Matemáticas Primer Examen Parcial, 18 de Noviembre de 2004, Prueba 1

Ejercicio 1: Estudiar el dominio, asíntotas, signo, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{x+1}.$$

Ejercicio 2: En un laboratorio se desea hacer una habitación frigorífica de $V\ m^3$ de capacidad y con una altura de 2 m. Sabiendo que el coste del material de las paredes es de 60 euros por m^2 y que el material del techo y del suelo cuesta el doble, se pide:

a) Escribe la función que da el precio de la habitación en función de los metros que tenga de ancho.

b) Para $V = 5\ m^3$ el coste de la habitación viene dado por la función

$$C(x) = \frac{600}{x} + 240\,x + 600,$$

donde x representa los metros de ancho de la habitación y C el precio de esa habitación. Calcula el valor de x para que el coste sea mínimo. ¿Cúanto cuesta la habitación?

Ejercicio 3: Se consideran las funciones

$$f(x) = \arctan x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{2x+1}{x-2}.$$

Escribe la función $h(x) = (f \circ g)(x)$, calcula su derivada en cada punto donde esté definida la composición y determina la ecuación de la tangente a la curva $y = h(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Tiempo: 2 horas
Puntuación: Ejercicio 1: 4 puntos; Ejercicio 2: 3.5 puntos y Ejercicio 2.5 puntos.

MATEMÁTICAS - CURSO 2004/05
1^a PRUEBA (18-11-2004)
Grupo A

1. Calcular el dominio de existencia, signo, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}.$$

2. En una de las riberas de un río, de 4 Hm. de ancho, hay una central eléctrica y en la otra, ℓ Hm. aguas arriba, hay una fábrica. Se desea conectar la fábrica con la central mediante una cable. Se sabe que el tendido por tierra cuesta la tercera parte que bajo agua.

a) Obtener razonadamente la función que da el coste del tendido.

b) Se sabe que para $\ell = 12$ la función que da el coste es $f(x) = 4 - \frac{x}{3} + \sqrt{x^2+16}$. ¿Cuál es la longitud que da el mínimo coste?

3. Se consideran las funciones

$$f(x) = \ln x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x+1}{x^2}.$$

Escribe la función $h(x) = (f \circ g)(x)$, calcula su derivada en cada punto donde esté definida la composición y determina la ecuación de la tangente a la curva $y = h(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Puntuación. 1.= 4 puntos; 2.= 3'5 puntos; 3.= 2'5 puntos
Tiempo. 2h

MATEMÁTICAS - CURSO 2005/06

1^a PRUEBA (10-11-2005) **Tipo 1**

1.

a) Calcular el dominio de existencia, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}.$$

b) Calcular la recta tangente a la función f en el punto $x = -1$.

2. Se quiere construir un marco para una ventana rectangular que debe tener 1 m^2 de área. El coste del marco se estima en 20 euros por metro de altura y 10 euros por cada metro de anchura. Queremos calcular las dimensiones del marco más económico. Para ello:

a) Obtener razonadamente la función que da el coste del marco en función de la anchura x de la ventana.

b) Si has realizado correctamente el apartado *a*), la función coste es

$$C(x) = 20x + \frac{40}{x}.$$

¿Cuál es la anchura que da el mínimo coste?

3. Probar que la siguiente ecuación tiene una única raíz:

$$e^{-x+2} = 2x + 3.$$

Puntuación. 1.= 4 puntos; 2.= 3'5 puntos; 3.= 2'5 puntos
Tiempo. 2h

MATEMÁTICAS - CURSO 2005/06

1^a PRUEBA (10-11-2005) **Tipo 2**

1.

a) Calcular el dominio de existencia, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de la función
$$f(x) = \frac{e^x}{3x^2}.$$

b) Calcular la recta tangente a la función f en el punto $x = 1$.

2. Se quiere construir un marco para una ventana rectangular que debe tener 2 m^2 de área. El coste del marco se estima en 30 euros por metro de altura y 10 euros por cada metro de anchura. Queremos calcular las dimensiones del marco más económico. Para ello:

a) Obtener razonadamente la función que da el coste del marco en función de la anchura de la ventana.

b) Si has realizado correctamente el apartado *a*), la función coste es
$$C(x) = 20x + \frac{120}{x}.$$

¿Cuál es la anchura que da el mínimo coste?

