Tema 5

Integración

La integración junto con la derivación constituyen quizás los dos procesos de paso al límite fundamentales del cálculo. Este tema está dedicado a introducir algunos elementos básicos del cálculo integral.

5.1 Primitivas de una función

Comenzamos con el concepto de primitiva de una función, concepto que está estrechamente relacionado con el de derivada. Se trata del paso inverso a la derivación, más concretamente

Definición 5.1 *Sea* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función real de variable real. Se dice que* $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*, derivable en* (a, b)*, es una* **primitiva** *de* f *si* $F' = f$*.*

Ejemplo 5.2

1. *La función constante* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $F(x) = 6$ *es una primitiva de la función constante* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $f(x) = 0$*. También* $F(x) = 102$ *es una primitiva de* f*.*

2. *La función* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $F(x) = -cos(x)$ *es una primitiva de* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = sen(x)$*. Obsérvese que* $F(x) = -cos(x) + 3$ *también es una primitiva de* f*.*

Del ejemplo anterior se deduce que una función f puede tener más de una primitiva. Al conjunto de todas las primitivas de f lo denominaremos **integral indefinifda** de f y lo denotaremos por $\int f(x)dx$, es decir

$$\int f(x)dx = \{F : F' = f\}.$$

En el Ejemplo 3.2 también observamos que a partir de una primitiva F podemos obtener muchas otras simplemente sumándole una constante. De hecho, con ayuda del Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial (ver Tema 2), se puede demostrar que de esa manera se pueden obtener todas las primitivas de f.

Teorema 5.3 *Si* $F_1 : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $F_2 : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *son primitivas de* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$*, entonces* $F_1 - F_2$ *es una función constante.*

A partir de este resultado, si F es una primitiva de f, tenemos la igualdad

$$\int f(x)dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\},$$

que expresaremos de manera más simple por

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ejemplo 5.4

1. $\displaystyle\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

2. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

Si leemos la tabla de derivadas dada en el Tema 2 de derecha a izquierda, obtenemos una tabla de primitivas. Basta sumar a éstas una constante arbitraria para tener las correspondientes integrales indefinidas, conocidas como **integrales inmediatas**. He aquí algunas de ellas:

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \cos(x) dx = sen(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln(|x|) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = tg(x) + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$$

$$\int \frac{1}{sen^2(x)} dx = -cot(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen(x) + C$$

$$\int sen(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + C$$

A partir de las ya conocidas reglas de derivación es fácil comprobar las siguientes propiedades:

$$\boxed{\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad \forall k \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx}$$

Ejemplo 5.5

1. $\displaystyle \int \left(5x^5 - 3x^4 + 3\right) dx = 5 \int x^5 dx - 3 \int x^4 + 3 \int dx = 5\frac{x^6}{6} - 3\frac{x^5}{5} + 3x + C$

2. $\displaystyle \int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^3} dx = \int \frac{x^2}{x^3} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-5/2} dx = ln(x) - \frac{2}{3} x^{-3/2} + C$

Las próximas secciones están dedicadas a introducir algunos procedimientos para el cálculo de integrales indefinidas.

5.2 Integración por cambio de variable

El método de integración quizás más utilizado es el cambio de variable, que se basa directamente en la regla de la cadena.

Sea F una primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, y sea g una función dada. Si definimos $h(x) = (F \circ g)(x) = F(g(x))$, sabemos por la regla de la cadena que

$$h'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Esto prueba que $F(g(x))$ es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$, y por tanto que se verifica

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C. \tag{5.1}$$

Esta igualdad sugiere el método de integración por cambio de variables. Para calcular una primitiva de $f(g(x))g'(x)$ basta obtener una primitiva F de f y componerla con g. De manera más abreviada esto se puede escribir

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt} \tag{5.2}$$

Esta igualdad se obtiene al hacer en (3.1) la sustitución $t = g(x)$, $dt = g'(x)dx$.

