Tema 6

Ecuaciones diferenciales

"Una ciencia consiste en un sistema de leyes deducidas de los hechos observados... Las leyes son, en suma, ecuaciones diferenciales"

H. Poincaré

6.1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

6.1.1 Introducción

La teoría de ecuaciones diferenciales es de gran importancia en el estudio de modelos matemáticos de las Ciencias Aplicadas y la Tecnología. En esta sección vamos a estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias (brevemente EDO) de primer orden y daremos algunas aplicaciones a la Biología y a otras ciencias experimentales.

6.1.2 Conceptos básicos.

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación en la que aparece una función incognita y sus derivadas sucesivas, así como la variable independiente. Más precisamente:

Definición 6.1.1 *Una* **ecuación diferencial ordinaria** *es una ecuación que se puede expresar en la forma:*

$$F(x, y, y', \cdots, y^{n)}) = 0, \tag{6.1}$$

donde F es una función de la variable independiente x, de la variable dependiente y, y de las derivadas de y hasta el orden n. Se supone que x varía en un determinado intervalo I. Al mayor orden de derivación n se le llama **orden** *de la EDO.*

Definición 6.1.2 *Cuando se puede despejar $y^{n)}$ de (6.1), i.e. cuando se puede escribir:*

$$y^{n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{n-1)}), \tag{6.2}$$

la EDO se dice **explícita** *o en forma* **normal**.

Algunos ejemplos de EDO son:

Desintegración radiactiva:

$$A' = -kA, \quad A = A(t) \text{ es la cantidad de sustancia radiactiva.} \tag{6.3}$$

Dinámica de poblaciones:

$$p' = (n - m - kp)p, \quad p = p(t) \text{ es el número de individuos.} \tag{6.4}$$

Oscilador masa-resorte amortiguado:

$$mx'' + bx' + kx = f(t), \quad x = x(t) \text{ es la posición.} \tag{6.5}$$

Circuitos eléctricos:

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t), \quad q = q(t) \text{ es la carga.} \tag{6.6}$$

Modelo de aprendizaje:

$$\frac{y'}{y^{2/3}(1-y)^{2/3}} = \frac{2p}{\sqrt{N}}, \quad y = y(t) \text{ es el nivel de habilidad.} \tag{6.7}$$

Definición 6.1.3 *Se llama* **solución explícita** *de la EDO (6.1) o (6.2) en un intervalo I a una función $y = y(x)$ que esté definida y sea derivable, tantas veces como indique el orden de la EDO, en el intervalo I y que satisface la EDO para todo valor de $x \in I$.*

Ejemplo 6.1.4 *La función $A = e^{-kt}$ es una solución explícita de (6.3) en el intervalo $(-\infty, \infty)$.*

En efecto, la función $A = e^{-kt}$ y su derivada $A' = -ke^{-kt}$ están definidas en $(-\infty, \infty)$ y cuando se sustituyen en la ecuación (6.3) se obtiene la igualdad:

$$-ke^{-kt} = (-k)e^{-kt},$$

que es válida para todo $t \in (-\infty, \infty)$. Así pues $A = e^{-kt}$ es una solución explícita de (6.3) en $(-\infty, \infty)$. Es de observar que para cada constante C las funciones $A = Ce^{-kt}$ también son soluciones de (6.3). $\square$

Algunas veces al resolver una EDO no se obtiene una función y se obtiene una relación entre las variables independiente y dependiente, es por lo que se pone la definición imprecisa:

Definición 6.1.5 *Una relación de la forma $G(x, y) = 0$ se llama* **solución implícita** *de la EDO (6.1) o (6.2) en I, si se pueden obtener las derivadas de y, y al sustituirlas en (6.1) o (6.2) se verifica ésta para todo valor de $x \in I$.*

Ejemplo 6.1.6 *La relación $x^2 - y^2 - C^2 = 0$, con C una constante cualquiera, es solución implícita de la EDO: $y' = \dfrac{x}{y}$ en el intervalo (C, ∞).*

En efecto, derivando implícitamente $x^2 - y^2 - C^2 = 0$ se obtiene $2x - 2yy' = 0$, que es la EDO $y' = \dfrac{x}{y}$, y es válida para todo $x \in (C, \infty)$. Así pues $x^2 - y^2 - C^2 = 0$, es una solución implícita de la EDO en (C, ∞). Es de observar que $x^2 - y^2 - C^2 = 0$ define dos funciones:

$$y = +\sqrt{x^2 - C^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{x^2 - C^2},$$

y que cada una de éstas es una solución explícita de la EDO en (C, ∞). $\square$

Ejemplo 6.1.7 *Cualquier polinomio de grado $n - 1$ es solución explícita de la EDO de orden n: $y^{n)} = 0$ en $\mathbb{R}$.*

En efecto, un polinomio de grado $n - 1$ es de la forma: $y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_{n-1}x^{n-1}$. Los polinomios están definidos en todo $\mathbb{R}$ y son derivables tantas veces como se desee, con derivadas sucesivas:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \cdots + (n-1)C_{n-1}x^{n-2}$$
$$y'' = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + \cdots + (n-1) \cdot (n-2)C_{n-1}x^{n-3}$$
$$\cdots$$
$$y^{n-1)} = (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1C_{n-1}$$
$$y^{n)} = 0$$

Por tanto los polinomios de grado $n-1$ son soluciones explícitas de la EDO $y^{n)}=0$. $\square$

En los ejemplos anteriores vemos que una EDO puede tener muchas soluciones es por lo que se pone la siguiente:

Definición 6.1.8 *Se llama* **solución general** *de la EDO (6.1) o (6.2)* **en un intervalo** *I a una función $y=y(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$, que depende de n constantes arbitrarias (tantas como el orden de la EDO), definida y derivable (tantas veces como indique el orden de la EDO) en el intervalo I y que verifique la EDO para todo $x\in I$ y para cualquier valor de las constantes $C_1,C_2,\cdots,C_n$.*

Además de la solución general de una EDO pueden existir otras soluciones, que se les llama **soluciones singulares**. En este curso no abordaremos el estudio de dichas soluciones.

Cuando tenemos una EDO, algunas de las cuestiones que se plantean son:

- ¿Tiene solución?
- Si tiene solución ¿cuántas tiene?
- Si tiene muchas soluciones ¿cuál nos interesa?
- ¿Cómo calcularla?

La solución que "interesa" se interpreta aquí como problemas de valores iniciales o problema de Cauchy:

Definición 6.1.9 *Un problema de Cauchy o de valores iniciales para la ecuación (6.1), es encontrar una función $y=y(x)$ definida en un intervalo I que verifique:*

$$(PC)\begin{cases} F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{n)}(x))=0, \quad \forall x\in I,\\ y(x_0)=y_0,\\ y'(x_0)=y_1,\\ \cdots\cdots\\ y^{n-1)}(x_0)=y_{n-1},\end{cases}$$

donde $x_0\in I, y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$, son constantes dadas.

En particular, en este tema abordaremos el problema de Cuachy para algunas EDOs de primer orden en forma explícita, i.e. el problema de hallar una función $y = y(x)$ definida y derivable en un intervalo I tal que:

$$(PC) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $x_0 \in I$ e y_0 dados.