3. Probar que la siguiente ecuación tiene una única raíz:
$$e^{-2x+1} = x - 3.$$

Puntuación. 1.= 4 puntos; 2.= 3'5 puntos; 3.= 2'5 puntos

Tiempo. 2h

MATEMÁTICAS - CURSO 2005/06

1^a PRUEBA (10-11-2005) **Tipo 1**

1.

a) Calcular el dominio de existencia, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{e^{1-x}}{x+1}.$$

a) Calcular la recta tangente a la función f en el punto $x = 0$.

2. Se quiere construir un marco para una puerta rectangular que debe tener 3 m^2 de área. El coste del marco se estima en 10 euros por metro de altura y en 30 euros por cada metro de anchura. Queremos calcular las dimensiones del marco más económico. Para ello:

a) Obtener razonadamente la función que da el coste del marco de la puerta en función de la anchura x de la misma.

b) Si has realizado correctamente el apartado *a*), la función coste es

$$C(x) = 30x + \frac{60}{x}.$$

¿Cuál es la anchura que da el mínimo coste?

3. Probar que la siguiente ecuación tiene una única raíz:

$$\ln(x-1) = -x + 3.$$

Puntuación. 1.= 4 puntos; 2.= 3'5 puntos; 3.= 2'5 puntos
Tiempo. 2h

MATEMÁTICAS - CURSO 2005/06

1^a PRUEBA (10-11-2005) **Tipo 2**

1.

a) Calcular el dominio de existencia, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x-1}.$$

a) Calcular la recta tangente a la función f en el punto $x = 0$.

2. Se quiere construir un marco para una puerta rectangular que debe tener 3 m^2 de área. El coste del marco se estima en 20 euros por metro de altura y en 80 euros por cada metro de anchura. Queremos calcular las dimensiones del marco más económico. Para ello:

a) Obtener razonadamente la función que da el coste del marco de la puerta en función de la altura x de la misma.

b) Si has realizado correctamente el apartado a), la función coste es

$$C(x) = 40x + \frac{280}{x}.$$

¿Cuál es la altura que da el mínimo coste?

3. Probar que la siguiente ecuación tiene una única raíz:

$$\ln(x-1) = -2x + 5.$$

Puntuación. 1.= 4 puntos; 2.= 3'5 puntos; 3.= 2'5 puntos
Tiempo. 2h

MATEMÁTICAS (LICENCIATURA DE BIOLOGÍA)
Tercera Convocatoria
2-12-2005

1. Calcular el dominio de existencia, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, y puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Representarla gráficamente.

2. El área de una elipse de semiejes a y b vale $S = \pi ab$.

Los cristales de unas gafas tienen forma elíptica. Determinar las dimensiones de los semiejes si se desea que tengan área máxima y por razones técnicas o de diseño, la distancia entre dos vértices consecutivos es de 4 cm.

3. Se considera la función $f(x) = x + ln(x)$.

a) Probar que existe una única solución de la ecuación $f(x) = 2$.

b) Aplicando el método de Newton, aproximar dicha solución calculando hasta la segunda iteración.

c) Calcular el área encerrada entre la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$,

4. En el proceso de conservación de alimentos, el azúcar de caña se transforma en otra sustancia. Bajo ciertas condiciones, la velocidad con la que desaparece el azúcar es proporcional al producto de la cantidad de azúcar por la cantidad de la nueva sustancia. Admitamos que en el instante inicial la cantidad de azúcar es 120 gramos y la cantidad de la otra sustancia es 46 gramos. Denotemos por $y = y(t)$ la cantidad de aźucar en el instante t. Se pide:

a) Demostrar que y satisface la ecuación

$$y' = 166ky - ky^2, \tag{1}$$

donde k es la constante de proporcionalidad que aparece en la ley de transformación.

b) Calcular y resolviendo la ecuación (1) cuando $k = -0'32$.

Puntuación: Cada ejercicio 2.5 puntos.
Tiempo: 3.5 horas

MATEMÁTICAS - CURSO 2005/06, Primera Convocatoria, 10-2-2006

1. Calcula el dominio de existencia, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x+2}.$$

2. Se desea hacer una lata cilíndrica de 48π cm^2 de capacidad. El precio del material del lateral de la lata es de c euros/cm^3, mientras que el precio del fondo y de la tapa es el triple. Queremos calcular las dimensiones de la lata más económica. Para ello:

a) Obtén razonadamente la función que da el coste de la lata en función del radio x de la base.

b) Si has realizado correctamente el apartado *a*), la función coste es

$$C(x) = 6c\pi x^2 + \frac{96c\pi}{x}.$$

¿Cuál es el radio y la altura que dan el mínimo coste?

3. Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & x > 0, \\ e^{-bx} & x \leq 0. \end{cases}$$

4. *a*) Discute, razonadamente, el número de soluciones de la ecuación $xe^{2x} - 3 = 0$.
b) Aproxima por el método de Newton la mayor de las raíces, calculando hasta la segunda iteración.

5. *a*) Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{t^2-1}\,dt$.
b) Estudia el signo de la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-2x}}$ para $x > 0$.
c) Halla el área de la región plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$.

6. Una piscina contiene 100000 l. de agua. Para depurarla, comienza a entrar en ella una disolución de hipoclorito a una velocidad de 20 l./min. La concentración de hipoclorito de esta disolución es desconocida, k. La disolución de hipoclorito y agua, instantáneamente homogénea, sale de la piscina a la misma velocidad. Encuentra la cantidad de hipoclorito que hay en la piscina en cada instante si inicialmente no había vestigios y al cabo de media hora hay una concentración de 0,00021 gr./l.

Ejercicios y Puntuación.
Sólo al primer parcial: Ejercicios 1 (3.5 puntos), 2 (3.5 puntos) y 3 (3 puntos).
Sólo al segundo parcial: Ejercicios 4 (3 puntos), 5 (3.5 puntos) y 6 (3.5 puntos).
Toda la asignatura: Ejercicios 1, 2, 5 y 6, (2.5 puntos cada Ejercicio).

Tiempo.
Un solo parcial: 2 horas
Toda la asignatura: 3.5 horas

MATEMÁTICAS - CURSO 2005/06
2^a Convocatoria (7-6-2006)

1. a) Representar gráficamente la función

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x},$$

hallando previamente su dominio de existencia, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

b) Hallar el área de la región plana limitada por la curva $y = f(x)$ y la recta horizontal $y = 2$.

2. Se trata de hacer una piscina de fondo cuadrado, cuyo volumen es igual a 256 m^3. Determinar las dimensiones de dicha piscina para que la cantidad de pintura necesaria para pintar las paredes y el fondo sea mínima.

3. a) Comprobar que, para hallar el punto de corte de la gráfica de la función

$$y = \frac{x^5 + 2x^4 + 4}{x^4 + x^3 + 1}$$

con su asíntota oblicua, hay que resolver la ecuación

$$x^3 + x - 3 = 0.$$

b) Separar las raíces de la ecuación anterior y determinar la mayor mediante el método de Newton hasta la segunda iteración.

4. Un acuario contiene inicialmente 60 l. de agua pura. Entra al acuario, a razón de 2 litros por minuto, salmuera que contiene 20 gr. de sal por litro y la solución, perfectamente mezclada, sale a la misma velocidad.

a) Encontrar la cantidad de sal que hay en el acuario en cada instante.

b) En este acuario se van a soltar peces que necesitan vivir a una concentración de sal de 15 gr. litro. ¿En qué momento se alcanza dicha concentración?

Tiempo: 3h 30 min. **Puntuación:** 2’5 puntos cada ejercicio.

MATEMÁTICAS (LICENCIATURA DE BIOLOGÍA)
Examen de diciembre
12-12-2006

1. Consideremos la función:

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{x+1}.$$

Estudiar su dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, el crecimiento-decrecimiento y los extremos relativos.

2. La población de una clase de bacterias medida en miles viene dada por la función

$$f(t) = t^2 e^t,$$

donde t es el tiempo en horas. Queremos saber una aproximación del tiempo en el que la población de bacterias sea igual a 5000. Para ello aplica el método de Newton hasta la segunda iteración.

3.

