre alguno de los siguientes puntos*

- *Los extremos del intervalo.*
- *Los puntos de (a,b), en los cuales f no es derivable.*
- *Los puntos de (a,b) en los cuales f es derivable y la derivada se anula.*

Ejemplo 1.2.12 *Sea $f : [-2, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} xe^x \quad si \ -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - cos\, x \quad si\ 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

Calcular los puntos en los que f alcanza máximo y mínimo absoluto.

Comenzar viendo si f es continua. Usando que x, e^x, 1 y $cos\, x$ son continuas, el álgebra de funciones continuas nos dice que la función anterior es continua en todos los puntos salvo quizás en 0 ya que aquí la función está definida de forma distinta a la derecha y a la izquierda. Fácilmente se prueba

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0,$$

y por tanto f es continua también en 0. Por el teorema de Weiestrass alcanza máximo y mínimo absolutos. Para calcularlos, vamos a aplicar el resultado anterior. Necesitaríamos estudiar en qué puntos de $(-2, \pi)$ es derivable la función y dónde lo sea, si la derivada es o no nula. Análogamente a la continuidad, está claro que f es derivable en $(-2, 0) \cup (0, \pi)$. Respecto a la derivada en 0, observemos que en realidad a la hora de calcular máximos y mínimos, no hay problema si entre los puntos que consideramos hay más de los que en principio deberíamos usar, el problema sería que hubiera menos, por tanto independientemente de si f es o no derivable en 0, consideramos este punto como uno entre los que es posible que se alcance máximo y mínimo. Esto es más fácil en general que estudiar la derivabilidad en 0. Si lo hiciéramos tendríamos luego que considerarlo si f no es derivable o sí siéndolo, la derivada es cero y descartarlo si f es derivable con derivada no nula.

Con respecto a los puntos de $(-2, 0) \cap (0, \pi)$ sólo debemos considerar aquellos en los que la derivada es nula. Derivando se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} (x + 1)e^x & \text{si } -2 < x < 0 \\ sen\, x & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Como la función exponencial siempre es positiva $(x + 1)e^x$ sólo se anula en $x = -1 \in (-2, 0)$. Respecto a $sen\, x$, observemos que esta función es no nula en $(0, \pi)$. Por tanto los máximos y mínimos se alcanzan en alguno de los siguientes puntos

- Extremos: -2, π.

- Puntos de $(-2, \pi)$ donde f no es (o no sabemos si es) derivable: 0
- Puntos de $(-2, \pi)$ donde sabemos que f es derivable y su derivada es nula: -1.

Usando ahora

$f(-2) = -2e^{-2} \sim -0.27067, \quad f(-1) = -e^{-1} \sim -0.36788, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 1 - cos\, \pi = 2.$

Se deduce que f alcanza el mínimo absoluto en -1 y el máximo absoluto en 1.

1.3 Teoremas de Rolle y del valor medio y regla de l'Hôpital

Hasta ahora hemos estado mencionando resultados relacionados con la derivada de una función en un punto. Pidiendo que la función sea derivable en todo un intervalo, se obtienen varios resultados importantes. El primero que vamos a ver sirve para probar la existencia de ceros de la derivada de una función.

Teorema 1.3.1 *(Teorema de Rolle) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Una consecuencia importante del resultado anterior es el siguiente teorema

Teorema 1.3.2 *(Teorema de Lagrange o del valor medio o de los incrementos finitos). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1.5}$$

Observación 1.3.3 *El teorema de Rolle se puede obtener como un caso particular del teorema del valor medio, basta observar que si en (1.5) $f(b) = f(a)$ entonces $f'(c) = 0$.*

Observación 1.3.4 *El teorema del valor medio se usa por ejemplo para acotar la diferencia entre los valores de f en los puntos a y b. Obsérvese que como consecuencia del resultado anterior se deduce que si conocemos M tal que*

$$|f'(c)| \leq M, \ \forall\, c \in (a, b),$$

entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|,$$

(al escribir $|b - a|$ *en lugar de* $b - a$ *el resultado se aplica tanto al caso* $a < b$ *como* $b < a$*). Cuando existe la derivada en todo* $[a, b]$ *(en* a *y en* b *serían derivadas laterales) y la derivada es continua, se puede tomar*

