Problemas de Matemáticas	Biología	2008/2009	Hoja 6

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

   (a) $y' = 2 - y$ (b) $y' = 3 + t$ (c) $y' = 2y(t+1)$ (d) $yy' + (1+y^2)\operatorname{sen} t = 0$

   (e) $y' = 2^{t+y}$ (f) $\mathrm{e}^{-y}(1+y') = 1$ (g) $y' - 2ty = t$ (h) $y' - 5y = -\frac{5}{2}t$

   En cada caso hallar, si existe, la solución que verifica $y(1) = 1$.

2. En 1990 se arrojaron a un lago 1000 ejemplares de una especie de peces. En 1997 se calculó que la cantidad de peces que había en el lago de esta especie era de 3000. Suponiendo que la tasa de crecimiento es constante, calcular la cantidad de peces en 2000 y 2010.

3. Si el número de bacterias contenida en 1 litro de leche se duplica en 4 horas, suponiendo que la tasa de multiplicación es constante, calcular en cuanto tiempo se hará 25 veces mayor.

4. La ley de enfriamiento de Newton afirma que el ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del aire que lo rodea. Si una habitación se mantiene a temperatura constante de 70^o F y un objeto que estaba a 350^o F pasa a 150^o F en 45 minutos, ¿qué tiempo se necesita para que el objeto adquiera una temperatura de 80^o F?

5. El comisario Maigret, mientras pasea por una calle a 20^o C, encuentra un cadáver cuya temperatura es de 35^o C. Si al cabo de una hora su temperatura ha descendido a 34^o C, y suponiendo que en el momento de la muerte la temperatura del cuerpo era de 37^o C, ¿a qué hora se produjo el crimen, sabiendo que la temperatura del cuerpo sigue la ley de enfriamiento de Newton?

6. La *semivida* de una sustancia radiactiva se define como el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de una cantidad inicial de esa sustancia. Determinar la semivida del uranio 238 sabiendo que la desintegración es proporcional a la cantidad restante y que después de 15 años se ha desintegrado el 0'0043% de la cantidad inicial.

7. Un modelo de crecimiento restringuido de una población es el modelo de *Von Bentalanffy* que asegura que la longitud $L(t)$ de un pez de edad t sigue la ley

   $$L' = 2(34 - L).$$

   Sabiendo que $L(0) = 2$, determinar la longitud de dicho pez a cualquier edad t.

8. Resolver las siguientes ecuaciones logísticas:

   $(a) \left\{ \begin{array}{l} y' = y - y^2 \\ y(0) = 2 \end{array} \right.$ $(b) \left\{ \begin{array}{l} y' = 2y - y^2 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$ $(c) \left\{ \begin{array}{l} y' = y - 3y^2 \\ y(0) = 2 \end{array} \right.$ $(d) \left\{ \begin{array}{l} y' = 3y - 2y^2 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$

9. Un depósito contiene 100 litros de una disolución salina cuya concentración es de 2.5 gramos de sal por litro. Una disolución conteniendo 2 gramos de sal por litro entra en el depósito a razón de 5 litros por minuto y la mezcla (que se hace uniformemente) sale del depósito a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito.

10. La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 cm^3/sg y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0.2 gr/cm^3, se pide:

    (a) ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en cada instante si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento?

    (b) ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de 0.1 gr/cm^3?

11. En una habitación que contiene 300 m^3 de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado $t = 0$ algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de 3 m^3/h, conteniendo una concentración de 0.04 gr/m^3 de monóxido de carbono. Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el aire mezclado con humo a la misma velocidad. Se pide:

    (a) Establecer y resolver la ecuación diferencial para la cantidad de humo $y(t)$ en la habitación.

    (b) ¿Cuándo debería abandonar una persona prudente la fiesta considerando que el monóxido de carbono comienza a ser peligroso con una concentración superior a 0.0002 gr/m^3 ?

12. En un campus universitario que tiene 1000 estudiantes hay un único estudiante portador del virus de la gripe. Sea $y(t)$ el número de estudiantes contagiados en el día t. Si la velocidad con la que el virus se propaga es proporcional al producto entre los alumnos contagiados y los estudiantes no contagiados, se pide:

    (a) Determinar el número de personas enfermas en el día t si se sabe que pasados 4 días hay 50 enfermos.

    (b) Calcular cuándo habrá 500 estudiantes enfermos.

    (c) Si los estudiantes enfermos no se tratan con medicamentos, ¿qué número de enfermos habrá cuando pase mucho tiempo? ¿Llegará a desaparecer la enfermedad?

13. Se supone que la cantidad de herbívoros en una zona de la sabana africana crece con velocidad constante igual a 10 por año, y que al comienzo del estudio hay 100 de estos animales. Su presencia hace disminuir la cantidad de hierba en la zona, siendo la velocidad de destrucción proporcional a la suma de la cantidad de hierba (en Tm) y del número de herbívoros. Se pide:

    (a) Establecer y resolver la ecuación diferencial para el número de herbívoros.

    (b) Establecer y resolver la ecuación diferencial para la cantidad de hierba.

    (c) Sabiendo que al inicio había 300 Tm de hierba y que la constante de proporcionalidad es -1, calcular la cantidad de hierba que habrá al cabo de 1 año.

    (d) ¿Llega a desaparecer la hierba?

14. Acabada la cosecha de trigo en cierta localidad, un propietario llena su granero con una cantidad g_0 kg. de trigo. Alrededor del granero vive una especie de roedores que se alimentará del trigo recién almacenado. Un estudio realizado sobre la cantidad de roedores $r(t)$ muestra que crecen con una velocidad $r'(t)$ constante igual a 2, siendo r_0 el número inicial de roedores. Igualmente se ha concluido que, a causa de la presencia de los roedores, el ritmo de decrecimiento de la cantidad de trigo $g(t)$ es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a -1) al producto entre la cantidad de roedores y la cantidad de trigo. Se pide:

    (a) Escribir y resolver la ecuación diferencial para la cantidad de roedores en cada instante t.

    (b) Escribir y resolver la ecuación diferencial para la cantidad de trigo en cada instante t.

    (c) Si $r_0 = 2$, ¿cuánto tiempo tardarán los roedores en consumir la cuarta parte de la cantidad de trigo inicial? ¿cuánto tardarán en comerse todo el trigo?

15. (*Examen final 7-6-2006*)Un acuario contiene inicialmente 60 l. de agua pura. Entra al acuario, a razón de 2 litros por minuto, salmuera que contiene 20 gr. de sal por litro y la solución, perfectamente mezclada, sale a la misma velocidad. Se pide:

    a) Encontrar la cantidad de sal que hay en el acuario en cada instante.

    b) En este acuario se van a soltar peces que necesitan vivir a una concentración de sal de 15 gr. por litro. ¿En qué momento se alcanza dicha concentración?