Ejemplo 5.6

1. $\displaystyle\int sen(x)cos(x)dx \overset{(1)}{=} \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{sen^2(x)}{2} + C$

   $^{(1)}$ *Cambio de variable:* $\left\{\begin{array}{l} t = sen(x) \\ dt = cos(x)dx \end{array}\right.$

2. $\displaystyle\int sen(2x)dx \overset{(1)}{=} \int sen(t)\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int sen(t)dt = -\frac{1}{2}cos(t) + C = -\frac{1}{2}cos(2x) + C$

   $^{(1)}$ *Cambio de variable:* $\left\{\begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2} \end{array}\right.$

3. $\displaystyle\int x\sqrt{1+5x^2}dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{10}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{10}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{15}\sqrt{(1+5x^2)^3} + C$

   $^{(1)}$ *Cambio de variables:* $\left\{\begin{array}{l} t = 1+5x^2 \\ dt = 10xdx \Rightarrow xdx = \dfrac{dt}{10} \end{array}\right.$

5.3 Integración por partes

Sean $u, v : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en (a, b). Entonces sabemos que la función producto $uv : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en (a, b) y su derivada viene dada por

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

De aquí se obtiene la igualdad

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x),$$

que al integrarse proporciona

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Esta relación se suele escribir de una forma más simplificada denotando $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, adoptando entonces la forma

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

conocida como **fórmula de integración por partes**.

Este método de integración suele ser útil en los casos donde el integrando se puede descomponer como el producto de una función por la derivada de otra. Existen también muchas otras situaciones donde es aplicable. Mostramos a continuación algunos de éstas:

1. Integrales de las funciones inversas de las trigonométricas.

Ejemplo 5.7

$$\int arctg(x)dx \overset{(1)}{=} x\,arctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx \overset{(2)}{=} x\,arctg(x) - \frac{1}{2}ln|1+x^2| + C$$

$^{(1)}$*Integración por partes:* $\begin{cases} u = arctg(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$

$^{(2)}$*Cambio de variable:* $\begin{cases} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{cases}$

2. Integrales de la forma: $\int x^n sen(x)dx$, $\int x^n cos(x)dx$, $\int x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 5.8

$$\int x^2 cos(x)dx \overset{(1)}{=} x^2 sen(x) - 2\int xsen(x)dx \overset{(2)}{=} x^2 sen(x) + 2xcos(x) - 2sen(x) + C$$

$^{(1)}$*Integración por partes:* $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = cos(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \\ v = sen(x) \end{cases}$

$^{(2)}$*Integración por partes:* $\begin{cases} u = x \\ dv = sen(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = x \\ v = -cos(x) \end{cases}$

3. Integrales de la forma: $\int sen^n(x)dx$, $\int cos^n(x)dx$, $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 5.9

$\int sen^2(x)dx \stackrel{(1)}{=} -sen(x)cos(x) + \int cos^2(x)dx \stackrel{(2)}{=} -sen(x)cos(x) + \int (1 - sen^2(x))dx =$
$-sen(x)cos(x) + x - \int sen^2(x)dx$

$^{(1)}$*Integración por partes:* $\left\{\begin{array}{l} u = sen(x) \\ dv = sen(x)dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = cos(x) \\ v = -cos(x) \end{array}\right.$

$^{(2)} sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \Rightarrow cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$

Despejando de la igualdad anterior $\int sen^2(x)dx$ *obtenemos*

$$\int sen^2(x)dx = \frac{1}{2}\left[-sen(x)cos(x) + x\right] + C.$$

Observación 5.10 *Cuando $n = 2$, como en el ejemplo anterior, estas integrales se pueden calcular con ayuda de la fórmula del coseno del ángulo doble*

$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x),$$

que en combinación con la identidad $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$ da

$$sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}.$$

Por ejemplo,

$$\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int cos(2x)dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{sen(2x)}{2}\right] + C.$$

5.4 Integración de funciones racionales

En esta sección desarrollamos procedimientos para el cálculo de integrales de funciones racionales, es decir de la forma

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx, \quad \text{donde} \left\{\begin{array}{l} p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0,\ a_m \neq 0 \\ q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0,\ b_n \neq 0 \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Siempre podemos suponer que $\frac{p(x)}{q(x)}$ es una **función racional propia**, es decir que $m < n$. En caso contrario, dividiendo $p(x)$ por $q(x)$, obtenemos dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = c(x)q(x) + r(x)$ y $grado(r(x)) < grado(q(x))$. Entonces, gracias a la igualdad

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \left(\frac{c(x)q(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)}\right) = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

reducimos el cálculo de la integral de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ al cálculo de la integral de un polinomio $c(x)$ y de una función racional $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ que sí es propia.