Observación 6.1.10 *Cuando se ha obtenido la solución general $y = y(x, C)$ de $y' = f(x, y)$, la determinación de una solución del problema PC es sencilla. Basta imponer la condición inicial $y(x_0) = y_0$ en la solución general, i.e. $y(x_0, C) = y_0$, resolver esta ecuación algebraica en la variable C y sustituirla en la solución general. Otras veces se obtendrá la solución del problema PC directamente.*

6.1.3 Resolución de las ecuaciones diferenciales elementales de primer orden.

Estudiaremos las ecuaciones diferenciales elementales de primer orden, que pueden ser escrita en forma explícita y cuando la función f en (PC) viene dada por una de las siguientes funciones:

1. Polinomio de grado 0 en la variable y : $\quad f(x, y) = a(x)$.

2. Función de variables separadas: $\quad f(x, y) = a(x)g(y)$.

3. Polinomio de grado 1 en la variable y : $\quad f(x, y) = a(x)y + b(x)$.

4. Polinomio particular de grado n en la variable y : $\quad f(x, y) = a(x)y + b(x)y^n$.

Observación 6.1.11 *En la resolución de las EDOs no seremos riguroso en el estudio donde las funciones están definidas, donde son derivables y por tanto donde son válidos los cálculos. Nuestro objetivo será el cálculo formal de soluciones del problema de Cauchy para EDOs sencillas.*

6.1.4 Ecuaciones diferenciales independientes de la variable y

Definición 6.1.12 *Se dice que una EDO es* **independiente de la variable dependiente** y *si se puede escribir de la forma:*

$$y' = a(x) \tag{6.8}$$

con $a = a(x)$ *cualquier función que depende sólo de la variable independiente, definida en un intervalo* I.

La **resolución** de (6.8) es inmediata:

- Utilizando la notación $y' = \dfrac{dy}{dx}$, (6.8) se escribe en la forma:

$$dy = a(x)dx.$$

- Así pues tomando integrales indefinidas en ambos miembros, se tiene

$$\int dy = \int a(x)\,dx + C,$$

  donde C es cualquier constante.

- Por tanto para obtener la solución general de (6.8) basta hacer la integral de $a(x)$, i.e.:

$$y = \int a(x)\,dx + C, \tag{6.9}$$

Ejemplo 6.1.13 *Obtener la solución general de la EDO:* $(1+x)y' = 1$, *y resolver el problema de Cauchy:*

$$(PC)\begin{cases}(1+x)y' = 1, \quad \forall x \in (-1,\infty),\\ y(0) = 1,\end{cases}$$

Solución. La EDO anterior se puede escribir, cuando $x \neq -1$, como:

$$y' = \frac{1}{1+x}$$

que es una EDO del tipo (6.8), luego utilizando la notación $y' = \dfrac{dy}{dx}$, se puede escribir como:

$$dy = \frac{1}{1+x}dx. \tag{6.10}$$

Por tanto, integrando en ambos miembros, se tiene:

$$y = \int \frac{1}{1+x}\, dx + C.$$

Luego, haciendo la integral del segundo miembro:

$$y = \log|1+x| + C,$$

que es la solución general de la EDO en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = -1$, luego lo es en $(-1, \infty)$.

Para resolver el problema (PC) hemos de determinar la constante C. Si en la solución general: $y = \log|1+x| + C$, imponemos que verifique la condición $y(0) = 1$, se obtiene: $\log|1+0| + C = 1$, de donde se deduce que $C = 1$. Por tanto la solución de (PC) es

$$y = \log|1+x| + 1.$$

Observación 6.1.14 *La obtención de la solución del problema de Cauchy puede hacerse directamente tomando integrales definidas en (6.10): En efecto cuando x varía entre 0 y X, la variable y varía entre 1 y Y luego:*

$$\int_1^Y dy = \int_0^X \frac{1}{1+x}\, dx.$$

Por tanto, haciendo las integrales se tiene:

$$[y]_1^Y = [\log|1+x|]_0^X$$

de donde

$$Y - 1 = \log|1+X| \quad \Longrightarrow \quad Y = \log|1+X| + 1.$$

6.1.5 Ecuaciones diferenciales de variables separadas

Definición 6.1.15 *Se dice que una EDO es de* **variables separadas** *si se puede escribir de la forma:*

$$y' = a(x)g(y) \tag{6.11}$$

con $a = a(x)$ cualquier función que depende sólo de la variable independiente x, definida en un intervalo I y $g = g(y)$ cualquier función que depende sólo de la variable dependiente y, definida en un otro intervalo J.

El **método de resolución** de tales EDOs es el siguiente:

- En principio la EDO, utilizando la notación $y' = \dfrac{dy}{dx}$, se escribe de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)g(y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = a(x)dx,$$

  i.e. se separan las variables de forma que en el primer miembro esté todo lo que dependa de la variable dependiente y y en el segundo lo que dependa de la variable independiente x. Esta última ecuación es válida para todo $y \in J$ tal que $g(y)$ no se anule.

- A continuación se procede como en el caso anterior, i.e. se toma integrales indefinidas en ambos miembros, y se obtiene:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int a(x)\, dx + C,$$

  donde C es cualquier constante.

- Finalmente para obtener la solución general de (6.11) basta hacer la integral de $\dfrac{1}{g(y)}$ y de $a(x)$. Si denotamos por:

$$H(y) = \int \frac{dy}{g(y)} \quad \text{y por} \quad A(x) = \int a(x)\, dx,$$

  obtenemos que la solución general de (6.11) viene dada de forma implícita por:

$$H(y) - A(x) - C = 0$$

Ejemplo 6.1.16 *Obtener la solución general de la EDO:* $2yy' + x^2 = 0$, *y resolver el problema de Cauchy:*

$$(PC)\begin{cases} 2yy' + x^2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

Solución. La EDO anterior se puede escribir, cuando $y \neq 0$, como:

$$y' = -\frac{x^2}{2y},$$

que es una EDO de variables separadas (6.11), luego, utilizando la notación $y' = \dfrac{dy}{dx}$, se escribe de la forma:

$$2y\, dy = -x^2\, dx.$$

Por tanto, integrando en ambos miembros, se tiene:

$$\int 2y\,dy = -\int x^2\,dx + C.$$

Haciendo ahora las integrales anteriores se tiene:

$$y^2 = -\frac{1}{3}x^3 + C,$$

i.e. se tiene la solución general en forma implícita de la EDO:

$$y^2 + \frac{x^3}{3} = C.$$

Ésta da lugar a las soluciones generales explicitas:

$$y = +\sqrt{C - \frac{x^3}{3}} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{C - \frac{x^3}{3}},$$

Para resolver el problema (PC) imponemos la condición $y(0) = 2$ y obtenemos:

$$2^2 + \frac{0^3}{3} = C \quad \Longrightarrow \quad C = 4,$$

por tanto obtenemos dos soluciones:

$$y = +\sqrt{4 - \frac{x^3}{3}} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{4 - \frac{x^3}{3}},$$

que están definidas en $(-\infty, \sqrt[3]{12}]$. Siendo la primera la que es solución del problema de Cauchy.

6.1.6 Ecuaciones diferenciales lineales

Definición 6.1.17 *Se dice que una EDO es* **lineal** *si se puede escribir de la forma:*

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{6.12}$$

con $a = a(x), b = b(x)$ funciones arbitrarias que sólo dependen de la variable independiente x, definidas en un intervalo I.