$$M = \max_{c \in [a,b]} |f'(c)|,$$

o cualquier valor mayor que éste. Como aplicación de este resultado supongamos que el valor a *en el que tenemos que calcular* f *ha sido obtenido a partir de un experimento o una medición y por tanto no es conocido exactamente. Lo que nosotros conocemos en realidad es una aproximación* b *y lo que también sabemos es que* $|b - a|$ *es menor que una cierta cantidad positiva* δ *(por ejemplo si estamos pesando con una balanza que lo mínimo que pesan son gramos, entonces* δ *sería un gramo). Las fórmulas anteriores nos dirían entonces*

$$|f(b) - f(a)| \leq M\delta,$$

lo cual nos da una estimación sobre en cuanto nos estamos equivocando al calcular f *en el punto* b *que es el que conocemos y no en el punto* a *que es donde deberíamos calcularla.*

Interpretación geométrica del teorema del valor medio.

Obsérvese que si consideramos la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, su pendiente viene dada por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

pero la ecuación (1.5), nos dice que este número coincide con $f'(c)$ o lo que es lo mismo con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$, por tanto ambas rectas son paralelas. Es decir geométricamente el teorema del valor medio asegura la existencia de un punto $c \in (a, b)$ tal que la recta tangente a la gráfica de f que pasa por $(c, f(c))$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Otra de las utilidades del teorema valor medio es que permite caracterizar cuando una función es creciente o decreciente. Recordamos las siguientes definiciones.

Definición 1.3.5 *Sea* $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*

Se dice que f es creciente (respectivamente decreciente) si para todos $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \leq x_2$, se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Se dice que f es estrictamente creciente (respectivamente estrictamente decreciente) si para todos $x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$).

Para verificar si una función es creciente o decreciente se suele usar

Proposición 1.3.6 *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) tal que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$ (respectivamente $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$). Entonces f es creciente en $[a,b]$ (respectivamente decreciente en $[a,b]$).*

Demostración. Vamos a suponer $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, el otro caso es análogo.

Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $x_1 < x_2$. Aplicando el teorema del valor medio a f en $[a,b]$, se tiene entonces que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

ya que $f'(c) \geq 0$. Esto prueba $f(x_2) \geq f(x_1)$ y por tanto que f es creciente. $\square$

La misma demostración prueba el siguiente resultado

Proposición 1.3.7 *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ (respectivamente $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$). Entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$ (respectivamente estrictamente decreciente en $[a,b]$).*

Como consecuencia del resultado anterior se tiene la siguiente condición suficiente de máximo y mínimo, de gran utilidad en la práctica.

Proposición 1.3.8 *Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y supongamos que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$, $f'(x) \geq 0$ en (a,c), $f'(x) \leq 0$ en (c,b) entonces f alcanza un máximo local en c. Análogamente, si $f'(c) = 0$, $f'(x) \leq 0$ en (a,c), $f'(x) \geq 0$ en (c,b) entonces f alcanza un mínimo local en c.*

Existe un teorema del valor medio más general que el de Lagrange que es lo que se conoce como teorema del valor medio de Cauchy, el cual no vamos a estudiar, sin embargo si que es importante la siguiente consecuencia de ese resultado que usaremos a menudo para el cálculo de límites.

Teorema 1.3.9 *(***Regla de l'Hôpital***) Sean $f, g : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables tales que*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Supongamos además que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces, si existe el límite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

(finito o infinito), se tiene

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Observación 1.3.10 *Aunque hemos dado el teorema anterior solamente para límites por la derecha, también es cierto para límites por la izquierda y por tanto para límites. También se aplica al caso de límites en $+\infty$ y $-\infty$. Además de servir para indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ también sirve para las de tipo $\frac{\infty}{\infty}$.*

Ejemplo 1.3.11 *Calcular el límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\, x}{x^2}$$

Vemos que se trata de una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de l'Hôpital tendremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\, x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{2x},$$

que vuelve a ser indeterminado. Aplicando la regla de l'Hôpital nuevamente se deduce entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\, x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\, x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 1.3.12 *Calcular*

$$\lim_{x\to 0} (sen\, x)^x$$

(obsérvese que el límite es en realidad un límite por la derecha ya que si $x < 0$ y cercano a cero entonces $sen\, x < 0$ y por tanto $(sen\, x)^x$ no está bien definido).