Ejemplo 5.11

$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2+1} \overset{(1)}{=} \int \left(3x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \int 3x dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx \overset{(2)}{=} \frac{3x^2}{2} + ln(x^2+1)+C$$

$^{(1)}3x^3+5x = 3x(x^2+1)+2x$

$^{(2)}$*Haciendo el cambio de variable* $t = x^2+1$ *resulta*

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{dt}{t} = ln(t)+C = ln(x^2+1)+C$$

Pasemos pues a estudiar la integral (3.3) cuando $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ sea una función racional propia (i.e., $m < n$). En ese caso tenemos que expresar $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ en sumas de fracciones simples, y para ello es necesario descomponer el polinomio $q(x)$ en factores irreducibles.

Salvo algunas excepciones muy particulares que veremos en los ejercicios, aquí siempre supondremos que todas las raíces de $q(x)$ son números reales, lo que nos permitirá expresar

$$q(x) = b_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\dots(x-x_k)^{m_k}, \quad x_1,\, x_2,\dots,x_k\in\mathbb{R},\; m_1,\, m_2,\dots,m_k\in\mathbb{N}.$$

Aquí x_1, x_2, …, x_k representan las raíces de $q(x)$ (esto es, las soluciones de la ecuación $q(x) = 0$) y m_1, m_2, …, m_k sus multiplicidades.

Bajo las condiciones anteriores se puede demostrar la igualdad

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} = &\left[\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{A_{m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}\right]+\\ &+\left[\frac{B_1}{(x-x_2)}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\dots+\frac{B_{m_2}}{(x-x_2)^{m_2}}\right]+\dots+\\ &+\left[\frac{C_1}{(x-x_k)}+\frac{C_2}{(x-x_k)^2}+\dots+\frac{C_{m_k}}{(x-x_k)^{m_k}}\right]\end{aligned}$$

para ciertos números reales A_1, A_2, …, C_{m_k}, y por consiguiente

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = &\int \frac{A_1}{(x-x_1)}dx+\int \frac{A_2}{(x-x_1)^2}dx+\dots+\int \frac{A_{m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}dx+\\ &+\int \frac{B_1}{(x-x_2)}dx+\int \frac{B_2}{(x-x_2)^2}dx+\dots+\int \frac{B_{m_2}}{(x-x_2)^{m_2}}dx+\dots+\\ &+\int \frac{C_1}{(x-x_k)}dx+\int \frac{C_2}{(x-x_k)^2}dx+\dots+\int \frac{C_{m_k}}{(x-x_k)^{m_k}}dx\,.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Las integrales que figuran en el miembro derecho de la igualdad anterior se calculan fácilmente teniendo en cuenta

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = \begin{cases} ln(x-\alpha)+C & \text{si } m=1 \\ \dfrac{(x-\alpha)^{-m+1}}{-m+1}+C & \text{si } m\neq 1 \end{cases} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N},$$

y por tanto hemos resuelto (3.3).

Ejemplo 5.12

$$\int \frac{7x-3}{x^2-x-2}dx \overset{(1)}{=} \int \frac{17/3}{x-2}dx + \int \frac{4/3}{x+1}dx = \frac{17}{3}ln|x-2| + \frac{4}{3}ln|x+1| + C$$

(1) *La ecuación $x^2-x-2=0$ tiene dos raíces simples dadas por $x_1=2$, $x_2=-1$, luego $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. Por tanto, existen dos constantes A y B tales que*

$$\frac{7x-3}{x^2-x-2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{B_1}{x+1} = \frac{A_1(x+1)+B_1(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A_1+B_1)x+A_1-2B_1}{x^2-x-2}.$$