1. En la página rectangular de un libro la parte escrita ocupa 400 cm^2 y los márgenes superior e inferior deben ser 2 cm y los márgenes laterales 3 cm cada uno. Hallar la función que da el área de la hoja.
2. Calcular el mínimo de la siguiente función den el intervalo $(0, \infty)$

$$A(x) = 2x + \frac{2400}{x} + 424.$$

4.

a) Calcular la siguiente integral

$$\int \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt.$$

b) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t+1} + \dfrac{1}{t+2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Puntuación: Cada ejercicio 2.5 puntos.
Tiempo: 3.5 horas

MATEMÁTICAS - CURSO 2006/07
2^a PRUEBA (18-1-2007), Tipo 1.1

1. Dada la ecuación:

$$(x-1)e^x + x^2 = 0.$$

   a) Indicar, razonadamente, el número de raíces de la ecuación anterior.
   b) Hallar un intervalo donde se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar la mayor de estas raíces y obtener la segunda iteración.

2. a) Calcular la integral siguiente

$$\int cos(x)(1-x)dx.$$

   b) Calcular el área comprendida, en el primer cuadrante, entre las funciones $f(x) = cos(x)$, $g(x) = xcos(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

3. La población de un cierto país sigue la ley logística

$$y' = 5y - 2y^2,$$

   donde $y(t)$ representa el número de individuos pasados t meses, en millones, de dicha población. Sabiendo que inicialmente había un millón de habitantes, $y(0) = 1$,

   a) Calcular $y(t)$.
   b) ¿En qué momento y alcanza el valor 2? ¿ A qué tiende la población?

Tiempo: 2 horas.
Puntuación: Ejercicio 1: 3 puntos, Ejercicios: 2 y 3: 3.5 puntos.

MATEMÁTICAS - CURSO 2006/07
2^a PRUEBA (18-1-2007), Tipo 1.2

1. Dada la ecuación:

$$(x-1)e^x + x^2 = 2.$$

   a) Indicar, razonadamente, el número de raíces de la ecuación anterior.
   b) Hallar un intervalo donde se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar la mayor de estas raíces y obtener la segunda iteración.

2. a) Calcular la integral siguiente

$$\int sen(x)(1-x)dx.$$

   b) Calcular el área comprendida, en el primer cuadrante, entre las funciones $f(x) = sen(x)$, $g(x) = xsen(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

3. La población de un cierto país sigue la ley logística

$$y' = 3y - 2y^2,$$

   donde $y(t)$ representa el número de individuos pasados t meses, en millones, de dicha población. Sabiendo que inicialmente había cuatro millones de habitantes, $y(0) = 4$,

   a) Calcular $y(t)$.
   b) ¿En qué momento y alcanza el valor 2? ¿ A qué tiende la población?

Tiempo: 2 horas.
Puntuación: Ejercicio 1: 3 puntos, Ejercicios: 2 y 3: 3.5 puntos.

MATEMÁTICAS - CURSO 2006/07
2^a PRUEBA (18-1-2007), Tipo 2.1

1. Dada la ecuación:

$$x^2e^x = 4.$$

   a) Indicar, razonadamente, el número de raíces de la ecuación anterior.
   b) Hallar un intervalo donde se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar la mayor de estas raíces y obtener la segunda iteración.

2. a) Calcular la integral siguiente

$$\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx.$$

   b) Calcular

$$\int_{ln(2)}^{ln(3)} \frac{(3e^t+5)e^t}{e^{3t}-e^{2t}-e^t+1}dt.$$

3. Consideremos el problema siguiente

$$\begin{cases} y' = -2y + t \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

   a) Calcular $y(t)$.
   b) Calcular $y(1)$ y $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Tiempo: 2 horas.
Puntuación: Ejercicio 1: 3 puntos, Ejercicios: 2 y 3: 3.5 puntos.

MATEMÁTICAS - CURSO 2006/07
2^a PRUEBA (18-1-2007), Tipo 2.2

1. Dada la ecuación:

$$x^2 e^x = 3.$$

   a) Indicar, razonadamente, el número de raíces de la ecuación anterior.
   b) Hallar un intervalo donde se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar la mayor de estas raíces y obtener la segunda iteración.

2. a) Calcular la integral siguiente

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)^2} dx.$$

   b) Calcular

$$\int_{ln(2)}^{ln(3)} \frac{(2e^t+3)e^t}{e^{3t}+e^{2t}-e^t-1} dt.$$

3. Consideremos el problema siguiente

$$\begin{cases} y' = 3y - t \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

   a) Calcular $y(t)$.
   b) Calcular $y(2)$ y $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Tiempo: 2 horas.
Puntuación: Ejercicio 1: 3 puntos, Ejercicios: 2 y 3: 3.5 puntos.

