Problemas de Matemáticas	Biología	2008/2009	Hoja 3

1. Calcula la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   (a) $f(x) = e^{-x^2},\ x = 1$ (b) $f(x) = \ln(x+1),\ x = 2$

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$ b) $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ c) $f(x) = \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}x$

   d) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ e) $f(x) = e^{-x^2+3}$ f) $f(x) = \mathrm{sen}^2\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

   g) $f(x) = \mathrm{sen}(1-x)\,\cos^3 x$ h) $f(x) = 2^{x^3-3x^2}$ i) $f(x) = \mathrm{arc}\,\cos\frac{x-1}{2}$

   j) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ k) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ l) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

   m) $f(x) = \cos\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^2$ n) $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}$ o) $f(x) = \mathrm{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x^2+1}$

   p)$f(x) = \dfrac{\ln(x^2-2x+1)}{\mathrm{sen}\,3x}$ q) $f(x) = \mathrm{arc\,sen}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ r) $f(x) = \mathrm{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}$

3. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4. Discute según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la derivabilidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ ax + b & \text{si } x < 1 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

5. Demuestra que las siguientes ecuaciones tienen una única raíz real:

   (a) $2^{-x} = x$; (b) $\cos x = 2x$.

6. El crecimiento de dos poblaciones viene dado por las siguientes leyes (exponencial y lineal):

   $$p_1(t) = e^t, \quad p_2(t) = t + 3$$

   donde $t \geq 0$. Prueba que existe un único instante donde ambas poblaciones coinciden.

7. Determina los extremos absolutos de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ e^{x-1} + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ \mathrm{sen}x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [-2, 0] \\ x^2\ln x + 1 & \text{si } x \in (0, e] \end{cases}$

8. Dibuja y determina los extremos absolutos de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 1/2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9. Calcula los siguientes límites, donde $a > 0$:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x^2}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\mathrm{sen}(2x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\mathrm{sen}x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a \ln x$ (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^x + 3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{sen}x}\right)$ (l) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$

10. Representa gráficamente:

(a) $y = x^4 - 2x^2$ (b) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ (c) $y = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ (d) $y = x^2 \mathrm{e}^{-x}$ (e) $y = \dfrac{1}{1+e^x}$

(f) $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$, $x > 0$ (g) $y = \dfrac{e^x}{1+x}$ (h) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$ (i) $y = \ln(x^2 + 2x)$ (j) $y = \dfrac{e^{-x}}{x-1}$

11. En una reacción química de dos reactivos moleculares A y B, la velocidad de dicha reacción es

$$R(x) = k(a-x)(b-x)$$

donde x es la concentración del producto resultante de dicha reacción; a y b son las concentraciones iniciales de A y B; y k es una constante de proporcionalidad. Supongamos que $k = 2$, $a = 9$ y $b = 7$. Observemos que la función R sólo tiene sentido si $x \in [0, 7]$.

(a) ¿Para qué valores la velocidad es creciente y cuándo decreciente?

(b) ¿En qué momento alcanza la velocidad el máximo? ¿Cuánto vale ese máximo?

12. Según la *ley de Monod*, la velocidad de crecimiento de un organismo depende de la concentración de algún nutriente x de la forma

$$R(x) = \frac{ax}{k+x}$$

con $a, k \geq 0$. Supongamos que $a = 5$ y $k = 1$,

(a) ¿En qué momento la velocidad de crecimiento vale 4?

(b) ¿Para qué valores la velocidad de crecimiento es creciente y cuándo es decreciente?

(c) Según esta ley, ¿qué le ocurre a la velocidad de crecimiento cuando hay muchos nutrientes?

13. Los peces crecen indefinidamente durante toda su vida. Su crecimiento se puede modelar mediante la función de *von Bertalanffy*

$$L(t) = l(1 - e^{-t}),\ t \geq 0,$$

siendo $L(t)$ la longitud a la edad t y l una constante positiva.

(a) Determina en qué momento la función L es creciente y cuándo decreciente.

(b) ¿A qué tiende la longitud cuando $t \to \infty$? ¿ Qué significa l?

14. Es conocido que la desintegración del carbono 14, C^{14}, sigue la ley

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t},\ t \geq 0,$$

siendo $W(t)$ la cantidad de C^{14} en el instante t, W_0 la cantidad inicial y $\lambda > 0$ la velocidad de desintegración. Supongamos que $W_0 = 2$ y $\lambda = 0.01$.

(a) Comprueba que W es una función decreciente.

(b) ¿Qué le ocurre a la cantidad de C^{14} cuando pasa mucho tiempo?

(c) ¿En qué momento $W = 1$?

15. Sea

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

(a) Determina dónde es f creciente y decreciente. Calcula sus extremos.

(b) ¿Dónde f es cóncava y dónde convexa? Calcula los puntos de inflexión.

(c) Calcula los $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

16. Los gusanos de yema de abeto son una plaga importante que desfolia los pinos de Canadá. Sus depredadores son los pájaros. Un modelo que da la velocidad de depredación es

$$f(x) = \frac{ax}{k + x^2}$$

siendo x la densidad de gusanos, $a, k > 0$. ¿Para qué cantidad de gusanos es máxima la velocidad de depredación?

17. Sea $f(N)$ la cosecha de una explotación agrícola de maíz en función del nivel de nitrógeno en el suelo, N. Una posibilidad viene dada por

$$f(N) = \frac{N}{1 + N^2}.$$

Calcula el nivel de nitrógeno que maximiza la cosecha.

18. Del polinomio $p(x) = x^2 + ax + b$ se sabe que tiene un mínimo en $x = 2$ y que su valor es -1. Calcular a y b.

19. Uno de los lados de un campo abierto está acotado por un río recto.

   (a) ¿Cómo podrían cercarse los otros tres lados de una figura rectangular para encerrar la mayor área posible con una cerca de longitud 80 m?

   (b) Si se desea vallar una superficie de 18 m^2, ¿qué dimensiones requerirán la mínima cantidad de valla?

20. Se dispone de un alambre de longitud $L = 4$ m. para hacer una circunferencia y un cuadrado. ¿Cómo ha de cortarse el alambre en sus dos formas para que la suma de sus áreas sea máxima? ¿Cuándo es mínima?

21. Calcular la longitud que deben tener los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 4 m. para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

22. Una ventana tiene forma de rectángulo terminado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. El perímetro externo de la ventana ha de tener longitud de 8 m. Hallar las dimensiones de la ventana que deja pasar mayor cantidad de luz.

23. Una lámina metálica rectangular mide 5 m. de ancho y 8 m. de largo. Se quiere cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. ¿ Cómo ha de hacerse para obtener una caja del máximo volumen posible?

24. Se desea hacer una lata cilíndrica de 40 cm^3. de capacidad. El material del fondo y de la tapa es dos veces más caro que el del lateral. Hallar el radio de la base circular y la altura de la lata que resulte más económica.

25. (*Examen final 10-2-2006*) Se desea hacer una lata cilíndrica de 48π cm^3 de capacidad. El precio del material del lateral de la lata es de c euros/cm^2, mientras que el precio del fondo y de la tapa es el triple. Queremos calcular las dimensiones de la lata más económica. Para ello:

   a) Obtén razonadamente la función que da el coste de la lata en función del radio x de la base.

   b) Si has realizado correctamente el apartado *a*), la función coste para $c = 1$ es

$$C(x) = 6\pi x^2 + \frac{96\pi}{x}.$$

   ¿Cuál es el radio y la altura que dan el mínimo coste?