El **método de resolución** de tales EDOs es el siguiente:

- En principio de define

  $$A(x) = \int a(x)\,dx, \qquad \text{i.e.} \qquad A'(x) = a(x),$$

  y la EDO (6.12) se escribe como:

  $$y' - a(x)y = b(x),$$

- A continuación se multiplica ambos miembros por $e^{-A(x)}$, que se le llama **factor integrante**:

$$e^{-A(x)}y' - e^{-A(x)}a(x)y = e^{-A(x)}b(x),$$

y se observa que el primer miembro es la derivada de $e^{-A(x)}y$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-A(x)}y\right) = e^{-A(x)}y' - e^{-A(x)}a(x)y,$$

así pues, se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-A(x)}y\right) = e^{-A(x)}b(x).$$

- Esta ecuación se escribe:

$$d\left(e^{-A(x)}y\right) = e^{-A(x)}b(x)\,dx.$$

Integrando en ambos miembros se tiene:

$$e^{-A(x)}y = \int e^{-A(x)}b(x)\,dx + C.$$

Por tanto se tiene la solución general:

$$y = \left(\int e^{-A(x)}b(x)\,dx + C\right)e^{A(x)}. \tag{6.13}$$

Ejemplo 6.1.18 *Obtener la solución general de la EDO:* $(1+x)y' = y + x$, *y resolver el problema de Cauchy:*

$$(PC)\begin{cases}(1+x)y' = y + x, \quad \forall x \in (-1,\infty),\\ y(0) = 1.\end{cases}$$

Solución. La EDO se escribe, si $x \neq -1$:

$$y' = \frac{y}{(1+x)} + \frac{x}{(1+x)}, \tag{6.14}$$

que es una EDO lineal con

$$a(x) = \frac{1}{(1+x)} \quad \text{y} \quad b(x) = \frac{x}{(1+x)}.$$

Por tanto se pone

$$A(x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \lg(1+x),$$

y el factor integrante será:

$$e^{-A(x)} = e^{-\lg(1+x)} = \frac{1}{e^{\lg(1+x)}} = \frac{1}{1+x}.$$

Multiplicando la EDO (6.14) por este factor integrante, se tiene:

$$\frac{1}{1+x}y' = \frac{1}{1+x}\frac{y}{1+x} + \frac{1}{1+x}\frac{x}{1+x},$$

i.e.

$$\frac{1}{1+x}y' - \frac{y}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Ahora observamos que el primer miembro es la derivada de $\dfrac{y}{1+x}$ y por tanto se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{1+x}\right) = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Esta ecuación se escribe de la forma:

$$d\left(\frac{y}{1+x}\right) = \frac{x}{(1+x)^2}\,dx. \tag{6.15}$$

Integrando en ambos miembros, se obtiene:

$$\int d\left(\frac{y}{1+x}\right) = \int \frac{x}{(1+x)^2}\,dx + C,$$

i.e.

$$\frac{y}{1+x} = \int \frac{x}{(1+x)^2}\,dx + C.$$

Hacemos ahora la integral del segundo miembro, para ello observamos que es una integral de una función racional, luego haciendo la descomposición en fracciones simples, se obtiene:

$$\int \frac{x}{(1+x)^2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{1+x} + \lg(1+x).$$

Por tanto se tiene

$$\frac{y}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \lg(1+x) + C,$$

i.e.

$$y = 1 + (1+x)\lg(1+x) + C(1+x),$$

que es la solución general de la EDO.

Resolvamos ahora el problema (PC). Imponiendo en la ecuación anterior la condición inicial $y(0) = 1$ se tiene:

$$1 + (1+0)\lg(1+0) + C(1+0) = 1, \quad \Longrightarrow \quad C = 0,$$

Por tanto la solución de PC es:

$$y = 1 + (1+x)\lg(1+x),$$

que es válida para todo $x \neq -1$.

Directamente se puede resolver el problema de Cauchy de la forma siguiente: Si en la ecuación (6.15) integramos entre 0 y X se obtiene:

$$\int_0^X d\left(\frac{y}{1+x}\right) = \int_0^X \frac{x}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^X \left(\frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}\right) dx,$$

i.e.

$$\left[\frac{y}{1+x}\right]_0^X = \left[\frac{1}{1+x} + \lg(1+x)\right]_0^X$$

i.e.

$$\frac{y(X)}{1+X} - \frac{y(0)}{1+0} = \frac{1}{1+X} + \lg(1+X) - \frac{1}{1+0} + \lg(1+0)$$

i.e.

$$\frac{y(X)}{1+X} - 1 = \frac{1}{1+X} + \lg(1+X) - 1.$$

Finalmente, se obtiene de nuevo la solución del problema PC.

$$y(X) = 1 + (1+X)\lg(1+X).$$

6.1.7 Ecuaciones diferenciales de Bernouilli.

Definición 6.1.19 *Se dice que una EDO es* **Bernouilli** *si se puede escribir de la forma:*

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \tag{6.16}$$

con $a = a(x), b = b(x)$ *funciones arbitrarias que sólo dependen de la variable independiente* x*, definidas en un intervalo* I *y* n *es cualquier número didtinto de* 0 *y de* 1.

Estas ecuaciones, si $y \neq 0$, se reducen a resolver una EDO lineal de la siguiente forma. Para ello se introduce el cambio de variable dependiente:

$$z = y^{1-n} \quad \Longrightarrow \quad y = y^n\, z, \tag{6.17}$$

entonces se tiene

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{(1-n)}y^n\, z'.$$

Si ahora llevamos esto a la (6.16) se obtiene:

$$\frac{1}{(1-n)} y^n\, z' = a(x) y^n\, z + b(x) y^n,$$

y, si $y \neq 0$, obtenemos

$$z' = (1-n) a(x)\, z + (1-n) b(x),$$

que es una ecuación lineal de las resueltas en la sección anterior. Por tanto su solución viene dada por (6.13), que en este caso es:

$$z = \left((1-n) \int e^{-(1-n)A(x)} b(x)\, dx + C \right) e^{(1-n)A(x)},$$

que deshaciendo el cambio de variables (6.17):

$$y = \sqrt[1-n]{\left((1-n) \int e^{-(1-n)A(x)} b(x)\, dx + C \right) e^{(1-n)A(x)}},$$

obtenemos así la solución general de la ecuación de Bernouilli (6.16):

$$y = \left((1-n) \int e^{-(1-n)A(x)} b(x)\, dx + C \right)^{\dfrac{1}{1-n}} e^{A(x)}.$$

Ejemplo 6.1.20 *Obtener la solución general de la EDO:* $(1+x)y' = y + xy^2$, *y resolver el problema de Cauchy:*

$$(PC) \begin{cases} (1+x)y' = y + xy^2, \quad \forall x \in (-1, \infty), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Solución. Esta EDO se puede escribir como:

$$y' = \frac{1}{1+x} y + \frac{x}{1+x} y^2,$$

y entonces vemos que es una EDO de Bernouilli. En este caso se hace el cambio de variables:

$$z = y^{-1}.$$

Entonces obtenemos:

$$y = \frac{1}{z} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{-1}{z^2}\, z',$$

y sustituimos y, y' en la ecuación:

$$(1+x)\frac{-1}{z^2}\, z' = \frac{1}{z} + x(\frac{1}{z})^2.$$

Multiplicando por $-z^2$ se obtiene la EDO lineal:

$$(1+x)\,z' = -z - x \quad \text{i.e.} \quad z' = \frac{-1}{1+x}z + \frac{-x}{1+x}.$$