MATEMÁTICAS Examen final primera convocatoria 07/08. 24 de enero de 2008

PRIMER PARCIAL

Ejercicio 1. Resuelve por el método de Gauss el sistema

$$\begin{cases} x+3y-z=-2 \\ x+2y+z=-1 \\ x+5y-5z=-4 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Representa gráficamente la función

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2},$$

estudiando para ello el dominio, las asíntotas, crecimiento y decrecimiento, extremos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
A la vista de la gráfica, contesta razonadamente a estas preguntas: ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x)=9$? ¿Cuál es el máximo de $f(x)$ en $[-2,-1]$?

Ejercicio 3. Tenemos una figura geométrica consistente en un rectángulo sobre el que se apoya un triángulo equilátero. El perímetro de la figura completa es de 6 unidades. Hallar la base del rectángulo que hace que el área del rectángulo sea máxima.

SEGUNDO PARCIAL

Ejercicio 4. Dada la ecuación:

$$x^3-3x^2+7=0,$$

se pide:
a) Indicar, razonadamente, el número de raíces de la ecuación anterior.
b) Hallar un intervalo donde se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar la mayor de estas raíces. Obtener la segunda iteración.

Ejercicio 5.
a) Calcular la integral siguiente

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx.$$

b) Calcular el área comprendida entre la curva $y=x^2\operatorname{sen} x$, el eje OX, la recta $x=-\frac{\pi}{2}$ y la recta $x=\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 6. Se considera $y(t)$ la cantidad de peces en un lago en el instante t, que si se considera un régimen de capturas con velocidad proporcional a la cantidad de peces y con cantidad inicial 2 toneladas, verifica el siguiente problema diferencial:

$$y'=y(2-y)-ay \quad (a>0), \quad y(0)=2.$$

1. Para $a=2$, resolver el problema. ¿Para qué tiempo desaparecen los peces ?
2. Para $a=1$, resolver el problema y calcular $\lim_{t\to+\infty} y(t)$. ¿Desaparecen los peces ?

Alumnos con el primer parcial pendiente: Problemas 1, 2, 3.
Puntuación: Problema 1: 2,5 ptos. Problema 2: 4 ptos. Problema 3: 3,5 ptos.

Alumnos con el segundo parcial pendiente: Problemas 4, 5, 6.
Puntuación: Problema 4: 3 ptos. Problema 5: 3,5 ptos. Problema 6: 3,5 ptos.

Alumnos con toda la asignatura: Problemas 2, 3, 4, 6.
Puntuación: Problema 2: 3ptos. Problema 3: 2 ptos. Problema 4: 2 ptos. Problema 6: 3 ptos.

Ejercicio 1. Resuelve por el método de Gauss el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ 2x + 3y + 3z = 5 \\ 3x + 4y - 2z = -10 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3},$$

estudiando para ello el dominio, las asíntotas, crecimiento y decrecimiento, extremos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
¿Cuáles son y dónde se alcanzan el máximo y el mínimo absolutos de $f(x)$ en $[-1, 1]$?

Ejercicio 3. Dada la ecuación:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 15 = 0,$$

se pide:
a) Indicar, razonadamente, el número de raíces reales de la ecuación anterior.
b) Hallar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la mayor de estas raíces. Considerando x_0 según determina la regla de Fourier, obtener la segunda iteración x_2.

Ejercicio 4. Se sabe que la velocidad de propagación de una epidemia es proporcional al número de personas infectadas por el número de personas no infectadas. Si denotamos por $y(t)$ el número de personas enfermas en el tiempo t (medido en días), se verifica por tanto la ecuación

$$y'(t) = k\,y(t)(P - y(t)),$$

donde k es la tasa de propagación y P indica la población total.
En una población de 1000 habitantes se detecta una enfermedad con tasa de propagación $k = 2$ que afecta inicialmente a 10 personas.

a) Resolver la ecuación diferencial que nos proporciona la evolución de $y(t)$.

b) Averiguar el número de enfermos que existirá a los 12 días.

c) Averiguar si el número de enfermos tenderá a estabilizarse en algún valor cuando $t \to +\infty$.

Puntuación: Ejercicio 1: 2 ptos. Ejercicio 2: 3 ptos. Ejercicio 3: 2,5 ptos. Ejercicio 4: 2,5 ptos.