Como las fracciones que aparecen en los extremos son iguales y tienen el mismo denominador, los numeradores han de ser iguales

$$7x-3=(A_1+B_1)x+A_1-2B_1\,.$$

Como dos polinomios son iguales si y sólo si son iguales dos a dos los coeficientes de las mismas potencias de x, de la relación anterior se deduce

$$\left.\begin{array}{l} 7=A_1+B_1 \\ 3=A_1-2B_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A_1=\frac{17}{3},\ B_1=\frac{4}{3}.$$

Ejemplo 5.13

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} \overset{(1)}{=} \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1}dx + \int \frac{dx}{(x-1)^2}dx = ln|x| - ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

(1) *En este caso las raíces del denominador son $x_1=0$ simple ($m_1=1$) y $x_2=1$ doble ($m_2=2$). Por tanto*

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_1}{(x-1)^2} = \frac{A_1(x-1)^2+B_1x(x-1)+B_2x}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(A_1+B_1)x^2+(-2A_1-B_1+B_2)x+A_1}{x(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = (A_1 + B_1)x^2 + (-2A_1 - B_1 + B_2)x + A_1 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ -2A_1 - B_1 + B_2 = 0 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A_1 = 1,\ B_1 = -1,\ B_2 = 1\,.$$

Ejemplo 5.14

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx \stackrel{(1)}{=} \int \frac{9dx}{x+1} - \int \frac{4dx}{(x+1)^2}dx - \int \frac{9dx}{x+2}dx - \int \frac{4dx}{(x+2)^2}dx =$$

$$= ln|x+1| + 4\frac{1}{x+1} - 9ln|x+2| + 4\frac{1}{x+2} + C$$

[(1)] *El denominador tiene dos raíces dobles $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, luego*

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x+2)^2 + A_2(x+2)^2 + B_1(x+1)^2(x+2) + B_2(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(A_1+B_1)x^3 + (5A_1 + A_2 + 4B_1 + B_2)x^2 + (8A_1 + 4A_2 + 5B_1 + 2B_2)x}{(x+1)^2(x+2)^2} +$$

$$+ \frac{4A_1 + 4A_2 + 2B_1 + B_2}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ 5A_1 + A_2 + 4B_1 + B_2 = 1 \\ 8A_1 + 4A_2 + 5B_1 + 2B_2 = 3 \\ 4A_1 + 4A_2 + 2B_1 + B_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow A_1 = 9,\ A_2 = -4,\ B_1 = -9,\ B_2 = -4\,.$$

5.5 Algunas integrales reducibles a integrales racionales

En esta sección vamos a estudiar algunas integrales de funciones que se pueden transformar mediante adecuados cambios de variable en funciones racionales. Estas últimas se calcularán siguiendo la técnica mostrada en la sección anterior.

1. Integrales de la forma

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n_k}}\right) dx$$

donde $R(u, v_1, \ldots, v_k)$ es una función racional en u, v_1, $\ldots$,v_k, es decir, $R(u, v_1, \ldots, v_k)$ se obtiene a partir de un número finito de operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) sobre u, v_1, $\ldots$,v_k.
Estas integrales se reducen a integrales de funciones racionales mediante el cambio de variable

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{con } n = m.c.m.\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$$

($m.c.m.$ = mínimo común múltiplo).

Ejemplo 5.15

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \overset{(1)}{=} \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int (t^2-t+1)dt - 6\int \frac{dt}{t+1}dt =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}^2 + 6\sqrt[6]{x} - 6ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

$^{(1)}$ *Cambio de variable:* $\begin{cases} t^6 = x \quad (m.c.m.\{2,3\} = 6) \\ 6t^5 dt = dx \end{cases}$

2. Integrales de la forma $\int R(e^x)\, dx$, con $R(u)$ una función racional. Estas integrales se transforman en integrales de funciones racionales mediante el cambio de variable $t = e^x$.