Para resolverla, hallamos primero el factor integrante: Como

$$A(x) = \int -\frac{1}{(1+x)}\,dx = -\lg(1+x),$$

el factor integrante es:

$$e^{A(x)} = e^{-\lg(1+x)} = \frac{1}{1+x}.$$

Luego multiplicando la última EDO por este factor se vuelve a obtener la EDO

$$(1+x)\,z' + z = -x.$$

Observamos ahora que el primer miembro es la derivada de $(1+x)\,z$, luego esta EDO se escribe:

$$\frac{d}{dx}((1+x)\,z) = -x$$

i.e.

$$d((1+x)\,z) = -x\,dx. \tag{6.18}$$

Integrando en ambos miembros obtenemos:

$$\int d((1+x)\,z) = -\int x\,dx + C \quad \Longrightarrow \quad (1+x)\,z = -\frac{1}{2}x^2 + C.$$

Deshaciendo el cambio de variables, se obtiene:

$$(1+x)\,\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1+x}{-\dfrac{x^2}{2} + C}.$$

Así pues la solución general de la EDO propuesta es:

$$y = 2\frac{1+x}{C-x^2}.$$

Para obetner la solución del problema (PC), imponemos en esta solución general la condición inicial $y(0) = 1$ y se tiene:

$$C = 2.$$

Por tanto la solución del problema de Cauchy es:

$$y = 2\frac{1+x}{2-x^2}.$$

6.1.8 Aplicaciones

En esta sección veremos algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a diferentes problemas aplicados de las ciencias experimentales. En los ejercicios se insistirá en algunas variantes de estos y se verán otros. Todos ellos responde al **principio general**:

variación = entrada menos salida.

6.1.9 Dinámica de poblaciones

El problema que vamos estudiar es la evolución del crecimiento de una población de individuos de una determinada especie (habitantes de una nación, aves de una gran isla, bacterias de un determinado organismo,...) en un determinado hábitat.
Denotamos por $p = p(t)$ el número de habitantes en el instante t y por $r(p)$ la tasa de crecimiento, i.e. la variación relativa de individuos en el instante t:

$$r(p) = \frac{p'(t)}{p(t)} \tag{6.19}$$

Las hipótesis que hacemos es:

Hipótesis 6.1.21 *(***Malthus***) La tasa de crecimiento es constante, i.e.*

$$r(p) = k, \tag{6.20}$$

donde $k = n - m$ es la tasa de nacimientos $n \geq 0$ menos la de muertes $m \geq 0$.

Esta hipótesis es consistente con el crecimiento de una población cuando hay espacio y alimentos suficientes. Por ejemplo el crecimiento de una bacteria por división celular simple, donde la celula madre se divide en dos nuevas celulas. Es de observar que si hay más nacimientos que muertes entonces $k \geq 0$ y por tanto la tasa es positiva lo que nos dice (ya que $p(t) \geq 0$) que $p'(t) \geq 0$ es decir $p(t)$ es creciente y por tanto la población crecerá.

Hipótesis 6.1.22 *(***Verhrulst***) La tasa de crecimiento no es constante, es de la forma:*

$$r(p) = k - hp, \tag{6.21}$$

donde $k = n - m$ es la tasa de nacimientos n menos la de muertes naturales m y hp es la de mortalidad debida a la falta de espacio o alimentos.

Esta hipótesis es consistente con el crecimiento de una población cuando no hay espacio y/o alimentos suficientes para las especies y hay mortalidad (con coeficiente $h \geq 0$) debida a este hecho. Es de observar que si $h = 0$ tenemos el caso anterior y si $h > 0$ la tasa se anula cuando $p = \frac{k}{h} > 0$ luego si $0 < h < \frac{k}{h}$ la tasa es positiva y la población crecerá y si $h > \frac{k}{h}$ la tasa es negativa y la población decrecerá. Así cuando $p = \frac{k}{h}$ la población llega a ser máxima.

Con la hipótesis de Malthus se tiene que el problema de la dinámica de crecimiento de una población es:

$$(PCM) \begin{cases} \dot{p}(t) = kp(t), \quad \forall t > 0, \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

donde p_0 es el número de individuos inicialmente.

La resolución de este problema es sencilla, ya que la EDO anterior es de variables separadas y su solución es

$$p(t) = Ce^{kt}.$$

Si se ha de verificar la condición inicial $p(0) = p_0$ entonces la solución del problema (PCM) es:

$$p(t) = p_0 e^{kt}.$$

Con la hipótesis de Verhulst se tiene que el problema de la dinámica de crecimiento de una población es:

$$(PCM) \begin{cases} \dot{p}(t) = kp(t) - hp^2(t), \quad \forall t > 0, \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

donde p_0 es el número de individuos inicialmente.

La resolución de este problema también es sencilla, ya que la EDO anterior es de variables separadas y su solución se obtiene por el método de variables separadas. Por tanto la EDO se escribe de la forma:

$$\frac{dp}{p(k - hp)} = dt,$$

y se integra en ambos miembros, obteniéndose:

$$t + C = \int \frac{dp}{p(k - hp)},$$

y como

$$\int \frac{dp}{p(k-hp)} = \frac{1}{k}\int [\frac{1}{p} + \frac{h}{k-hp}]\, dp = \frac{1}{k}[\lg|p| - \lg|k-hp|] = \frac{1}{k}\lg|\frac{p}{k-hp}|,$$

se tiene:

$$t + C = \frac{1}{k}\lg|\frac{p}{k-hp}|.$$

i.e.

$$\frac{p}{k-hp} = Ce^{kt},$$

con C una nueva constante. Y de aquí se tiene que la solución general es:

$$p = \frac{k}{h + Ce^{-kt}}.$$

Si se ha de verificar la condición inicial $p(0) = p_0$ se tiene:

$$C = \frac{k}{p_0} - h.$$

Así pues la solución del problema (PCV) es:

$$p(t) = \frac{k\, p_0}{h\, p_0 + (k - h\, p_0)\, e^{-kt}}.$$

6.1.10 Análisis compartimental: Problemas de mezcla

El problema que ahora abordamos es el análisis de la evolución de una mezcla en un determinado compartimento (un fluido en el interior de un recipiente, un gas en el interior de una habitación,...)

Se supone que en un determinado instante hay x_0 gramos de una sustancia disuelta en un recipiente que tiene una capacidad de V litros y que a partir de ese instante se introduce en el recipiente un fluido que contiene una concentración de c_e gramos por litro con una velocidad de entrada de éste de v_e litros por minuto. Se supone que la mezcla se hace uniforme y sale a v_s litros por minuto. El problema que nos planteamos es deteminar la cantidad en gramos de la sustancia que hay en el recipiente en cada instante t.

Denotamos por $x = x(t)$ la cantidad en gramos de la sustancia, en el instante t, (i.e. a los t minutos de comenzar el proceso) que hay en el recipiente. Como la concentración de salida es la misma que la que hay en el recipiente, entonces es:

$$c_s = \frac{x(t)}{V + (v_e - v_s)t}$$

y según el principio general, la EDO que rige el proceso es:

$$\dot{x}(t) = c_e v_e - c_s v_s,$$

además se tiene la condicón inicial:

$$x(0) = x_0.$$

Por tanto el problema de Cauchy que hemos de resolver es:

$$(PCC) \begin{cases} \dot{x}(t) = c_e v_e - \dfrac{x(t)}{V + (v_e - v_s)t} v_s, \quad \forall t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La resolución de este problema es sencilla, ya que la EDO anterior es lineal.