Se trata de una indeterminación 0^0. Usando la fórmula

$$\lim_{x\to 0} (sen\, x)^x = \lim_{x\to 0} e^{log((sen\, x)^x)} = \lim_{x\to 0} e^{x log\, (sen\, x)}$$

el límite que tenemos que calcular es

$$\lim_{x\to 0} x\, log\,(sen\, x)$$

que es una indeterminación de la forma 0∞. A fin de poder aplicar la regla de l'Hôpital escribimos

$$\lim_{x\to 0} xlog\,(sen\, x) = \lim_{x\to 0} \frac{log\,(sen\, x)}{\frac{1}{x}},$$

de esta forma pasamos a una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ a la que si podemos aplicar la regla de l'Hôpital. Se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{log\,(sen\, x)}{\frac{1}{x},} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{cos\, x}{sen\, x}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2 cos\, x}{sen\, x}.$$

El límite que tenemos ahora es de la forma $\frac{0}{0}$ y por tanto podemos aplicar l'Hôpital nuevamente para obtener el resultado, sin embargo es más fácil usar antes

$$\lim_{x\to 0} cos\, x = 1$$

y por tanto

$$-\lim_{x\to 0} \frac{x^2 cos\, x}{sen\, x} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{sen\, x}$$

con lo que l'Hôpital se puede ahora aplicar más fácilmente al tener expresiones más simples para derivar. Se tiene

$$-\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{sen\, x} = -\lim_{x\to 0} \frac{2x}{cos\, x} = 0,$$

con lo cual

$$\lim_{x\to 0} (sen\, x)^x = e^0 = 1.$$

Otra aplicación de la regla de l'Hôpital es el siguiente resultado que puede ser de ayuda para estudiar la derivada de una función en un punto.

Proposición 1.3.13 *Sea $f : [a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, . Supongamos que f es continua en $[a, b)$, derivable en (a, b) y*

$$\exists \lim_{x\to a^+} f'(x) = l.$$

Entonces f es derivable por la derecha en a y se tiene

$$f'(a)^+ = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l.$$

El resultado análogo para calcular derivadas por la izquierda, también es cierto.

Demostración. Obsérvese que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando l'Hôpital, se tiene

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(a+h)}{1} = l,$$

lo que prueba el resultado. □

Ejemplo 1.3.14 *Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = sen\,|x|$.*

Lo primero que debemos hacer es estudiar la continuidad, teniendo en cuenta que las funciones $g(x) = |x|$ y $h(x) = sen\,x$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, se deduce que $f(x) = h \circ g$ es continua. Para estudiar la derivabilidad es conveniente escribir

$$f(x) = \begin{cases} sen\,x & \text{si } x \geq 0 \\ sen(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} sen\,x & \text{si } x \geq 0 \\ -sen\,x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

con lo que teniendo en cuenta que la función seno es derivable, se deduce que f es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y que se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} cos\,x & \text{si } x > 0 \\ -cos\,x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para la derivabilidad en cero aplicamos el resultado anterior, para lo que usamos

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} cos\,x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (-cos\,x) = -1.$$

Por tanto

$$\exists\, f'(0)^+ = 1, \qquad \exists\, f'(0)^- = -1.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en 0.

Observación 1.3.15 *A la hora de aplicar el resultado anterior, hay que tener cuidado ya que puede ocurrir que no exista el límite*

$$\lim_{x\to a^+} f'(x)$$

y sin embargo la función sí sea derivable por la derecha. El problema análogo también se puede presentar por la izquierda. Para evitar esto quizás sea mejor estudiar la existencia de derivadas laterales directamente por la definición.