Ejemplo 5.16

$$\int \frac{3e^{4x}+5e^{2x}}{e^{2x}+1}dx \overset{(1)}{=} \int \frac{3t^4+5t^2}{(t^2+1)t}dt = \int \frac{3t^3+5t}{t^2+1}dt \overset{(2)}{=} \frac{3}{2}t^2 + ln|t^2+1| + C =$$

$$= \frac{3}{2}e^{2x} + ln|e^{2x}+1| + C$$

$^{(1)}$ *Cambio de variable:* $\begin{cases} t^6 = x \quad (m.c.m.\{2,3\} = 6) \\ 6t^5 dt = dx \end{cases}$

$^{(2)}$ *Ver Ejemplo 3.11*

3. Integrales de la forma

$$\int R(sen(x), cos(x))\, dx$$

donde $R(u, v) = p(u, v)/q(u, v)$ es una función racional en u, v tal que

i) O bien uno de los polinomios $p(u, v)$, $q(u, v)$ es par respecto de u y el otro es impar respecto de u.

ii) O bien uno de los polinomios $p(u, v)$, $q(u, v)$ es par respecto de v y el otro es impar respecto de v.

En el primer caso el integrando se transforma en uno racional mediante el cambio de variable $t = cos(x)$ y en el segundo caso mediante el cambio $t = sen(x)$.

Ejemplo 5.17

$$\int \frac{sen(x)}{sen(x)^2 + cos(x) - 1} dx \overset{(1)}{=} \int \frac{dt}{t(t-1)} dt = \int \frac{dt}{t-1} dt - \int \frac{dt}{t} dt = ln|t-1| - ln|t| + C =$$

$$= ln|cos(x) - 1| - ln|cos(x)| + C$$

$^{(1)}$ *Cambio de variable:* $\begin{cases} t = cos(x) \\ dt = -sen(x)dx \end{cases}$

4. Integrales de la forma $\int R\,(tg(x))\,dx$, con $R(u)$ una función racional. Estas integrales se transforman en integrales de funciones racionales mediante el cambio de variable $t = tg(x)$.

Ejemplo 5.18

$$\int \frac{tg^3(x)}{tg^2(x) - 1} dx \overset{(1)}{=} \int \frac{t^3}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = \int \frac{t^3}{t^4 - 1} dt = \frac{1}{4} ln|t^4 - 1| + C =$$

$$= \frac{1}{4} ln|tg^4(x) - 1| + C$$

$^{(1)}$ *Cambio de variable:* $\begin{cases} t = tg(x) \\ dt = (1 + tg^2(x))dx = (1 + t^2)dx \end{cases}$

5.6 La integral definida

El concepto de integral definida está estrechamente relacionado con el problema de definir y calcular el área de regiones planas. En geometría elemental, partiendo de que el área de un rectángulo es el producto de las longitudes de sus lados, se obtienen las fórmulas que dan el área de regiones poligonales sencillas (triángulos, paralelogramos, trapecios, polígonos regulares, . . .). Sin embargo, los procedimientos empleados resultan insuficientes para tratar regiones limitadas por arcos de curva.

En el siglo III a.J.C. Arquímedes calculó el área de un círculo aproximándolo por las áreas de polígonos regulares inscritos con un número elevado de lados. También calculó el área del recinto limitado por el segmento de parábola $y = x^2$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = b$, siendo b un número real positivo arbitrario, por un método muy parecido al que se emplea para introducir la integral definida. El método, conocido como método exhaustivo, consiste en aproximar sucesivamente por defecto y por exceso mediante regiones rectangulares. Así, para calcular el área A anterior, se divide $[0, b]$ en partes iguales (en las Figuras 1 y 2 se ha dividido en 4 partes) y se considera que el valor A está comprendido entre la suma de las áreas de los rectángulos del tipo que se muestra en la Figura 1 y la suma de las áreas de los rectángulos del tipo que se muestra en la Figura 2. Cuando el número de divisiones crece, dichas sumas se aproximan a A. De este modo Arquímedes encontró que A valía $b^3/3$.