6.1.11 Ejercicios

1. Cierta mañana comenzó a nevar muy fuerte y continuó nevando constantemente durante todo el día. Una máquina quitanieve comenzó a las 9 horas a despejar la carretera. A las 11 horas había limpiado 2 km y a las 13 horas 1 km más. ¿A qué hora comenzó a nevar?

2. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

   (a) $yy' + (1 + y^2)\operatorname{sen} t = 0$ (b) $y' = a^{t+y}$ (c) $\mathrm{e}^{-y}(1 + y') = 1$

   (d) $(1 + t^2)y' + ty = (1 + t^2)^{\frac{5}{2}}$ (e) $y' - 2ty = t$

   En cada caso hallar, si existe, la solución que verifica $y(1) = 1$.

3. En 1970 se arrojaron a un lago 1000 ejemplares de una especie de peces. En 1977 se calculó que la cantidad de peces de esta especie que había era de 3000. Suponiendo que la tasa de crecimiento es constante, calcular la cantidad de peces en 1980 y 1991.

4. Si el número de bacterias contenida en 1 litro de leche se duplica en 4 horas, suponiendo que la tasa de multiplicación es constante, calcular en cuanto tiempo se hará 25 veces mayor.

5. La ley de enfriamiento de Newton afirma que el ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del aire que lo rodea. Si una habitación se mantiene a temperatura constante de 70^o F y un objeto que estaba a 350^o F pasa a 150^o F en 45 minutos, ¿qué tiempo se necesita para que el objeto adquiera una temperatura de 80^o F?

6. El comisario Maigret, mientras pasea por una calle a 20^o C, encuentra un cadáver cuya temperatura es de 35^o C. Si al cabo de una hora su temperatura ha descendido a 34^o C, y suponiendo que en el momento de la muerte la temperatura del cuerpo era de 37^o C, ¿a qué hora se produjo el crimen?

7. Con frecuencia la secreción de hormonas en la sangre es una actividad periódica. Si una hormona se segrega en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de hormona en la sangre se puede modelar por el problema de Cauchy:

$$\dot{x}(t) = \alpha - \beta\cos(\frac{\pi t}{12}) - kx, \quad x(0) = x_0,$$

   donde $x(t)$ es la cantidad de hormona en la sangre en el instante t, α es la razón promedio de secreción, β es la cantidad de variación diaria en la secreción, k es una constante positiva que representa la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre y x_0 la cantidad de hormona en la sangre en el instante inicial. Hallar la cantidad de hormona en la sangre en cada instante si $\alpha = \beta = 1, k = 2$ e inicialmente no había hormona en la sangre.

8. La *semivida* de una sustancia radiactiva se define como el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de una cantidad inicial de esa sustancia. Determinar la semivida del uranio 238 sabiendo que la desintegración es proporcional a la cantidad restante y que después de 15 años se ha desintegrado el 0'0043% de la cantidad incial.

9. La velocidad de combinación de una sustancia con otra se supone que es proporcinal a la cantidad remanente de la primera de ellas. Si inicialmente hay 15 Kg de esta última y 5 Kg cuando han pasado 8 min., hallar cuánta sustancia habrá cuando transcurrió 5 min. y el tiempo que transcurre cuando queda 1 Kg. de sustancia.

10. Dos sustancias se combinan para producir una tercera, de tal forma que si se producen x kilogramos, las sustancias primera y segunda contribuyen con αx y βx,

respectivemente (observar que $\alpha + \beta = 1$). Al comenzar la combinación hay αa kilogramos de la primera y βb de la segunda, con lo que al producirse los x kilogramos nos queda $\alpha(a - x)$ y $\beta(b - x)$ kilogramos respectivamente. Se sabe que la velocidad de combinación es proporcional al producto de las cantidades restantes. Si $\alpha = \frac{3}{5}$ e inicialmente hay 300 kg de la primera sustancia y 200 kg de la segunda y al cabo de una hora se ha producido 100 kg de la tercera, hallar cuanto tiempo ha de transcurrrir para producir 400 kg.

11. Un depósito contiene 100 litros de una disolución salina cuya concentración es de 2'5 gramos de sal por litro. Una disolución conteniendo 2 gramos de sal por litro entra en el depósito a razón de 5 litros por minuto y la mezcla (que se hace uniformemente) sale a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito.

12. La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 cm^3/sg y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen de líquido de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0'2 gr/cm^3, se pide:

    (a) ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en cada instante si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento?

    (b) ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de 0'1 gr/cm^3?

13. En una habitación que contiene 300 m^3 de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado $t = 0$ algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de 3 m^3/h, conteniendo una concentración de 0'04 gr/m^3 de monóxido de carbono. Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el humo a la misma velocidad. Si pide:

    (a) Establecer y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de humo $y(t)$ en la habitación.

    (b) ¿Cuándo debería abandonar una persona prudente la fiesta considerando que el monóxido de carbono comienza a ser peligroso con una concentración superior a 0'0002 gr/m^3 ?

14. Se considera un tanque que contiene 1000 l de agua, dentro del cual una disolución de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 l/m. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior a una velocidad de 5 l/m. Si la concentración de sal en la salmuera que entra es de 1 kg/l, determinar la concentración de sal en el tanque en cada instante.

15. En un campus universitario que tiene 1000 estudiantes hay un único estudiante portador del virus de la gripe. Sea $y(t)$ el número de estudiantes contagiados en el día t. Si la velocidad con la que el virus se propaga es proporcional al producto entre los alumnos contagiados y los estudiantes no contagiados, se pide:

    (a) Determinar el número de personas enfermas en el día t si se sabe que pasados 4 días hay 50 enfermos.

    (b) Calcular cuándo habrá 500 estudiantes enfermos.

    (c) Si los estudiantes enfermos no se tratan con medicamentos, ¿qué número de enfermos habrá cuando pase mucho tiempo? ¿Llegará a desaparecer la enfermedad?

16. Se supone que la cantidad de herbívoros en una zona de la sabana africana crece con velocidad constante igual a 10 por año, y que al comienzo del estudio hay 100 de estos animales. Su presencia hace disminuir la cantidad de hierba en la zona, siendo la velocidad de destrucción proporcional a la suma de la cantidad de hierba (en Tm) y del número de herbívoros. Se pide:

    (a) Establecer y resolver una ecuación diferencial para el número de herbívoros.

    (b) Establecer y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de hierba.

    (c) Sabiendo que al inicio había 300 Tm de hierba y que la constante de proporcionalidad es -1, calcular la cantidad de hierba que habrá al cabo de 1 año.

    (d) ¿Llega a desaparecer la hierba?

17. Acabada la cosecha de trigo en cierta localidad, un propietario llena su granero con una cantidad g_0 kg. de trigo. Alrededor del granero vive una especie de roedores que

se alimentará del trigo recién almacenado. Un estudio realizado sobre la cantidad de roedores $r(t)$ muestra que crecen con una velocidad $r'(t)$ constante igual a 2, siendo r_0 el número inicial de roedores. Igualmente se ha concluido que, a causa de la presencia de los roedores, el ritmo de decrecimiento de la cantidad de trigo $g(t)$ es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a -1) al producto entre la cantidad de roedores y la cantidad de trigo. Se pide:

(a) Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de roedores en cada instante t.

(b) Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de trigo en cada instante t.

(c) Si $r_0 = 2$, ¿cuánto tiempo tardarán los roedores en consumir la cuarta parte de la cantidad de trigo inicial? ¿cuánto tardarán en comerse todo el trigo?