Ejemplo 1.3.16 *Estudiar la derivabilidad en cero de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\,\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Comenzamos estudiando la continuidad, para ello teniendo en cuenta que

$$-1 \leq sen(\frac{1}{x}) \leq 1, \quad \forall\, x \neq 0$$

y que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0,$$

se tiene

$$\lim_{x \to 0} x^2 sen\,(\frac{1}{x}) = 0 = f(0). \tag{1.6}$$

Por tanto f es continua. Para la derivabilidad podemos tratar de aplicar el resultado anterior para lo cual usamos

$$f'(x) = 2x sen\,(\frac{1}{x}) + x^2 cos(\frac{1}{x})(\frac{-1}{x^2}) = 2x sen\,(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})$$

donde observamos que análogamente a (1.6)

$$\lim_{x \to 0} 2x sen\,(\frac{1}{x}) = 0.$$

La función $cos(\frac{1}{x})$ en cambio no tiene límite cuando x tiende a cero, ni por la izquierda ni por la derecha ya que lo que hace es oscilar entre -1 y 1. Esto implica que no puede existir ninguno de los límites

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x), \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x),$$

ya que si por ejemplo

$$\exists \lim_{x \to 0^+} f'(x) = l,$$

entonces despejando de la fórmula que nos da la derivada de f, se tendría

$$\lim_{x \to 0^+} cos \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} (2x sen\,(\frac{1}{x}) + f'(x)) = l,$$

pero este límite ya sabemos que no existe.

Veamos que sin embargo, aunque no existe ninguno de los límites laterales de f' en cero, la función f es derivable en 0 y su derivada es cero. Usamos la definición de derivada que nos da (es parecido a (1.6)

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 sen(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \to 0} h sen(\frac{1}{h}) = 0.$$

1.4 Derivadas de orden superior

El concepto de derivada nos da bastante información acerca del comportamiento de una función cerca de un punto. A veces es también interesante usar la derivada de la propia función derivada. Se tiene la siguiente definición.

Definición 1.4.1 *Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$. Si la función f' (derivada de f) es derivable en x_0, entonces se dice que f es dos veces derivable en x_0 y se denota*

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

A este número se le llama la derivada segunda de f en x_0. Análogamente, se pueden definir las derivadas tercera, cuarta etc.

Observación 1.4.2 *Igual que vimos que la derivada primera de una función se podía interpretar desde un punto de vista físico como una velocidad, la derivada segunda se interpreta como una aceleración.*

Una de las primeras utilidades de la derivada segunda es que nos permiten dar una condición suficiente para que una función alcance un máximo o un mínimo local en un punto. De hecho, se tiene

Proposición 1.4.3 *Sea $f = (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Supongamos que f es dos veces derivable en x_0 y que $f'(x_0) = 0$. Se tiene*

1. *Si $f''(x_0) > 0$ entonces f alcanza un máximo local en x_0.*

2. *Si $f''(x_0) < 0$ entonces f alcanza un mínimo local en x_0.*

Pensamos sin embargo que la proposición (1.3.8) es más simple de usar ya que evita calcular la derivada segunda, además surge el problema de qué ocurre si $f''(x_0) = 0$.

La utilidad principal que va a tener la derivada segunda en el presente curso va a ser que nos permite estudiar si una función es convexa o cóncava.

Definición 1.4.4 *Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es convexa (respectivamente cóncava) en (a,b) si para todo $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 \leq x_2$, la gráfica de f correspondiente al intervalo $[x_1, x_2]$ queda por debajo (respectivamente por encima) del segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.*

Igual que el crecimiento y decrecimiento de una función se podía estudiar a partir del signo de la derivada primera, la concavidad y convexidad se puede ver a partir del signo de la derivada segunda. Se tiene

Proposición 1.4.5 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable en (a, b).*

1. *Si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es convexa en (a, b).*
2. *Si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es cóncava en (a, b).*

En gran cantidad de ocasiones, las funciones no son cóncavas o convexas en todo su dominio sino que pueden pasar de cóncavas a convexas o viceversa. Ello conduce al concepto de punto de inflexión.

Definición 1.4.6 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f tiene un punto de inflexión en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que o bien f es convexa en $(x_0 - \delta, x_0)$ y cóncava en $(x_0, x_0 + \delta)$ o bien f es cóncava en $(x_0 - \delta, x_0)$ y convexa en $(x_0, x_0 + \delta)$.*

La condición necesaria para la existencia de punto de inflexión es la siguiente

Proposición 1.4.7 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ tal que f es dos veces derivable en x_0. Si f tiene un punto de inflexión en x_0 entonces $f''(x_0) = 0$.*

Para calcular los puntos de inflexión lo que se hace entonces es calcular los ceros de la derivada segunda. Aquellos ceros en los cuales f'' cambie de signo serán los puntos de inflexión (ya que en ellos f cambiará de convexa a cóncava o al revés). También se puede saber si un punto es de inflexión viendo la derivada tercera (aunque pensamos que es más simple ver el signo de la derivada segunda). El resultado es el siguiente

Proposición 1.4.8 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ tal que f es tres veces derivable en x_0. Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$ entonces f alcanza un punto de inflexión en x_0.*

1.5 Representación gráfica de funciones

Los resultados correspondientes al crecimiento y decrecimiento de una función, junto con la concavidad y convexidad y los cálculos de dominios y asíntotas que vimos en el tema anterior, se aplican para obtener la representación gráfica de funciones.