A partir de las ideas anteriores y dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, vamos a introducir el concepto de integral definida de f en $[a, b]$. Dicho valor se representa por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y cuando f es no negativa coincide con el área encerrado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes de igual longitud $h = (b - a)/n$ mediante los puntos $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $\ldots$,$x_n = b$. Denotamos por m_1 y M_1 respectivamente, el valor mínimo y el valor máximo de f en el intervalo $[x_0, x_1]$ (estos valores existen por la continuidad de f y el Teorema de Weierstrass), por m_2 y M_2 respectivamente, el valor mínimo y el valor máximo de f en el intervalo $[x_1, x_2]$, y así sucesivamente hasta m_n y M_n que representan el valor mínimo y máximo de f en $[x_{n-1}, x_n]$. Gracias a la continuidad de f, se puede demostrar que los siguientes límites existen y son iguales

$$\lim_{n\to\infty} [m_1h + m_2h + \ldots + m_nh] \quad \text{(o abreviadamente } \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i\text{)},$$

$$\lim_{n\to\infty} [M_1h + M_2h + \ldots + M_nh] \quad \text{(o abreviadamente } \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i\text{)}.$$

Definición 5.19 *En las condiciones precedentes, se llama* **integral definida** *de f en*

$[a,b]$, y se denota $\int_a^b f(x)dx$, al valor

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i} \tag{5.5}$$

Observación 5.20 *Otra definición equivalente a la anterior en el marco que nos ocupa es*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Destacar que el sumatorio que aparece en esta definición es más fácil de evaluar que los que aparecen en (3.5) en los que se precisa el cálculo previo de los valores m_i, M_i para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Algunas propiedades de la integral definida:

1. Si m y M son respectivamente el valor mínimo y máximo de f en $[a,b]$, entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$
2. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,.$
3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,\ \forall c \in \mathbb{R}\,.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \forall c \in (a,b)\,.$
5. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\,.$$

El siguiente resultado, conocido como Regla de Barrow, es de gran importancia. Relaciona la integral definida de f con las funciones primitivas de f, es decir, con su integral indefinida.

Teorema 5.21 (Regla de Barrow) *Si $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y F es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

En la práctica la diferencia $F(b)-F(a)$ se suele escribir de manera abreviada por $[F(x)]_a^b$. La Regla de Barrow proporciona un método para calcular la integral definida de una función siempre que se conozca una primitiva de ésta.

Ejemplo 5.22
$\displaystyle\int_0^5 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{5^3}{3} - 0 = \frac{5^3}{3}\,.$
$\displaystyle\int_0^\pi sen(x)dx = [-cos(x)]_0^\pi = -cos(\pi) + cos(0) = 2\,.$
$\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x(x-1)^2} \overset{(1)}{=} \left[ln|x| - ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]_2^3 = ln(3) - 2ln(2) + \frac{1}{2}\,.$
$^{(1)}$ *Ver Ejemplo 3.13*

Observación 5.23 *A lo largo de esta sección hemos supuesto que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$. Sin embargo, todo sigue siendo válido si admitimos que f presenta un número finito de discontinuidades de salto finito. Basta descomponer $[a,b]$ en intervalos donde f si sea continua y podamos aplicar las propiedades anteriores.*
Por ejemplo, $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \in [0,2] \\ x^2 & si\ x \in (2,3] \end{cases}$$

presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$. Su integral definida en $[0,3]$ es

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 e^x dx + \int_2^3 x^2 dx = \left[e^x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = e^2 + \frac{16}{3}\,.$$

Observación 5.24 *Es posible extender el concepto de integral definida a un marco más general. Por ejemplo, se pueden considerar funciones que no estén acotadas o que estén definidas sobre intervalos no acotados (llamadas integrales impropias). Sin embargo, estas cuestiones superan los objetivos de este curso.*

5.7 Aplicaciones de la integral definida

5.7.1 Área de algunos recintos planos

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a,b]$. Si denotamos por $\mathcal{R}$ al recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas OX y las rectas verticales $x = a$,

$x = b$, sabemos que, por definición de la integral definida, su área $A(\mathcal{R})$ viene dado por

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{5.6}$$

Ejemplo 5.25 *Vamos a deducir la expresión del área A del círculo de radio $r > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el círculo tiene su centro en nuestro origen de coordenadas. Entonces A será igual a cuatro veces el área S de la parte del círculo encerrado en el primer cuadrante. Teniendo en cuenta que los puntos (x, y) de la circunferencia satisfacen la relación*