18. Un modelo de dinámica de poblaciones de depredador $y(t)$ y presa $x(t)$ de Lotka-Volterra viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = a\,x - b\,xy \\ y' = -c\,y + d\,xy \end{array} \right. \tag{6.22}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas. Estudiar la dependencia entre dichas poblaciones cuando $a = b = 2$, $c = d = 1$, $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

6.2 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

6.2.1 Introducción

Damos en esta sección una introducción a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y estudiamos en particular la de coeficientes contantes. En principio se recuerda las siguientes definiciones:

Definición 6.2.1 *Una* **ecuación diferencial ordinaria de segundo orden** *es una ecuación que se puede expresar en la forma:*

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{6.23}$$

donde F es una función de la variable independiente x, de la variable dependiente y, y de las derivadas de y de primer orden y' y de segundo orden y''. Se supone que x varía en un determinado intervalo I.

Definición 6.2.2 *Cuando se puede despejar y'' de (6.23), i.e. cuando se puede escribir:*

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{6.24}$$

la EDO se dice **explícita** *o en forma* **normal**.

Definición 6.2.3 *Una ecuación diferencial ordinaria* **lineal** *de segundo orden es una ecuación que se puede expresar en la forma:*

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = f(x), \tag{6.25}$$

donde $a(x), b(x), c(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas en un intervalo I. Cuando $a \neq 0, b, c$ son contantes se dice que es **con coeficientes constantes**. *Si $f(x) \equiv 0$ se dice que la ecuación es* **homogénea**.

En este tema nos limitamos a estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Sin embargo continuaremos con algunos conceptos y resultados para las EDOs lineales generales.

Definición 6.2.4 *Se llama* **solución** *de la EDO (6.25) en un intervalo I a una función $y = y(x)$ que esté definida y sea dos veces derivable en el intervalo I y que satisface la EDO para todo valor de $x \in I$, i.e.*

$$a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) \equiv f(x), \forall x \in I.$$

Definición 6.2.5 *Se llama* **solución general** *de la EDO (6.25) en un intervalo I a una función $y = y(x, C_1, C_2)$, con C_1, C_2 contantes arbitrarias, que esté definida y sea dos veces* *derivable en el intervalo I y que satisface la EDO para cualquier valor de las constantes C_1, C_2 y para todo valor de $x \in I$, i.e.*

$$a(x)\, y''(x, C_1, C_2) \; + b(x)\, y'(x, C_1, C_2) \; + c(x)\, y(x, C_1, C_2) \; \equiv f(x), \forall x \in I,$$

y para todo valor de las constantes C_1, C_2.

Para estas ecuaciones se plantean los siguientes problemas:

Definición 6.2.6 *Se llama* **problema de Cauchy o de valores iniciales** *para la EDO (6.25) en un intervalo I al problema de hallar una solución $y = y(x)$ de (6.25) que verifique además:*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

donde x_0 es un punto del intervalo I e y_0, y_1 son dos valores dados.

Definición 6.2.7 *Se llama* **problema de contorno** *para la EDO (6.25) en un intervalo $I = [a, b]$ al problema de hallar una solución $y = y(x)$ de (6.25) que verifique además:*

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b,$$

donde y_a, y_b son dos valores dados.

Observación 6.2.8 *Observar que en el problema de Cauchy la solución ha de verificar la EDO y en un punto del intervalo debe tener un valor dado y una derivada dada, mientras que en el problema de contorno la solución ha de verificar la EDO y debe tener en los extremos del intervalo valores dados.*

Observación 6.2.9 *Si se ha encontrado la solución general, $y = y(x, C_1, C_2)$, de la EDO (6.25) entonces los problemas anteriores se reducen a resolver un sistema algebraico de dos ecuaciones con las incognitas C_1, C_2:*

En el caso de condiciones iniciales es:

$$(CI) \begin{cases} \textit{Hallar } \; C_1, C_2 \; \textit{ tal que} \\ y(x_0, C_1, C_2) = y_0, \\ y'(x_0, C_1, C_2) = y_1. \end{cases}$$

En el caso de condiciones de contorno es:

$$(CC)\begin{cases} \text{Hallar } C_1, C_2 \text{ tal que} \\ y(a, C_1, C_2) = y_a, \\ y(b, C_1, C_2) = y_b. \end{cases}$$

Para el estudio de las EDO (6.25) se introduce primero la definición:

Definición 6.2.10 *Dadas dos funciones y_1, y_2 derivables se llama* **wronskiano** *de y_1, y_2 a la función*

$$W(y_1, y_2)(x) \doteq y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x). \tag{6.26}$$

Dos soluciones y_1, y_2 de la EDO (6.25) se dicen **independientes** *en un intervalo I si:*

$$W(y_1, y_2)(x) \neq 0, \forall x \in I.$$

En el caso contrario se dicen **dependientes**.

Observación 6.2.11 *Se puede probar que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0, \forall x \in I$ es equivalente a probar que $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, para un punto x_0 de I.*

Ejemplo 6.2.12 *Dos soluciones de la EDO: $x^2 y'' + xy - y = 0$, son x y $\dfrac{1}{x}$ ¿Son independientes?*

Solución. Es inmediato comprobar que x y $\dfrac{1}{x}$ son soluciones de la EDO en todo punto disntinto del 0 . Su wronskiano es:

$$W(x, \frac{1}{x}) = x(-\frac{1}{x^2}) - 1(\frac{1}{x}) = -\frac{2}{x} \neq 0,$$

luego son independientes.

Para la EDO (6.25) homogénea (i.e. con $f = 0$) se tiene el importante resultado:

Teorema 6.2.13 *Si y_1, y_2 son dos soluciones independientes en I de la EDO homogénea, entonces la solución general en I de ésta viene dada por:*

$$y(x, C_1, C_2) = C_1\, y_1(x) \,+\, C_2\, y_2(x). \tag{6.27}$$

Para la EDO (6.25) no homogénea (i.e. con $f \neq 0$) se tiene el importante resultado:

Teorema 6.2.14 *Si y_h es la solución general de la EDO homogénea e y_p es una solución particular de (6.25), entonces la solución general y_g en I de (6.25) viene dada por:*

$$y_g = y_h(x) + y_p(x). \tag{6.28}$$

Observación 6.2.15 *De los resultados anteriores se deduce que para obtener la solución general de (6.25) hemos de hallar dos soluciones independientes de la EDO homogénea y una solución cualquiera de la no homogénea.*

6.2.2 Resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Empezamos con la resolución de las EDO lineales de segundo orden con coeficientes constantes **homogéneas**:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0. \tag{6.29}$$

Para buscar dos soluciones independientes de la EDO (6.29) recordamos primero que la EDO de primer orden $ay' + by = 0$ con $a \neq 0$ tiene como solución general $y(x, C_1) = C_1 e^{rx}$, donde $r = -\dfrac{b}{a}$ es la solución de la ecuación $ar + b = 0$. Es decir, las soluciones son de tipo exponencial. Para la EDO de segundo orden buscamos también soluciones de tipo exponencial de la forma: e^{rx}. Si obligamos a que e^{rx} sea solución de (6.29) se tiene:

$$a\,r^2\,e^{rx} + b\,r\,e^{rx} + c\,e^{rx} = (a\,r^2 + b\,r + c)e^{rx} = 0.$$

Como e^{rx} no se anula entonces, para que e^{rx} sea solución, r ha de verificar la ecuación de segundo grado:

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0. \tag{6.30}$$

Esta ecuación se llama **ecuación característica** de la EDO (6.29) y a $p(r) = a\,r^2 + b\,r + c$ se le llama **polinomio característico** . Entonces para resolver la EDO debemos resolver (6.30). Al obtener la raices se pueden presentar los siguientes casos:

1. Dos raices reales y distintas, que es cuando $\Delta \doteq b^2 - 4ac > 0$.

2. Una sola raíz real, que es cuando $\Delta \doteq b^2 - 4ac = 0$.

3. Ninguna raíz real, que es cuando $\Delta \doteq b^2 - 4ac < 0$.

Pasamos ahora a ver como se hallan dos soluciones independientes de (6.29) en cada uno de los casos anteriores.