Ejemplo 1.5.1 *Representa gráficamente la función*

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}.$$

Comenzamos calculando el dominio de la función. Usando que la función logaritmo sólo está definida para valores de x positivos, $\sqrt{x}$ para valores positivos y el cero y que el denominador sólo se anula en $x = 0$. Se tiene

$$D(f) = (0, +\infty).$$

Ahora habría que estudiar las simetrías. En este caso está claro que no puede haberlas ya que la función no existe para valores negativos de x.

Corte con los ejes (optativo):

Corte con el eje de ordenadas no es posible ya que $x = 0$ no está en el dominio.

Para el corte con el eje de abcisas tenemos que resolver

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \log x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

La función corta al eje de abcisas en el punto $(1, 0)$.

Asíntotas horizontales: Calculamos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de l'Hôptital tendremos

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Al haber una asíntota horizontal en $+\infty$ y no estar definida la función para valores negativos de x, no puede haber asíntota oblícua.

Asíntotas verticales: Como la función logaritmo se va a infinito en cero, calculamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty,$$

donde para el signo hemos usado que el denominador $\sqrt{x}$ es positivo. Por tanto la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos: Calculamos la derivada de f

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x}{x} = \frac{2 - \log x}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

Igualando $f'(x)$ a cero para calcular los posibles máximos y mínimos, tenemos

$$2 - log\, x = 0 \Rightarrow log\, x = 2 \Rightarrow x = e^2.$$

A continuación miramos el signo de f' en cada uno de los dos intervalos en los que este punto nos divide el dominio de f que son $(0, e^2)$, $(e^2, +\infty)$. Como sabemos que por continuidad f' no cambia de signo en estos intervalos podemos tomar por ejemplo $x = 1 \in (0, e^2)$ y calcular entonces $f'(1) = 1 > 0$ con lo que $f'(x) > 0$ en $(0, e^2)$. Por tanto f es creciente en $(0, e^2)$. Análogamente tomando $x = e^3 \in (e^2, +\infty)$ tenemos

$$f'(e^3) = \frac{-1}{2e^{\frac{9}{2}}} < 0.$$

Por tanto f es decreciente en $(e^2, +\infty)$. La función tiene un máximo en $(e^2, f(e^2)) = (e^2, \frac{2}{e})$.

Concavidad y convexidad, puntos de inflexión: Calculamos la derivada segunda

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - log\, x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)' = \frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{x}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(2 - log\, x)}{x^3} = \frac{-8 + 3log\, x}{4x^{\frac{5}{2}}}.$$

Igualando f'' a cero se tiene

$$\frac{-8 + 3log\, x}{2x^{\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow -8 + 3log\, x = 0 \Rightarrow log\, x = \frac{8}{3} \Rightarrow x = e^{\frac{8}{3}}.$$

Miramos ahora el signo de f'' en $(0, e^{\frac{8}{3}})$, $(e^{\frac{8}{3}}, +\infty)$, se tiene

$$1 \in (0, e^{\frac{8}{3}}), \qquad f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ en } (0, e^{\frac{8}{3}})$$

$$e^3 \in (e^{\frac{8}{3}}, +\infty), \qquad f''(e^3) = \frac{1}{4e^{\frac{15}{3}}} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ en } (e^{\frac{8}{3}}, +\infty).$$

Deducimos por tanto que f es cóncava en $(0, e^{\frac{8}{3}})$ y convexa en $(e^{\frac{8}{3}}, +\infty)$. En el punto $(e^{\frac{8}{3}}, f(e^{\frac{8}{3}})) = (e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3e^{\frac{4}{3}}})$, hay un punto de inflexión.

Con estos datos podemos ya dibujar la gráfica de la función.