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},\ x \in [-r, r],$$

resulta que S es el área encerrado por la curva continua $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = r$. Por consiguiente

$$A = 4S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx\,.$$

Para calcular esta integral hacemos el cambio de variables $x = rsen(t)$, $dx = rcos(t)dt$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2}dx &= \int \sqrt{r^2 - r^2 sen^2(t)}rcos(t)dt = \int \sqrt{r^2(1 - sen^2(t))}rcos(t)dt = \\ &= \int \sqrt{r^2 cos^2(t)}rcos(t)dt = r^2 \int cos^2(t)dt = r^2\left[\frac{t}{2} + \frac{sen(2t)}{4}\right] + C\,.\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que cuando $x = 0$ entonces $t = 0$, mientras que cuando $x = r$ entonces $t = \frac{\pi}{2}$. Tenemos pues

$$A = 4r^2\left[\frac{t}{2} + \frac{sen(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r^2\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \pi r^2\,.$$

Consideremos recintos algo más generales, delimitados por su parte superior e inferior por funciones continuas. Sean $f,\ g\ :\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas, tales que $g(x) \le f(x)$, para todo $x \in [a, b]$, y sea $\mathcal{R}$ el recinto delimitado por las gráficas de f y g, y por las rectas $x = a$, $x = b$. Un razonamiento geométrico simple permite probar que el área de $\mathcal{R}$ viene dado por

$$\boxed{A(\mathcal{R}) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx} \tag{5.7}$$

Obsérvese que (3.6) es una caso particular de (3.7) (basta tomar en esta última $g(x) = 0$ cuyo grafo es el eje OX).

Ejemplo 5.26 *Vamos a determinar el área A del recinto delimitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2 - 2x$. Para ello resulta conveniente y a veces imprescindible dibujar el recinto o al menos tener una idea aproximada de éste. Observamos que $g(x)$ es una parábola convexa que corta al eje =X en $(0, 0)$, $(2, 0)$ y su vértice se encuentra en $(1, -1)$; $f(x)$ es cóncava, sus puntos de corte con OX son $(0, 0)$, $(4, 0)$, y su vértice es $(2, 4)$. Los puntos de corte de ambas parábolas están determinados por las soluciones de la ecuación $2x^2 - 6x = 0$, y son $(0, 0)$ y $(3, 3)$. Por tanto, el recinto está delimitado por las gráficas de $f(x)$ (superiormente) y de $g(x)$ (inferiormente), y por las rectas $x = 0$ y $x = 3$. Aplicando (3.7) obtenemos*

$$A = \int_0^3 (f(x) - g(x))dx = \int_0^3 (6x - 2x^2)dx = \left[6\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9\,.$$

5.7.2 Longitud de un arco de curva plana

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $[a, b]$ y tal que su derivada f' sea continua en $[a, b]$. Entonces la longitud L del arco de curva $\{(x, y) : x \in [a, b],\ y = f(x)\}$ (abreviadamente, $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$) viene dado por

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx}$$

Ejemplo 5.27 *Calculemos la longitud L del arco de curva $y = \sqrt{x^3}$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(4, 8)$. En este caso $y = f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ con $x \in [0, 4]$. Entonces*

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}x^{1/2}\right]^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)\,.$$

5.7.3 Volumen de un sólido de revolución

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y sea $\mathcal{R}$ el recinto delimitado por f y el eje OX entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Al girar $\mathcal{R}$ al rededor del eje OX se determina un sólido de revolución $\mathcal{S}$ cuyo volumen $V(\mathcal{S})$ viene dado por

$$\boxed{V(\mathcal{S}) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx} \tag{5.8}$$

Ejemplo 5.28 *Vamos a calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje OX el trozo de parábola $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$:*

$$V = \pi \int_0^4 \left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi\,.$$

Ejemplo 5.29 *Con ayuda de (3.8) vamos a determinar la expresión que nos da el volumen* V *de una esfera de radio* r. *Podemos suponer que su centro se encuentra en nuestro origen de coordenadas. En ese caso la esfera es generada al girar el semicírculo* $y = f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, *en torno al eje OX, y entonces*

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$