6.2.3 Caso de dos raices reales y distintas

Sean $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ dos raices reales y distintas de la ecuación característica (6.30). En este caso las funciones $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$ son dos soluciones independientes de (6.29). En efecto: obviamente son soluciones y su wronskiano es:

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = e^{r_1 x} r_2 e^{r_2 x} - e^{r_2 x} r_1 e^{r_1 x} = (r_2 - r_1) e^{(r_2+r_1)x} \neq 0,$$

luego y_1 e y_2 son independientes.

En este caso la solución general de (6.29) es:

$$y(x, C_1, C_2) = C_1\, e^{r_1 x} \,+\, C_2\, e^{r_2 x}. \tag{6.31}$$

Ejemplo 6.2.16 *Halar la solución general de la EDO:*

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Solución. La ecuación característica es:

$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$

que tiene como raices:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 3,$$

luego dos soluciones son e^{-x}, e^{3x}, y son independientes ya que su wronskiano es:

$$W(e^{-x}, e^{3x}) = e^{-x} 3 e^{3x} - e^{-x}(-1)e^{3x} = 4e^{2x} \neq 0.$$

Así pues la solución general es

$$y(x, C_1, C_2) = C_1\, e^{-x} \,+\, C_2\, e^{3x}.$$

6.2.4 Una sola raíz o raíz doble

Sea ahora el caso $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a}$, es decir una raíz doble de la ecuación característica (6.30). En este caso las funciones $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = xe^{r_1 x}$ son dos soluciones independientes de (6.29). En efecto: y_1 es solución obviamente e y_2 también ya que

$$y_2' = e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x},$$

$$y_2'' = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x},$$

por tanto

$$a(2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}) + b(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}) + cxe^{r_1 x} = [2ar_1 + b]e^{r_1 x} + [ar_1^2 + br_1 + c]xe^{r_1 x} \equiv 0,$$

pues, como r_1 es la raíz de la ecuación característica, los términos entre corchetes son nulos.

Su wronskiano es:

$$W(e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}) = e^{r_1 x}(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}) - r_1 e^{r_1 x} x e^{r_1 x} = e^{2r_1 x} \neq 0,$$

luego y_1 e y_2 son independientes.

En este caso la solución general de (6.29) es:

$$y(x, C_1, C_2) = C_1\, e^{r_1 x} \;+\; C_2\, x\, e^{r_1 x} = (C_1 \;+\; C_2\, x\,)e^{r_1 x}. \tag{6.32}$$

Ejemplo 6.2.17 *Halar la solución general de la EDO:*

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Solución. La ecuación característica es:

$$r^2 - 6r - 9 = 0,$$

que tiene como única raíz :

$$r_1 = 3,$$

luego dos soluciones son e^{3x}, xe^{3x}, y son independientes ya que su wronskiano es:

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = e^{3x}(e^{3x} + 3xe^{3x}) - 3e^{3x}xe^{3x} = e^{6x} \neq 0.$$

Así pues la solución general es

$$y(x, C_1, C_2) = C_1\, e^{3x} \;+\; C_2\, xe^{3x} = (C_1 \;+\; C_2\, x)e^{3x}.$$

6.2.5 Caso de ninguna raíz real

Sea ahora el caso $\Delta \doteq b^2 - 4ac < 0$. Se pone entonces $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ y $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. En este caso las funciones $y_1 = e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x)$ e $y_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ son dos soluciones independientes de (6.29). En efecto: Para y_1 se tiene:

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x),$$

$$y_1'' = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x),$$

por tanto:

$$a[(\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x)]+$$

$$+b[\alpha e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x)] + ce^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) =$$

$$[(\alpha^2 - \beta^2)a + \alpha b + c]e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) + [2\alpha\beta a + \beta b]e^{\alpha x}\cos(\beta x)) \equiv 0,$$

pues, teniendo en cuenta las definiciones de Δ, α y β, los términos entre corchetes son nulos.

Análogamente se prueba que y_2 es solución.

Su wronskiano es:

$$W(e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x)) = e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x)[\alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x)]-$$

$$-[\alpha e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x)]e^{\alpha x}\cos(\beta x) =$$

$$= -2\beta e^{\alpha x} \neq 0,$$

ya que $\beta \neq 0$. Luego y_1 e y_2 son independientes.

En este caso la solución general de (6.29) es:

$$y(x, C_1, C_2) = C_1\, e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x) \,+\, C_2\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) = (C_1\,\mathrm{sen}(\beta x) \,+\, C_2\,\cos(\beta x))e^{\alpha x}. \tag{6.33}$$

Ejemplo 6.2.18 *Halar la solución general de la EDO:*

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Solución. La ecuación característica es:

$$r^2 - 6r + 13 = 0,$$

que no tiene raices reales ya que $\Delta = -16 < 0$. Se tiene entonces $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. En este caso las funciones $y_1 = e^{3x}\text{sen}(2x)$ e $y_2 = e^{3x}\cos(2x)$ son dos soluciones, que son independientes ya que su wronskiano es:

$$W(e^{3x}\text{sen}(2x), e^{3x}\cos(2x)) = e^{3x}\text{sen}(2x)[3e^{3x}\cos(2x) - 2e^{3x}\text{sen}(2x)]-$$

$$-[3e^{3x}\text{sen}(2x) + 2e^{3x}\cos(2x)]e^{3x}\cos(2x) =$$

$$= -4e^{3x} \neq 0.$$

Así pues la solución general es

$$y(x, C_1, C_2) = (C_1\,\text{sen}(2x) \; + \; C_2\,\cos(2x))e^{3x}.$$

6.2.6 Ecuaciones no homogéneas

Estudiamos ahora el caso de la EDO no homogénea con coeficientes constantes:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x). \tag{6.34}$$

Para ello, según el teorema (6.2.14), hemos de saber hallar una solución cualquiera de la EDO anterior. Para esto vamos a utilizar el llamado método de **variación de contantes**, que a continuación pasamos a describir.

Supongamos que conocemos dos soluciones independientes y_1, y_2 de la EDO homogénea asociada. El método de variación de contantes consiste en buscar una solución particular de la forma:

$$y_p = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{6.35}$$

y para ello hemos de hallar las funciones $C_1(x), C_2(x)$. Esto se consigue obligando a que (6.35) verifique la EDO (6.34). Derivando se tiene:

$$y_p' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x), \tag{6.36}$$

y se pone

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \tag{6.37}$$

con lo que (6.36) queda:

$$y_p' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x). \tag{6.38}$$

Derivando de nuevo, se tiene:

$$y_p'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x). \tag{6.39}$$

Obligando que y_p sea solución, se tiene:

$$a[C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)] + b[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] +$$

$$+c[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)] = f(x),$$

i.e.

$$[ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x)]C_1(x) + [ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x)]C_2(x) +$$

$$+[a(C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x))] = f(x),$$

y como y_1, y_2 son soluciones de la EDO homogénea los dos primeros corchetes son nulos, luego para que y_p sea solución se ha de verificar:

$$a(C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)) = f(x). \tag{6.40}$$

Por tanto hemos de hallar C_1, C_2 que verifiquen el sistema (6.37) (6.40). Éste es un sistema algebraico en las incognitas $C_1'(x), C_2'(x)$ cuyo determinante de coeficientes es el wronskiano de las soluciones y_1, y_2 y por tanto no es nulo, luego el sistema tiene una única solución.

