SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 1

$\boxed{1}$ Los resultados de las multiplicaciones de matrices son los siguientes:

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 10 \\ -2 & 1 & -22 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 9 & -9 \\ 2 & -7 & -10 & -2 & -12 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 6 & -10 & 12 \end{pmatrix}$$

- $$\left(2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 17 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2.}$ Los resultados de las operaciones de este apartado son los siguientes:

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 13$$

- $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3.}$ Para resolver los sistemas lineales, aplicamos el método de Gauss a la matriz ampliada asociada al sistema:

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1-2F_2 \\ F_3-3F_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_1-F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

  De este modo, el sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

  cuya solución es $(x_1, x_,x_3) = (1, 0, 1)$.

- En este caso se trata de un Sistema Compatible Indeterminado, ya que hay 2 ecuaciones (linealmente independientes) y 4 incógnitas, luego elegimos como parámetros $x_3 = \lambda$ y $x_4 = \mu$. La solución viene dada entonces por:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - \lambda + \mu, 5 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$$

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_2-F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_2+2F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Observemos que la segunda fila de la matriz se corresponde con la ecuación $0 = 3$, que es imposible. Se trata por tanto de un Sistema Incompatible (que no tiene solución).

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{F_2-2F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

  Observemos que la segunda fila de la matriz se corresponde con la ecuación $0 = 4$, que es imposible. Se trata por tanto de un Sistema Incompatible.

$\boxed{4.}$ Para resolver los sistemas lineales, aplicamos el método de Gauss a la matriz ampliada asociada al sistema:

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  De este modo, el sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3y + z = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

  cuya solución es $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1+2F_2 \\ F_3+F_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3-F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  Como la tercera fila es equivalente a la ecuación $0 = -2$, se trata de un Sistema Incompatible.

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

  Como las dos últimas filas son iguales, el sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y-z=-1 \\ 3y=-3 \end{array} \right.$$

  Se trata de un sistema de 2 ecuaciones (linealmente independientes) y 3 incógnitas, luego es un Sistema Compatible Indeterminado. Eligiendo como parámetro $z = \lambda$, su solución es $(x, y, z) = (1 + \lambda, -1, \lambda)$.

$\boxed{5.}$ Para resolver los sistemas lineales, aplicamos el método de Gauss a la matriz ampliada asociada al sistema:

- En este caso, se trata de un Sistema Compatible Indeterminado, ya que el sistema posee 2 ecuaciones (linealmente independientes) y 3 incógnitas. Eligiendo como parámetro $z = \lambda$, obtenemos que la solución es $(x, y, z) = (\frac{3}{2}\lambda, -\frac{\lambda}{2}, \lambda)$.

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1-2F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1+\frac{3}{2}F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  De este modo, el sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2}z - \frac{t}{2} = \frac{7}{2} \\ 2y+z-t=1 \\ x+y+t=-1 \end{array} \right.$$

  Al tratarse de un sistema con 3 ecuaciones (linealmente independientes) y 4 incógnitas es un Sistema Compatible Indeterminado. Tomando como parámetro $t = \lambda$, obtenemos la solución $(x, y, z, t) = (-\frac{1}{3}(1+4\lambda), \frac{1}{3}(\lambda-2), \frac{1}{3}(7+\lambda), \lambda)$.

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3+3F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3-4F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$

  De este modo, el sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x+y-z=2 \\ y+z=4 \\ -10z=-10 \end{array} \right.$$

  Se trata por tanto de un Sistema Compatible Determinado, cuya solución es $(x, y, z) = (0, 3, 1)$.

$\boxed{6.}$ Para resolver los sistemas lineales, aplicamos el método de Gauss a la matriz ampliada asociada al sistema:

- En este caso, se trata de un Sistema Compatible Indeterminado, ya que el sistema posee 1 ecuación (linealmente independiente) y 3 incógnitas. Eligiendo como parámetros $y = \lambda$ y $z = \mu$, obtenemos que la solución es $(x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$.

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1+3F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1+\frac{4}{3}F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  De este modo, el sistema equivalente que tenemos que resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{10}{3}z = -\frac{20}{3} \\ 3y - z = -2 \\ -x - y - z = -1 \end{array} \right.$$

  Se trata por tanto de un Sistema Compatible Determinado, cuya solución es $(x, y, z) = (-1, 0, 2)$.

- La reducción de la matriz ampliada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-3F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3-2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

  Observemos que la tercera fila de la matriz se corresponde con la ecuación $0 = -3$, que es imposible. Se trata por tanto de un Sistema Incompatible (que no tiene solución).