Una vez hallada la solución, $C_1'(x), C_2'(x)$, de este sistema, basta integrar para obtener las funciones buscadas C_1, C_2.

Ejemplo 6.2.19 *Hallar la solución general de la EDO:*

$$y'' + y' - 2y = x + 1,$$

y hallar la solución del problema de contorno:

$$(CC) \begin{cases} y'' + y' - 2y = x + 1 \quad \forall x \in [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Solución. La ecuación característica de la ecuación homogénea es:

$$r^2 + r - 2 = 0,$$

que tiene como raices:

$$r_1 = -2, \quad r_2 = 1,$$

luego dos soluciones son e^{-2x}, e^x, y son independientes ya que su wronskiano es:

$$W(e^{-4x}, e^{3x}) = e^{-2x}e^x - e^{-2x}(-2)e^x = 3e^{-x} \neq 0.$$

Así pues la solución general de la ecuación homogénea es

$$y(x, C_1, C_2) = C_1\, e^{-2x} \; + \; C_2\, e^x.$$

Para hallar una solución particular por el método de variación de constantes, ponemos

$$y_p(x, C_1, C_2) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x,$$

y obligamos a que sea solución de la EDO. Se tiene:

$$y_p'(x, C_1, C_2) = -2C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x + C_1'(x)e^{-2x} \; + \; C_2'(x)e^x,$$

y se pone:

$$C_1'(x)e^{-2x} \; + \; C_2'(x)e^x = 0, \tag{6.41}$$

luego se tiene:

$$y_p'(x, C_1, C_2) = -2C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x,$$

de donde, derivando de nuevo, se tiene:

$$y_p''(x, C_1, C_2) = 4C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x - 2C_1'(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x.$$

Por tanto para que $y(x, C_1, C_2)$ sea solución de la EDO se ha de tener:

$$[4C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x - 2C_1'(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x] + [-2C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x]$$

$$-2[C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^x] = x + 1,$$

i.e.

$$-2C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^x = x + 1. \tag{6.42}$$

Luego para hallar $C_1(x), C_2(x)$ hemos de resolver primero el sistema algebraico dado por (6.41) (6.42), i.e.

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} \; + \; C_2'(x)e^{x} = 0, \\ -2C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{x} = x+1. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se tiene:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{3}(x+1)e^{2x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{3}(x+1)e^{-x}.$$

Ahora se integra obteniendose:

$$C_1(x) = -\frac{1}{3}\int (x+1)e^{2x}dx = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})e^{2x} = -\frac{1}{12}(2x+1)e^{2x},$$

$$C_2(x) = \frac{1}{3}\int (x+1)e^{-x}dx = \frac{1}{3}(-x-2)e^{-x} = -\frac{1}{3}(x+2)e^{-x},$$

luego una solución particular es:

$$y_p(x) = -\frac{1}{12}(2x+1)e^{2x}e^{-2x} - \frac{1}{3}(x+2)e^{-x}e^{x} = -\frac{1}{4}(2x+3),$$

y por tanto la solución general de la EDO es:

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{4}(2x+3).$$

Para hallar la solución del problema (CC) hemos de imponer a la solución general obtenida las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$. Se tiene entonces que se ha de verificar el sistema:

$$\begin{cases} C_1 \; + \; C_2 - \frac{3}{4} = 0, \\ C_1\, e^{-2} + C_2 e^{1} - \frac{5}{4} = 0. \end{cases}$$

Que tiene como solución:

$$C_1 = \frac{5-3\,e}{4(e^{-2}-e)}, \quad C_2 = \frac{3e^{-2}-5}{4(e^{-2}-e)}.$$

Por tanto la solución del problema de contorno es:

$$y = \frac{(5-3\,e)e^{-2x} + (3\,e^{-2}-5)e^{x}}{4(e^{-2}-e)} - \frac{1}{4}(2x+3).$$

6.2.7 Ejercicios

1. Resolver la EDO del movimiento armónico simple para el desplazamiento y:

$$my'' = -ky$$

donde $m > 0$ es la masa y $k > 0$ es la rigidez.

2. Resolver la EDO del movimiento de una cadena que se desliza sobre un cilindro pulimentado para el desplazamiento y:

$$y'' = \frac{2g}{l}y$$

donde g es la fuerza de la gravedad y l es la longitud de la cadena.

3. Resolver la EDO del movimiento armónico simple amortiguado forzado para el desplazamiento y:

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = f_0 \operatorname{sen}(\alpha t)$$

donde $b = \dfrac{l}{2m}$, siendo l la constante de amortiguamiento, y $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, siendo k la constante del resorte. $f_0 \operatorname{sen}(\alpha t)$ es la fuerza externa aplicada al resorte.

4. Una partícula efectúa vibraciones ármonicas amortiguadas, regidas por la EDO: $y''+4y'+\omega^2 y = 0$. Hallar ω y las constantes de integración, sabiendo que inicialmente la posición es 6, la velocidad es -20 y la aceleración es 32.

5. La suspensión de un automovil se puede modelar como un resorte vibrante con amortiguamiento debido a los amortiguadores, esto conduce a la EDO: $mx''(t) + lx'(t)+kx(t) = 0$. Aquí $x(t)$ es el desplazamiento vertical del automovil en el instante t. Si la masa del automoviles de 1000 kg y la constante del resorte es 3000 kg/s^2, determinar el valor mínimo para la constante de amortiguamiento (en kg/seg) que proporciona un viaje suave, i.e. libre de oscilaciones.

6. Resolver la EDO de los circuitos eléctricos para la carga q

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$$

donde L es la inductancia, R la resistencis, C la capacitancia y E la fuerza electromotriz externa.

7. Un generador eléctrico suministra un voltaje $E = 1700\,\mathrm{sen}(20t)$ voltios y se halla conectado en serie con una inductancia de 1 henrio, una resistencia de 20 ohmios y un condensador de 0,002 faradios. Si en el instante $t = 0$ no circula corriente, pero el condensador tiene una carga de -4 culombios, hallar la carga q y la instensidad de la corriente i en cada instante t. Se recuerda que la intensidad de la corriente viene dada por $i = q'$.

8. Si en el circuito del ejercicio anterior se reemplaza el generador por una batería de fuerza electromotriz constante de 500 voltios, hallar q e i en cada instante sabiendo que inicialmente no tiene carga ni circula ninguna corriente. Hallar también los límites de i y q cuando $t \longrightarrow \infty$.

Bibliography

[1] Demidovich, 5000 problemas de Análisis Matemático.

[2] Nagle, R. K. - Saff, E. B. - Snidder, A. D. *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera,* Ed. Addison-Wesley - Pearson Education (2001).

[3] Simons, Ecuaciones Diferenciales (1965).

[4] Stewart J., Cálculo, Conceptos y contextos, International Thompson Editores, Madrid (1999).